

# 회전 디스크 브레이크의 스켈소음에 대한 선형안정성 연구

## Linear Stability Analysis of a Rotating Disc Brake for Squeal Noise

강재영\*

Jaeyoung Kang

(2009년 8월 25일 접수 ; 2009년 9월 17일 심사완료)

**Key Words** : Disc Brake(디스크 브레이크), Brake Squeal(브레이크 스켈소음), Mode-coupling(모드 연성), Gyroscopic(자이로스코픽), In-plane Mode(평면 모드)

### ABSTRACT

The squeal propensity of an automotive disc brake system is studied in the theoretical and computational manner. The rotating disc is in contact with two stationary pads and the nonlinear friction is engaged on the contact surface. The friction-coupled equations of motion are derived in the finite element(FE) of the actual brake disc and pad. From the general definition of friction force, the rotation and in-plane mode effects can be included properly in the brake squeal model. The eigenvalue sensitivity analysis and the mode shape visualization at squeal frequencies are also conducted for the detailed investigation. It is found that the squeal propensity is strongly influenced by rotation effect and the in-plane mode can be involved in squeal generation.

### 1. 서론

자동차용 브레이크 스켈(squeal) 연구는 자동차 역사와 함께 한 오래되고 관심을 많이 받아 온 진동문제 중 하나이다. 그에 대한 리뷰논문집도 근래에 종종 출판되어왔다<sup>(1-2)</sup>. 특히 Nack<sup>(3-4)</sup>에 의해 소개된 유한요소(FE) 접촉마찰모델과 그에 대한 복소수해석법<sup>(5)</sup>(complex eigenvalue analysis)은 현재까지 널리 사용되는 스켈해석법이다. 이를 통해 진동 모드간 연성(mode-coupling)이 스켈소음을 발생시킨다고 알려져 있다. 하지만 이러한 복소수해석법의 복소수해에 대한 결과론적 접근은 메커니즘 자체를 연구하는데 한계가 있다. 또한 브레이크 스켈현상은 회전속도나 마찰특성에 밀접한 관계가 있는데, 복소수해석법은 이러한 연관성을 설명하지 못한다.

최근들어 이러한 스켈소음 현상을 보다 근원적으로 설명하려는 연구가 진행되어 왔다. Kang<sup>(6-10)</sup>은 일련의 연구논문을 통해 스켈현상은 회전속도에 강력히 영향을 받음을 증명해 왔다. 또한 모드 연성에 대한 임계마찰계수(critical friction coefficient)를 수식화하여 영향인자를 수학적으로 제시하였고, 스켈 진동 파형전파(wave propagation)와 모드 연성과의 관계를 비선형모델을 통해 증명하였다. 그에 따른 브레이크 스켈 통합모델 및 FE로 구현할 수 있는 방법론을 제시해왔다.

이 연구는 상기 제시된 스켈 통합모델을 실물 브레이크 시스템에 적용하는 사례로 FE 구현 방법 및 스켈 해석법을 제공하였다. 회전속도에 대한 스켈 영향도 뿐만 아니라 전반적인 스켈 메커니즘을 운동방정식에서 설명하였고, 스켈 모드의 진동형태를 형상화(mode-shape visualization)하여 보여줌으로써 이해를 도왔다.

\* 교신저자; 정회원, 공주대학교 기계자동차공학부  
E-mail : jkang@kongju.ac.kr  
Tel : (041)521-9263

## 2. 운동방정식

### 2.1 일반 수식화

자동차용 디스크 브레이크 시스템에서 속도  $\Omega$  로 회전하는 디스크(rotating disc)와 고정된 브레이크 패드(stationary pad)간 마찰이 작용할 때 발생하는 스켈소음(squeal noise) 특성을 연구한다. 패드의 마찰면(contact surface)은 균일한 접촉강성(contact stiffness)  $k_c$ 을 갖고 있고, 패드의 백 플레이트(back-plate) 역시 균일한 면압(contact pressure)  $p_o$ 에 의해 디스크와의 초기 접촉력(preload)  $N_o$ 을 갖는다고 가정한다. 실제 디스크 스켈 문제에서의 회전속도는 저속이므로 구심력(centrifugal force)은 무시한다. 또한 스켈 문제에서 디스크 변형에 의한 종속힘(follower force)의 영향은 미미하므로 접촉모델(contact model)은 변형 전 형상에서 정의되고, 이를 글로벌접촉모델(global contact model)이라고 한다<sup>(8)</sup>. 이러한 마찰접촉시스템(friction-coupled system)의 운동방정식 전개를 위하여 가상모드(assumed mode) 방식을 이용한 디스크와 패드의 변위(displacement)를 다음과 같이 모드전개방식(modal expansion form)으로 각각 표현한다.

