韓國數學敎育學會誌 시리즈 E
<數學敎育 論文集>
제 23집 제 3호, 2009. 9. 507-522

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 23, No. 3, Sep. 2009. 507-522

사각형 종이의 접고 펼친 흔적과 (0,1)－패턴의 관계성

이 성 계 (제물포중학교)
김 진 수 (성균관대학교)
최 원 (인천대학교)

일반적으로 종이접기를 하고 그 종이를 다시 펼치면 흔적이 남는다. 직사각형의 종이를 이용하여 얻을 수 있는 수학적 사실과 프로그램을 접목해 보았다. 사각형의 종이를 접는 방향에 따라 골과 등성이의 형태가 다양하게 나타나며 이런 종이 모양의 흔적을 (0,1)코드와 (0,1)행렬을 이용하여 4종류로 분류하고 연구하였다. 따라서 이런 사각형 종이접기의 흔적을 보고 거꾸로 어떻게 접는지를 귀납적 추론력을 통해 코드와 종이접기의 흔적의 관계를 탐구하였다. 마지막으로 이 내용을 수학프로그램을 계발하였고 현장에서 실습을 할 수 있다.

I. 서 론

이 논문의 발단은 영재교육원에서 주관한 제 6회 KYST대회의 1번 문제에서 시작되어 시간과 수학적 관심을 가지고 심층적인 연구를 하다가 논문으로 발전되었다. 이 논문의 주제는 정사각형종이를 접었을 때 생기는 흔적을 통해 얻을 수 있는 조합론의 수학적 사실을 대해서 연구하였고 실제로 흔적이 어떤 수학적 구조와 관련이 있는지를 반대로 어떻게 접었는지를 알 수 있고 또한 흔적을 보고 종이접기를 어떻게 했는지를 (0,1)－패턴 및 행렬을 사용해서 판단 할 수 있다.

먼저 이 논문의 배경지식과 정의를 서술하면 다음과 같다.

정사각형 종이를 접는 방법은 여러 가지가 있다. 그 중에서 펼친 모양이 작은 직사각형들로 이루어지게 하는 것이 보편적이다. 이런 작은 직사각형의 변들은 위로 튀어 오른 등성이와 아래로 접힌 자국의 골로 분류할 수 있다. 그러면 등성이와 골이 나타내는 규칙을 찾아보고 그 원리를 알아보자.

1. 등성이의 사전적인 의미는 사람이나 동물의 등마루라는 뜻이고 이 논문에서는 정사각형 종이를 접었을 때 생기는 직사각형의 볼록하게 나온 부분 선을 등성이라 하자.

2. 골의 사전적인 의미는 골짜기와 같은 뜻으로 산과 산 사이에 움푹 들어간 곳이라는 뜻이고 이 논문에서 골의 정의는 정사각형 종이를 접었을 때 생기는 직사각형의 오목하게 들어간 선을 골이라 하자.

3. 왼쪽 부분을 오른쪽 위로 넘기는 것을 R, 왼쪽 부분을 오른쪽 아래로 넘기는 것을 L, 아래 부분을 위로 넘기는 것을 U, 위 부분을 아래로 넘기는 것을 D로 표기하자.

---

* 접수일(2009년 7월 29일), 게재확정일(2009년 8월 15일)
* ZDM 분류 : A23
* MSC2000 분류 : 97A20
* 주제어 : 종이접기, (0,1)-코드, 행렬, 가우스합수

4. 실수 x에 대하여, x보다 작거나 같은 정수 중에서 가장 큰 정수를 x의 정수부분이라 하고 이것을 $[x]$ 로 나타낸다. 흔히 $[x]$를 $\lfloor x \rfloor$ 로 나타내고 이것을 x의 최저한도(floor)라고 한다. 또, 실수 x보다 크거나 같은 정수 중에서 가장 작은 정수를 $\lceil x \rceil$ 로 나타내고 이것을 x의 최고한도(ceiling)라고 하고

다음 성질을 만족한다.

임의의 자연수n에 대하여,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\text{이 짝수일 때} \\ \frac{n-1}{2} & n\text{이 홀수일 때} \end{cases}, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \begin{cases} \frac{n}{2} & n\text{이 짝수일 때} \\ \frac{n+1}{2} & n\text{이 홀수일 때} \end{cases},$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = n, \quad \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \quad \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

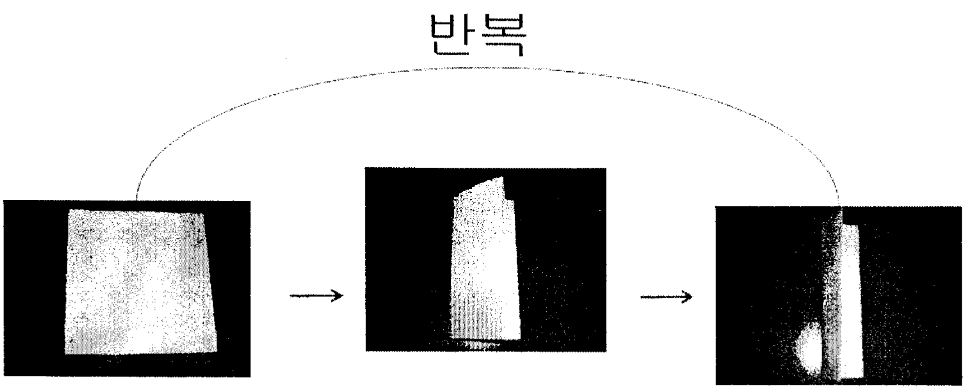
이다.

종이를 직사각형 모양이 생기기만 해도 마구잡이로 접으면 접혀진 모양을 보고 접은 방법을 일반화 시키는 것은 사실상 불가능하다. 따라서 일반화 하는 경우에서는 설정한 접기 방법을 실행하였을 때 나오는 골과 등성이의 배열이라고 생각하고 해결해 나갈 것이다.

II. 직사각형 종이 접기 절차와 펼친 흔적 탐색

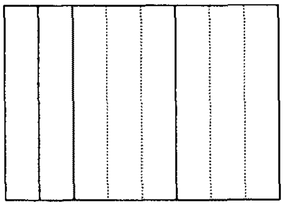
1. 오른쪽 한 방향으로 접기

접는 방법은 <그림 1>과 같이 오른쪽 한 방향으로 n번을 접은 다음 펼쳐 보자. 즉, 기본 형태는 RRR⋯이다.



<그림 1>

예를 들면, $n=3$을 시행하면 다음과 같이 나타난다. 여기서 실선은 등성이, 점선은 골이라 하자.



1 2 3 4 5 6 7

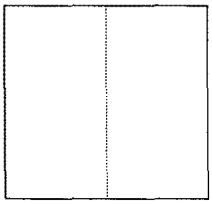
골이 4개이고 등성이 3개가 나타난다. 전체의 개수는 7이다.

정리1. 사각형 종이 접은 횟수를 n이라 하면 전체 등성이와 골의 개수의 합은 2^n-1개다.

증명) 한 방향으로 반씩 접을 때마다 나눠진 직사각형의 개수는 2배씩 늘어나므로 n번 접으면 2^n 개가 되고, 정 가운데의 골을 중심으로 대칭되는 위치에 있는 것은 한 쪽이 골이면 반대편 한쪽은 등성이가 되므로 등성이와 골의 개수 차이는 1이므로 골의 개수는 2^{n-1}이고 등성이의 개수는 $2^{n-1}-1$이다. 등성이와 골의 수의 합은 2^n-1개다.

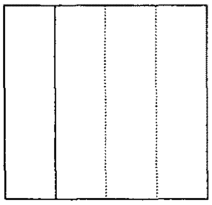
이제 반대로 접은 후 펼친 모양 보고 접은 방법을 알아보자.

아래의 그림에서 펼친 흔적을 실제로 $(0,1)$-패턴을 이용하면 흔적을 보고 어떻게 접은지를 알 수 있다. 여기서 골(점선)을 0, 등성이(실선)를 1이라하고 나타내면 다음과 같이 나타난다.



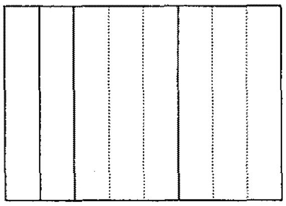
0

첫 번째 시행 :(R)



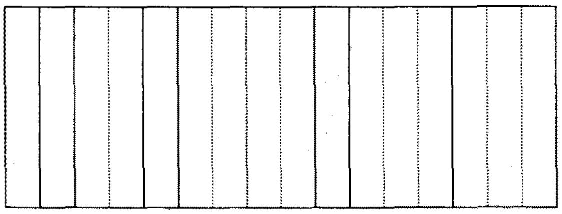
1 0 0

두 번째 시행:(RR)



1 1 0 0 1 0 0

셋 번째 시행:(RRR)



1 1 0 1 1 0 0 0 1 1 0 0 1 0 0

네 번째 시행:(RRRR)

<표 1>

	(0,1)－ 패턴	코드의 길이	기본형태
첫 번째 시행	0	1	R
두 번째 시행	100	3	RR
셋 번째 시행	1100100	7	RRR
네 번째 시행	110110001100100	15	RRRR

위의 표 1을 관찰하여 여러가지 규칙을 정리 해보면 다음과 같다.

가. 정 가운데 0을 중심으로 대칭되는 위치에 있는 숫자는 한쪽이 0이면 대칭되는 반대편은 1이다.