$$\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \sum_{n=1}^{N_d} \left[ \left\{ \varphi_{r(n)}(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_r + \varphi_{\theta(n)}(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_\theta + \varphi_{z(n)}(\tilde{\mathbf{x}}) \mathbf{e}_z \right\} q_n(t) \right] \quad (1)$$

$$\mathbf{u}^p(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^{N_p} \left[ \left\{ \varphi_{r(n)}^p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_r + \varphi_{\theta(n)}^p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_\theta + \varphi_{z(n)}^p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_z \right\} q_n^p(t) \right] \quad (2)$$

여기서,  $N_d$ 와  $N_p$ 는 각각 사용된 디스크와 패드의 모드 개수이고  $\varphi_{r,\theta,z(n)}$ 는  $n$ 번째 모드형상 함수이며 위치벡터  $\tilde{\mathbf{x}}$ 와  $\mathbf{x}$ 는 각각 회전좌표계(rotating coordinates)와 절대좌표계(reference coordinates)에서 정의된다. 디스크 변위의 좌표변환(coordinate transformation)은 다음과 같은 회전성분에 의한 미분을 통해 이루어진다.

$$\frac{D\mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, t)}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \theta} \quad (3)$$

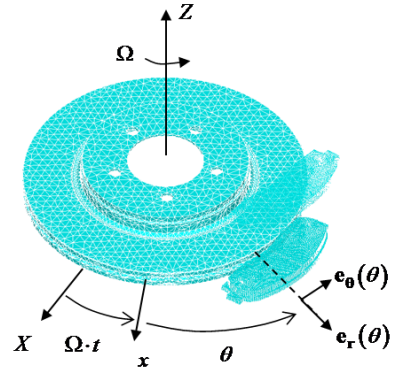


Fig. 1 FE model description of a rotating disc brake in contact with two stationary pads

그에 따른 디스크와 패드의 속도는 다음과 같이 각각 구해질 수 있다.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{D\{r\mathbf{e}_r + \mathbf{u}(\tilde{\mathbf{x}}, t)\}}{Dt} \quad (4)$$

$$\mathbf{V}^p(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{u}^p(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \quad (5)$$

이 연구의 중요한 부분 중 하나는 마찰력 정의로 회전방향의 마찰 성분뿐만 아니라 방사(radial) 방향의 마찰 성분까지 고려한다는 점이다. 예를 들면 방사(radial) 방향의 마찰성분을 고려하지 않고는 평면 모드(In-plane mode)에 대한 스켈 특성을 연구하는데 오류를 범하게 된다. 따라서, 디스크와 패드간 접촉마찰력은 일반적인 마찰력 정의에 의해서 다음과 같은 식으로 표현되어야 한다.

$$\mathbf{F} = -\mu \cdot N \cdot \frac{\mathbf{V}_{rel}}{|\mathbf{V}_{rel}|} \quad (6)$$

여기서,  $\mu$ ,  $N$ ,  $\mathbf{V}_{rel}$ 는 각각 임의의 접촉위치에서의 마찰계수, 수직력, 디스크와 패드간 상대속도(sliding speed,  $\mathbf{V} - \mathbf{V}^p$ )를 의미한다. 이때, 마찰계수와 수직력은 다음과 같이 동적인 시스템 변수로 표현될 수 있다.

$$\mu = \mu_k + (\mu_s - \mu_k) e^{-\alpha |\mathbf{V}_{rel}|} \quad (7)$$

$$N = p_o + k_c \left( (\mathbf{u}^p - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{e}_z \right) \quad (8)$$

여기서,  $\mu_s$ ,  $\mu_k$ ,  $\alpha$ 는 마찰계수-속도곡선을 결정짓는

파라미터로서 일반적인 브레이크 마찰특성<sup>(11)</sup> 인 음의 마찰곡선 기울기(negative friction-slope)을 표현하도록 설정되고,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 는 내적(inner product)을 의미한다.

모달좌표계(modal coordinates)를 이용하여 라그랑지방정식을 전개하면, 마찰연성(friction-coupled)된 디스크 브레이크 시스템의 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{a}_m} \right] - \frac{\partial L}{\partial a_m} = \sum_{n=1}^{N_a} Q_{mn}(a_n), \quad (9)$$

$$m = 1, \dots, N_a, \quad n = 1, \dots, N_a$$

$$L = T_d + T_p - (U + U_c) \quad (10)$$

$$\mathbf{a} = \{\mathbf{q}^p \quad \mathbf{q}\}^T = \{a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_{N_a}\}^T \quad (11)$$

여기서,  $N_a (= N_d + 2N_p)$ 는 총 사용된 모드의 개수이고

$$T_d = \rho \int_{V_d} \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle dV \quad (12)$$

$$T_p = \rho_p \int_{V_p} \langle \mathbf{V}_p, \mathbf{V}_p \rangle dV \quad (13)$$

$$U_c = \frac{k_c}{2} \int_{A_c} \langle (\mathbf{u}^p - \mathbf{u}), \mathbf{e}_z \rangle^2 dA \quad (14)$$

$U$ 는 단품으로 분리된 디스크와 두 패드의 총 스트레인 에너지(strain energy)로써, 고유주파수와 직접 관련이 있다. 또한 방정식 (9)의  $Q_{mn}$ 는 접촉 평면에서 마찰에 의한 가상일로부터 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{A_c} \left\{ \left\langle -\mathbf{F}, \delta \left( \mathbf{u}^p - \langle \mathbf{u}^p - \mathbf{u}, \mathbf{e}_z \rangle \mathbf{e}_z \right) \right\rangle \right\} dA \\ &\quad + \int_{A_c} \langle \mathbf{F}, \delta \mathbf{u} \rangle dA \quad (15) \\ &= \sum_{m=1}^{N_a} \sum_{n=1}^{N_a} Q_{mn}(a_n) \delta a_m \end{aligned}$$

이때 운동방정식 (9)는 마찰곡선 및 마찰력 정의 등에 의해 비선형방정식이 된다.

선형 안정성(linear stability) 이론을 이용한 정상 슬라이딩상태(steady-sliding)에서의 브레이크 시스템의 동적안정성을 연구하기 위해 운동방정식 (9)를

정상슬라이딩에 대해 선형화하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{a}} + (\mathbf{G} + \mathbf{C} + \mathbf{R}_d + \mathbf{N}_s) \dot{\mathbf{a}} \\ + \left( [\omega^2] + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{F}_f \right) \mathbf{a} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (16)$$

여기서 속도 매트릭스  $\mathbf{G} (= -\mathbf{G}^T)$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{R}_d (= \mathbf{R}_d^T)$ ,  $\mathbf{N}_s (= \mathbf{N}_s^T)$ 는 각각 자이로스코픽(gyroscopic), 댐핑, 방사 댐핑(radial dissipative), 음의 마찰곡선(negative friction-slope) 매트릭스를 의미한다. 그리고 강성매트릭스  $[\omega^2]$ ,  $\mathbf{A} (= \mathbf{A}^T)$ ,  $\mathbf{B} (= \mathbf{B}^T)$ ,  $\mathbf{F}_f (= \mathbf{F}_f^T)$ 는 각각 단품 고유진동수, 접촉강성, 마찰연성, 평면모드 마찰의 종속힘 연성을 의미한다.

기존 복소수해 분석법<sup>(3-5)</sup>은 회전방향 마찰에 의한 마찰연성  $\mathbf{B}$ 의 비가역성(non-conservative work) 때문에 모드연성(mode-coupling) 불안정성이 발생한다는 사실에 기초를 두었다. 하지만 이는 제한된 해만 제시할 뿐만 아니라, 특히 회전에 의한 영향도 및 평면모드에 의한 스컬 특성을 제시하는 것이 불가능하다. 이 모델에서는 디스크 회전속도의 영향도 뿐만 아니라 평면모드의 영향도, 그 외 다양한 스컬 현상의 메카니즘을 근원적으로 다룰 수 있는 근간을 제시하는데 의의가 있다.

## 2.2 FE 방정식 구현

선형운동방정식 (16)은 원판(annular plate)인 브레이크 디스크 및 부분원판(annular sector plate)을 이용하여 수학적 구현이 되기도 하고<sup>(6-9)</sup>, 간단한 모자모양의 디스크(hat-disc) FE 모델<sup>(10)</sup>을 이용하여 구현되기도 하였다. 하지만 실제 디스크 브레이크의 스컬 현상을 예측하기 위해서는 실물 모양의 FE 모델을 이용하여 운동방정식을 구축하여야 한다. 이를 위해서 실제 디스크 브레이크 시스템을 3D 모델링하고 이를 FE모델로 구축하는 작업이 필요하다. 다만 자동차 브레이크 스컬 문제는 회전체의 임계속도(critical speed)와는 거리가 먼 저속구간에 국한되고 자이로스코픽 매트릭스는 무시 가능함<sup>(8)</sup>이 보여졌기 때문에, 운동방정식 (16)에서  $\mathbf{G}$ 는 생략된다.