나. n번째 시행에서 가운데 0을 중심으로 한 오른쪽 부분은 $n-1$ 번째 시행과 일치한다. 즉, C을 $n-1$번째 (0,1)－패턴이라 하면 n번째(0,1)－패턴형태는 다음과 같이 나타난다. 단 C을 거꾸로 배열한 것을 C_R라 하고 이것을 0과1을 바꾸어 놓은 것을 $\overline{C_R}$라 하자.

$$\overline{C_R}\ 0\ C$$

즉 예를 들면 $n=4$번을 실행하면

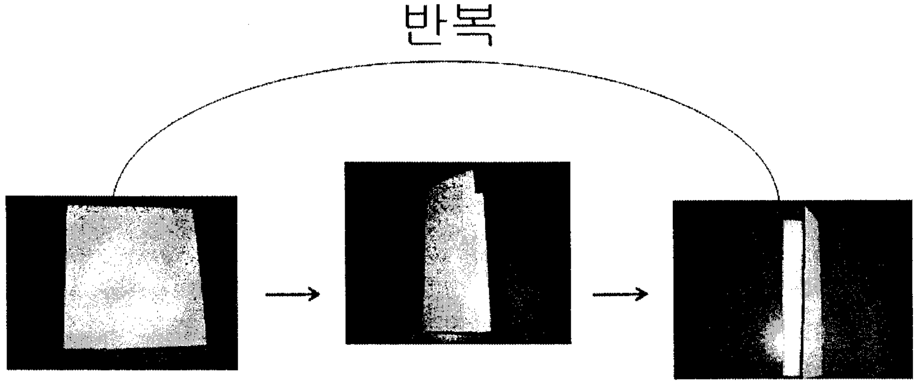
$$\underbrace{1101100}_{3번째시행}0\underbrace{1100100}_{3번째시행}$$

$\underbrace{1011011}_{3번째시행}0\underbrace{1100100}_{3번째시행}$ 코드의 (0,1)－패턴은 $\overline{C_R}=1101100$이 아니므로 오른쪽 한 방향으로 접은 모양이 아니다.

다. n번째 시행의 등성이와 골의 모양 $n+1$번째 시행이후에서도 없어지지 않는다. 즉, n번째 시행의 패턴이 $n+1$번째 시행을 결정하게 된다.

2. 오른쪽, 왼쪽으로 차례로 반복으로 한 방향으로 접기

접는 방법은 아래 <그림 2>와 같이 먼저 오른쪽 접은 후 다시 왼쪽으로 접은 다음 다시 오른쪽, 왼쪽방향으로 반복한다. 즉. RLRLRL…이다.



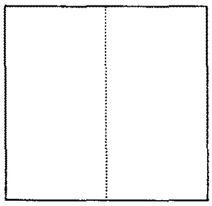
<그림 2>

정리 2 . 접은 횟수를 n이라 하면 전체 등성이와 골의 개수의 합은 2^n-1개이다.

증명) 한 방향으로 반씩 접을 때마다 나눠진 직사각형의 개수는 2배씩 늘어나므로 n번 접으면 2^n개가 되고, 정 가운데의 골을 중심으로 대칭되는 위치에 있는 것은 한 쪽이 골이면 다른 한 쪽은 등성이가 되므로 등성이와 골의 개수 차이는 1이므로 골의 개수는 2^{n-1} 이고 등성이의 개수는 $2^{n-1}-1$가 되므로 전체 등성이와 골의 수의 합은 2^n-1개이다.

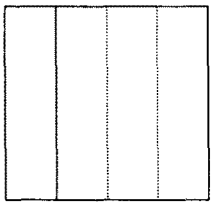
이제 n번 시행한 후 펼친 모양 보고 접은 방법을 알아보자.

아래의 그림에서 펼친 흔적을 실제로 접지 않더라도 (0,1)−패턴을 이용하면 흔적을 보고 어떻게 접는지를 알 수 있다.



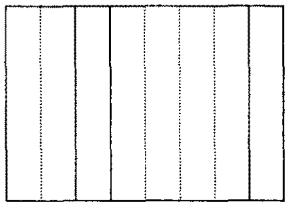
0

첫 번째 시행 :(R)



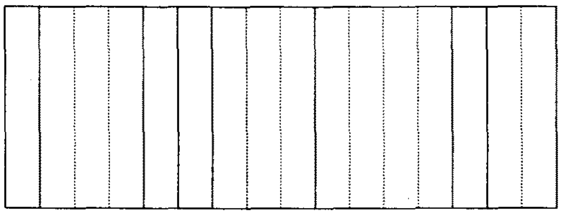
1 0 0

두 번째 시행:(RL)



0 1 1 0 0 0 1

셋 번째 시행:(RLR)



1 0 0 1 1 1 0 0 1 0 0 0 1 1 0

네 번째 시행:(RLRL)

<표 2>

	(0,1)−패턴	코드의 길이	기본형태
첫 번째 시행	0	1	R
두 번째 시행	100	3	RL
셋 번째 시행	0110001	7	RLR
네 번째 시행	100111001000110	15	RLRL

앞의 표2를 관찰하여 알 수 있는 규칙을 정리 해보면 다음과 같다.

가. 정 가운데 0을 중심으로 대칭되는 위치에 있는 숫자는 한쪽이 1이면 대칭되는 반대편은 0이다.

나. n번째 시행에서 가운데 0을 중심으로 한 오른쪽 부분은 $n-1$번째 시행을 거꾸로 한 것과 같다. 즉, C을 $n-1$번째 (0,1)－패턴이라 하고 C_R는 C을 거꾸로 배열한 것이라 하고 $\overline{C}$는 C을 0과 1로 바꾸어 놓은 (0,1)－패턴이라 하면 n번째 (0,1)－패턴형태는 다음과 같이 나타난다.

$$\overline{C}\ 0\ C_R$$

즉 예를 들면 $n=4$, 세 번째 시행(0,1)－패턴은 0110001이고 거꾸로 적으면 1000110 이다. 네 번째 시행 (0,1)－패턴은 다음과 같다.

$$\underbrace{1001110}_{\text{3번째시행}}\,0\,\underbrace{1000110}_{\text{3번째시행}}$$

다음 접은 모양은 $\overline{D}=1001110$이 아니므로 오른쪽 한 방향으로 접은 모양이 아니다.

$$\underbrace{1011011}_{\text{3번째시행}}\,0\,\underbrace{1100100}_{\text{3번째시행}}$$

다. n번째 시행의 등성이와 골의 모양 n번째 시행이후에서도 없어지지 않는다.

위의 두 가지 경우를 정리를 해보자. 접은 후 펼친 흔적의 (0,1)－패턴을 보고 어떻게 접은지을 판단하는 방법은 다음과 같다. 단 세 번 이상 시행했다고 하자.

가. 110…로 시작하면 오른쪽 한 방향으로 접은 경우이다. (RRR…)

나. 011…로 시작하면 오른쪽, 왼쪽으로 차례로 방향으로 접은 후 오른쪽에서 끝난 경우이다. (RLR)

다. 100…로 시작하면 오른쪽, 왼쪽으로 차례로 방향으로 접은 후 왼쪽에서 끝난 경우이다. (RLRL)

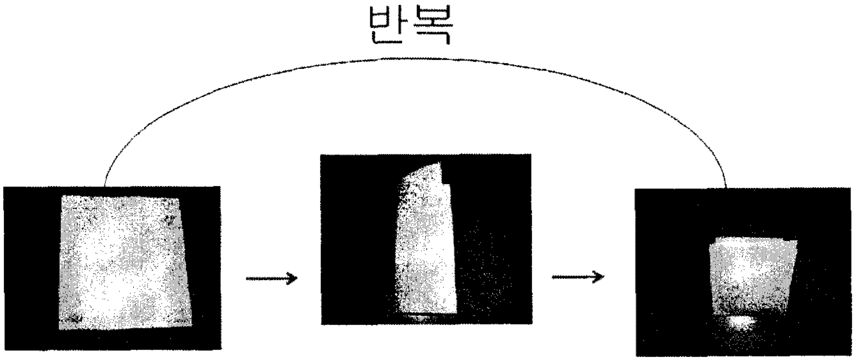
예를 들면, 다음 그림은 임의의 방법으로 종이를 접은 후 펼친 모양을 골과 등성이로 나타낸 그림이다. 이 그림을 보고 접는 방법을 추리해 보아라.

일반적으로 등성이냐 골이냐에 상관없이 접는 방법의 가지 수가 한번 접을 때마다 두 가지씩 생기므로 접은 모양을 보고 알 수 있는 사각형의 수는 2^n (n＝접는 횟수) 이다. 그러므로 위의 경우에서는 4번 접어야 위와 같은 그림이 나오므로 총 16가지의 경우가 생긴다. 그리고 위의 그림의

(0,1)－패턴이 100111001000110 이고 100으로 시작하기 때문에 RLRL로 접은 경우이다.

3. 오른쪽, 위로 두 방향으로 반복해서 접기

접는 방법은 아래 <그림 1>과 같이 오른쪽, 위로 차례로 두 방향으로 반복해서 n번을 접은 다음 펼쳐 보자. 즉, 기본 형태는 RURURU⋯이다.



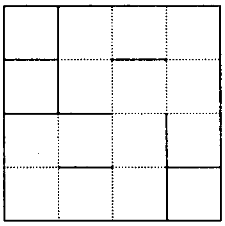
보조정리 1. 접는 횟수를 n이라 하면 등성이와 골의 수는

$$\text{골의 개수} = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

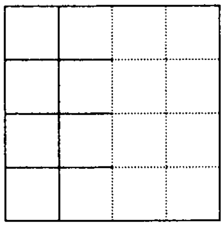
$$\text{등성이의 개수} = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$$

증명) <그림 3>은 네 번째 시행의 등성이와 골의 모양을 나타낸 그림이다. 모든 시행에서 골과 등성이는 정 가운데 세로줄을 중심으로 대칭이 되는 위치에 있으므로 정 가운데 세로줄을 중심으로 오른쪽부분에 있는 등성이를 왼쪽부분으로 옮겨주고 마찬가지로 왼쪽부분에 있는 골을 오른쪽부분으로 옮겨 주면 <그림 4>와 같은 모양이 된다.