Fig. 1과 같은 브레이크 디스크와 패드에 대한 모달해석(modal analysis)을 ANSYS를 통해서 수행하였다. 또한 각 노드(node)별 모달정보(modal data)

를 구축하여 식 (1)과 (2) 형태로 변위를 표현할 수 있다. 여기서 마찰력  $\mathbf{F}$ (식 (6))를 표현하기 위하여 좌표변환식 이 병행되어야 한다. 이를 위하여 변위에 대한  $\theta$ -미분 ( $\partial/\partial\theta$ )이 요구된다. FE모델에 대한 마찰면에서의  $\theta$ -미분은 다음과 같은 수치해석적 정의에 의해 구현 가능하다.

$$\frac{\partial\Phi(\mathbf{x},t)}{\partial\theta} = \frac{\Phi(r_i, \theta_{j+1}, t) - \Phi(r_i, \theta_j, t)}{\theta_{j+1} - \theta_j} \quad (17)$$

마찬가지로 식 (15)를 구현하기 위해 마찰면에 대한 면적분을 다음과 같이 구현한다.

$$\int_{A_c} \Phi(\mathbf{x},t) dA = \sum_{i=1}^{M_r} \sum_{j=1}^{M_\theta} \Phi(r_i, \theta_j, t) r_i \Delta r_i \Delta \theta_j \quad (18)$$

여기서,  $M_r$  과  $M_\theta$  는 각각 마찰면의 방사방향과 회전방향 노드 개수이다. 이러한 수치해석 연산을 위한 메쉬법은 참고논문 (10)을 참조하였다.

### 3. 해석결과

이 연구에서는 일반적인 브레이크 마찰특성인 음의 마찰곡선기울기를 브레이크 마찰모델에 적용하였다. Fig. 2에서 보듯이 디스크 회전속도에 따라 마찰계수가 증가함을 알 수 있으며, 실험데이터는 참고논문 (11)의 저온상태의 다이내모 시험데이터를

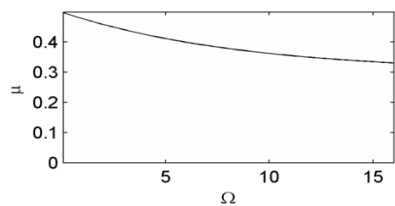
참조하여 마찰곡선 파라미터를 선정하였다. 그에 따른 운동방정식 (16)의 복소수해의 실수부 변화를 회전속도 변화에 따라 Fig. 3과 같이 추적하였다. 서로 다른 접촉강성별로 실수부 변화를 비교해보면 대체로 속도가 감소하면서 스킵 성향(squeal propensity)이 증대하다가 매우 낮은 속도에 다다르면 다시 감소하는 경향을 보게 된다. 하지만 이러한 속도의존성은 각각의 진동 모드별로 다르기 때문에 브레이크 설계시 고려해야 한다. 단, Fig. 3 상단부에 보이는 두개의 실수선은 주파수가 없는 정적 불안정(divergence instability)를 나타내므로, 스킵 소음과는 무관함에 유의해야 한다.

보다 익숙한 주파수 영역(frequency domain)에서 스킵 성향을 나타내기 위해 Fig. 4와 같이 고유치민 감도해석(eigenvalue sensitivity analysis)를 수행하였다. 시스템의 개별 모드주파수는 Fig. 4에서 보듯이 접촉강성이 증가함에 따라 변하게 된다. 이때 특정 주파수, 특정 모드는 양의 실수부를 갖게 되는데, 이를 스킵 모드(squeal mode)라 한다. 여기서 접촉강성이 증가하는데도 주파수가 변하지 않는 모드는 수직(out-of-plane) 진동성분이 거의 없는 평면(in-plane) 모드에 가깝다고 볼 수 있다. 특히 Fig. 4의 modes 46,47은 평면모드에 가까운 스킵 모드므로 이후 설명이 추가된다.