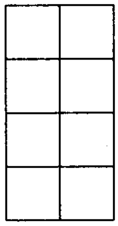
<그림 4>에서 등성이가 있는 부분(정 가운데 세로줄을 중심으로 왼쪽에 있는 부분)만 떼어 오면 <그림 5>와 같은 모양이 되고, <그림 5>를 왼쪽으로 90도 회전 시키면 <그림 6>이 되고 이를 위아래로 두 배 확대시키면 <그림 7>과 같이 3번째 시행의 접었다 펼쳤을 때 생기는 선분이 모두 등성이로 이루어져 있는 모양이 나온다는 것을 알 수 있다. 위의 증명과정에서는 네 번째 시행을 이용하여 증명하였지만 n번째 시행도 이와 같은 원리로 증명할 수 있다. 따라서 n번째 시행에서의 등성이의 수는 n-1 번째 시행의 전체 골과 등성이의 개수와 같으므로 전체 등성이의 골과 개수의 수식에서 n대신 n-1을 대입한 값과 일치한다. 또한 골의 개수는 등성이의 개수에 정 가운데에 있는 골의 개수를 더한 것이므로 등성이의 개수+ $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 개가 된다.



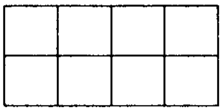
<그림 3>



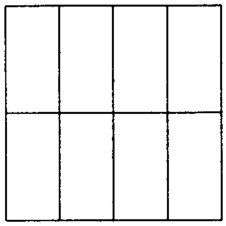
<그림 4>



<그림 5>



<그림 6>



<그림 7>

정리3. 접는 횟수를 n이라 하면 전체 골과 등성이의 수는

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

이다.

증명) 보조정리1 에 의하면

골의 개수 + 등성이의 개수

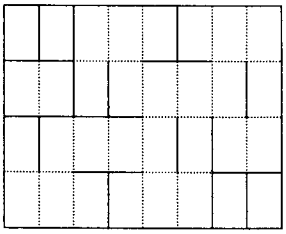
$$\begin{aligned}
&= 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&\qquad + 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} \\
&= 2 \times 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + 2 \times (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&= 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + 2 \cdot 2^{n-1} - 2 \cdot 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&= 2^n - 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} + 2^n - 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil} - 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lceil \frac{n}{2} \rceil} - 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \\
&= 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}.
\end{aligned}$$

앞의 정리를 더 살펴보면 다음과 같다.

$\underbrace{2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}_{(1)} \times \underbrace{(2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}-1)}_{(2)} + \underbrace{(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}-1)}_{(3)} \times \underbrace{2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}}_{(4)}$ 이라고 하면

(1)식은 n번째 시행에서 한 세로의 등성이와 골의 선분들의 개수
(2)식은 n번째 시행에서 등성이와 골로 이루어진 한 개의 세로 선분의 개수
(3)식은 n번째 시행에서 한 가로의 등성이와 골의 선분들의 개수
(4)식은 n번째 시행에서 등성이와 골로 이루어진 한 개의 가로 선분의 개수
을 의미한다.

예를 들면, 다음과 같은 모양의 경우에서는 RURUR 형태이므로 $n=5$이다

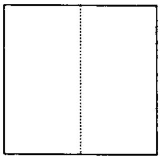


$(1)=4, (2)=7, (3)=3, (4)=8$이 되어 $4\times7+3\times8=52$개가 된다.

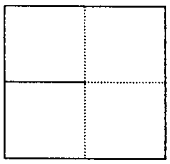
접은 모양을 보고 접은 방법은 다음과 같이 설명 할 수 있다.

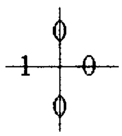
아래 그림에서 펼친 흔적을 실제로 접지 않더라도 (0,1)−패턴을 이용하면 흔적을 그릴 수 있다. 골을 0, 등성이를 1이라하고 나타내면 다음과 같다.

첫 번째 시행 - (R)

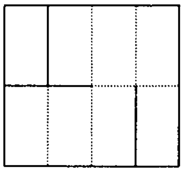


두 번째 시행 - (RU)



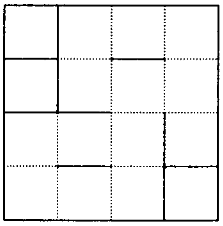


세 번째 시행 - (RUR)



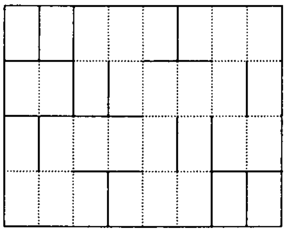
1 0 0
1 1 0 0
0 0 1

네 번째 시행 - (RURU)



1 0 0
1 0 1 0
1 0 0
1 1 0 0
0 0 1
0 1 0 1
0 0 1

다섯 번째 시행 - (RURUR)



1 1 0 0 1 0 0
1 1 0 0 1 1 0 0
0 1 1 0 0 0 1
1 1 1 1 0 0 0 0
1 0 0 0 1 1 0
0 0 1 1 0 0 1 1
0 0 1 0 0 1 1

위의 그림을 관찰하여 알 수 있는 규칙을 정리 해보면 다음과 같다.

가. 그림에 표시한 선을 좌표축이라고 생각하면 축에 걸쳐 있는 부분을 제외 한 제 1사분면의 모양은 $n-2$번째 시행의 전체 모양과 똑 같은 모양이다.

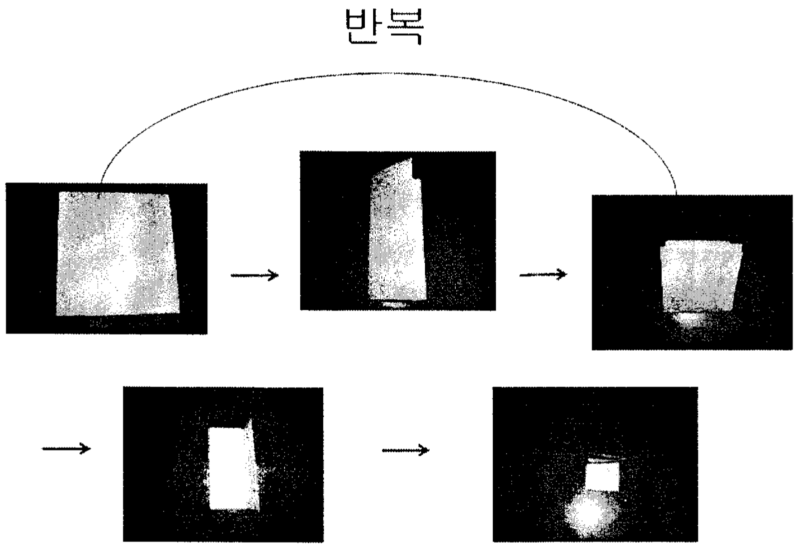
나. 세로 좌표축을 중심으로 서로 대칭되는 위치에 있는 숫자는 한쪽이 0이면 좌표축에 대칭되는 반대편은 1이다.

다. n번째 부분의 가운데 세로축을 y축이라 하고 y축은 전부 0으로 구성되어 있다. 그리고 가운데 가로축을 x축이라 하고 11⋯100⋯0으로 구성되어 있고 x,y축 기준으로 오른쪽 부분 제 1사분면의 모양은 $n-2$번째 시행한 모양과 일치한다. 즉, A을 $n-2$번째 (0,1)－패턴행렬이라 하면 n번째 (0,1)－ 패턴형태는 다음과 같이 나타난다. 즉, 제 2사분면은 A을 y축에 대칭한 다음 0과1을 서로 바꾼 형태가 되고 , 제 3사분면은 A_0을 원점에 대칭인 모양이 되고, 제 4사분면은 x축에 대칭한 다음 0과1을 서로 바꾼 형태로 나타난다.

$$\begin{matrix} \overline{A_y} & 0 & A \\ 1\cdots 1 & \vdots & 0\cdots 0 \\ A_0 & 0 & \overline{A_x} \end{matrix}$$

4. 오른쪽, 위, 왼쪽, 아래로 방향으로 차례로 반복해서 접기

접는 방법은 아래 그림과 같이 오른쪽, 위로, 왼쪽, 아래 차례로 두 방향으로 반복해서 접어 보자. 즉, 기본 형태는 RULDRULD$\cdots$이다.



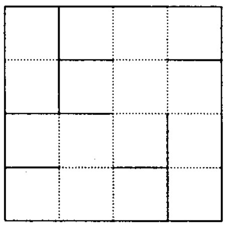
보조정리2. 접는 횟수를 n이라 하면 등성이와 골의 수는

$$\text{골의 개수} = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} + 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

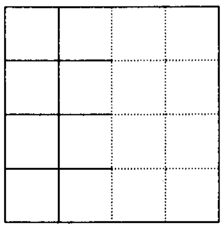
$$\text{등성이의 개수} = 2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$$

증명) <그림 8>은 네 번째 시행의 등성이와 골의 모양을 나타낸 그림이다. 모든 시행에서 골과 등성이는 정 가운데 세로줄을 중심으로 대칭이 되는 위치에 있으므로 정 가운데 세로줄을 중심으로 오른쪽부분에 있는 등성이를 왼쪽부분으로 옮겨주고 마찬가지로 왼쪽부분에 있는 골을 오른쪽부분으로 옮겨 주면 <그림 9>와 같은 모양이 된다.

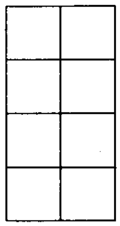
<그림 9>에서 등성이가 있는 부분(정 가운데 세로줄을 중심으로 왼쪽에 있는 부분)만 때어 오면 <그림 10>과 같은 모양이 되고, <그림 10>을 왼쪽으로 90도 회전 시키면 <그림 11>이 되고 이를 위아래로 두 배 확대시키면 <그림 12>와 같이 3번째 시행의 접었다 펼쳤을 때 생기는 선분이 모두 등성이로 이루어져 있는 모양이 나온다는 것을 알 수 있다. 위의 증명과정에서는 네 번째 시행을 이용하여 증명하였지만 n번째 시행도 이와 같은 원리로 증명할 수 있다. 따라서 n번째 시행에서의 등성이의 수는 n-1 번째 시행의 전체 골과 등성이의 개수와 같으므로 전체 등성이의 골과 개수의 수식에서 n대신 n-1을 대입한 값과 일치한다. 또한 골의 개수는 등성이의 개수에 정 가운데에 있는 골의 개수를 더한 것이므로 등성이의 개수+ $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ 개가 된다.



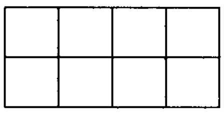
<그림 8>



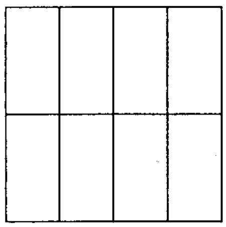
<그림 9>



<그림 10>



<그림 11>



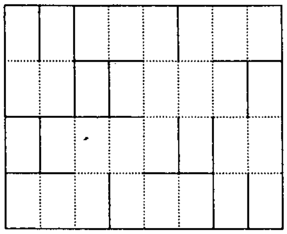
<그림 12>

정리4. 접는 횟수를 n이라 하면 전체 골과 등성이의 수는

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1) + (2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1) \times 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$$

증명) 정리3과 동일함.

예를 들면 다음과 같은 모양의 경우에서는

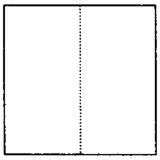


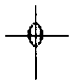
(1) = 4,(2) = 7,(3) = 8,(4) = 3 이 되어 　 4×7+8×3 = 52개가 된다.

접은 모양을 보고 접은 방법은 다음과 같이 설명 할 수 있다.

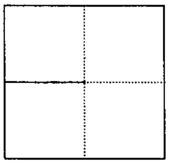
아래 그림에서 펼친 흔적을 실제로 접지 않더라도 (0,1)－패턴을 이용하면 흔적을 그릴 수 있다. 골을 0, 등성이를 1이라하고 나타내면 다음과 같다.

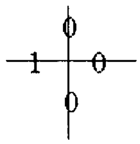
첫 번째 시행-(R)



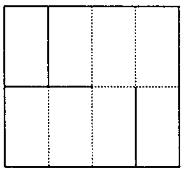


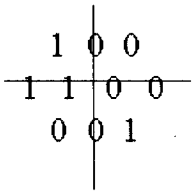
두 번째 시행 - (RU)



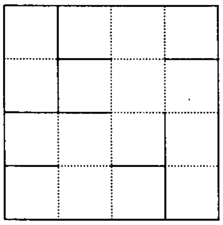


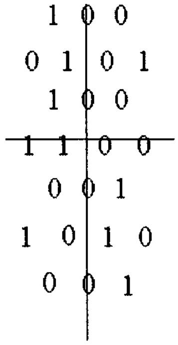
세 번째 시행 - (RUL)



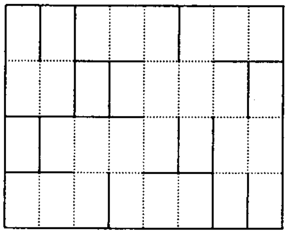


네 번째 시행 - (RULD)





다섯 번째 시행 - (RULDR)



$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

앞의 그림을 관찰하여 여러 가지 규칙을 정리 해보면 다음과 같다.

가. 그림에 표시한 선을 x,y 좌표축이라고 생각하면 축에 걸쳐 있는 부분을 제외 한 제 1사분면의 모양은 $n-2$번째 시행의 가운데 가로줄을 거꾸로 한 것이다. 이것을 A'라 하자.

나. y(세로) 좌표축을 중심으로 서로 대칭되는 위치에 있는 숫자는 한쪽이 0이면 좌표축에 대칭되는 반대편은 1이다.

다. n번째 부분의 가운데 세로축을 y축이라 하고 y축은 전부 0으로 구성되어 있다. 그리고 가운데 가로축을 x축이라 하고 $11\cdots100\cdots0$으로 구성되어 있고 x,y축 기준으로 오른쪽 부분 제 1사분면의 모양은 $n-2$번째 시행한 모양과 일치한다. 즉, A을 $n-2$번째 (0,1)－패턴행렬이라 하면 n번째 (0,1)－패턴형태는 다음과 같이 나타난다. 즉, 제 2사분면은 A을 y축에 대칭한 다음 0과1을 서로 바꾼 형태가 되고 , 제 3사분면은 A_0을 원점에 대칭인 모양이 되고, 제 4사분면은 x축에 대칭한 다음 0과1을 서로 바꾼 형태로 나타난다.

$$\begin{array}{ccc}
\overline{A'_y} & 0 & A' \\
1\cdots1 & \vdots & 0\cdots0 \\
A'_0 & 0 & \overline{A'_x}
\end{array}$$

III. 결 론

지금까지 사각형을 접고 펼친 흔적을 얻을 수 있는 수학적 모델과 수학적인 사실을 탐색하였다. 펼친 흔적을 결정하기 위해 4가지 단계를 설정하여 펼친 흔적을 바탕으로 네 가지 경우로 나누어 그 결과를 연구하였다.

첫째, RRR$\cdots$ 형식의 n번째 시행에서의 전체 선분개수, 골의 개수, 등성이의 개수는 각각 2^{n-1}, $2^{n-1}-1$, 2^n-1 이고 골과 등성이의 배열은 $\overline{C_R}\ 0\ C$ 형태이다.

둘째, RLRL$\cdots$형식의 n번째 시행에서의 전체 선분개수, 골의 개수, 등성이의 개수는 각각 2^{n-1}, $2^{n-1}-1$, 2^n-1 이고 골과 등성이의 배열은 $\overline{C}\ 0\ C_R$ 형태이다.

셋째, RURU… 형식의 n번째 시행에서의 전체 선분개수, 골의 개수, 등성이의 개수는 각각

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

$$2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} +2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$$ 이고

골과 등성이의 배열은

$$\begin{array}{ccc} \overline{A_y} & 0 & A \\ 1 \cdots 1 & \vdots & 0 \cdots 0 \\ A_0 & 0 & \overline{A_x} \end{array}$$

이다.

넷째, RULD… 형식의 n번째 시행에서의 전체 선분개수, 골의 개수, 등성이의 개수는 각각

$$2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil},$$

$$2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} +2 \lfloor \frac{n}{2} \rfloor,$$

$$2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \times (2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil} -1)+(2^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} -1) \times 2^{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$$ 이고

골과 등성이의 배열은

$$\begin{array}{ccc} \overline{A'_y} & 0 & A' \\ 1 \cdots 1 & \vdots & 0 \cdots 0 \\ A'_0 & 0 & \overline{A'_x} \end{array}$$

이다.

본 연구에서는 직사각형 종이를 접는 활동을 통해 접힌 흔적을 (0,1)－패턴, 행렬로 바꾸면 어떻게 접는지를 알아 낼 수 있다. 이러한 흔적을 탐구하는 활동을 통해 수학프로그램과 연관성이 있어 의미 있는 시사점을 줄 것으로 기대된다. 다른 형태의 종이접기에 적용이 되는 계기가 되기를 기대한다.

참 고 문 헌

권영인 · 서보억 (2006). 종이학을 접고 펼친 흔적을 통한 수학탐구활동, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 20(3), pp.469-482, 서울: 한국수학교육학회.

권호열 · 배재학 (2008). 이산수학 7판, 한티미디어.

박승안 · 김응태 (2000). 정수론 4판, 경문사.

윤대원 · 김동근 (2008). 종이접기를 통한 패턴 탐구 활동, 제40회 전국수학교육연구대회 프로시딩,

pp.11-15, 서울: 한국수학교육학회.
신현용·한인기·서봉건·최선희 (2002). 종이접기의 대수학적 의미와 교수학적 활용, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> 13(2), pp.457-475, 서울: 한국수학교육학회.
한인기·신현용 (2002). 삼각형 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 41(1), pp.79-90, 서울: 한국수학교육학회.

Relation between folding and unfolding paper of rectangle and (0,1)-pattern

Lee, Sung Gye
JeMulPo Middle School, 404-816, Incheon, Korea
E-mail : tjdrp11@naver.com

Kim, Jin Soo
Department of Mathematics, Sungkyunkwan University, Suwon 440-746, Korea
E-mail : lion@skku.edu

Choi, Won
Department of Mathematics, University of Incheon, Incheon, 406-840, Korea
E-mail : choiwon@incheon..ac.kr

In general, we do fold paper and unfold, it remain paper traces. We can be obtained by using rectangular paper, a mathematical fact and the program had a combination. Depending on the direction of the rectangle, folding paper in the form of variety shows valley and ridge signs of the appearance of this paper. By using (0,1)-code and (0,1)-matrix , we study four kinds of research. Therefore, traces of this view upside down rectangle folding paper how to fold inductive reasoning ability of the code and explore the relationship of traces. Finally, the mathematical content and program development can practice in the field.

* ZDM Classification : A23
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97A20
* Key Words : paper folding, (0,1)-code amd matrix, Gauss function