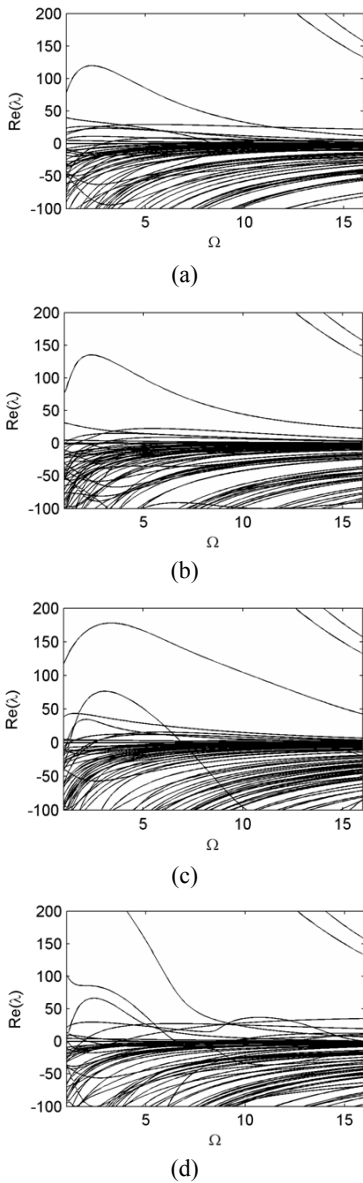
잘 알려진 바와 같이 이러한 스킵 모드는 주로 모드 연성에 의해 나타나지만 이는 매우 제한된 설명이다. 보다 근본적인 메커니즘 설명을 위해 참고논문 (8)을 참조해보면, 모드연성은 다양한 물리적 형태로 설명되어야 함을 알 수 있다. 즉, 회전성분 마찰에 의한 정지마찰연성(stationary friction-coupling), 디스크 변형 및 회전에 의한 마찰 종속힘 연성, 디스크 회전에 의한 자이로스코픽 마찰연성(gyroscopic friction-coupling)이 있다. 또한 모달 댐핑(modal damping)간 차이, 마찰곡선 특성 및 방사성분 마찰력에 의한 영

**Table 1** Nominal values of system parameters

Parameter	Symbol	Value
Preload	$N_o$	2000 N
Nominal contact stiffness	$k_{c,nam}$	$0.35 \times 10^{11} \text{ N}\cdot\text{m}^{-3}$
Density	(disc)	$7150 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Young's modulus	(disc)	88.9 Gpa
Poisson ratio	(disc)	0.285
Density	(pad)	$7820 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
Young's modulus	(pad)	207 Gpa
Poisson ratio	(pad)	0.29



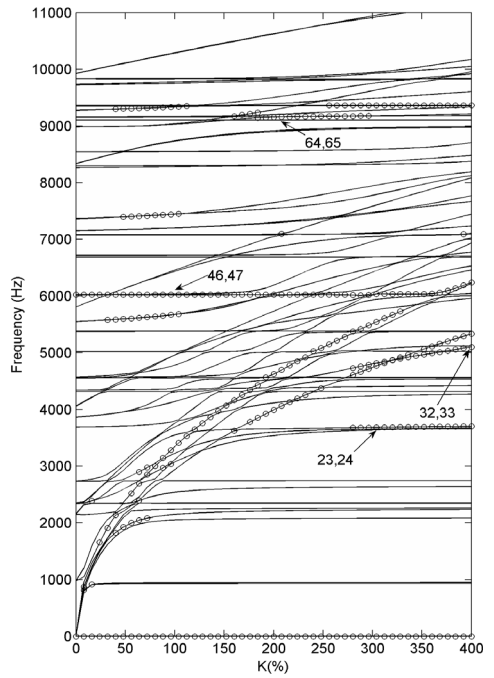
**Fig. 2** Friction-velocity curve,  $(\mu_s, \mu_k, \alpha) = (0.5, 0.3, 1.0)$



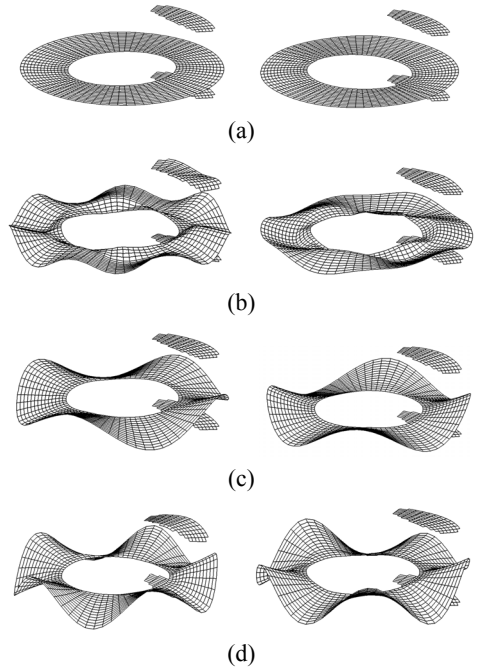
**Fig. 3**  $Re(\lambda)$  with respect to rotation speed at  $K = k_c / k_{c,nom} \times 100[\%]$  (a) 100, (b) 200, (c) 300, (d) 400,  $N_a = 92$

향도 등 기존 복소수해석법에서 간과되어 온 많은 물리적 현상들이 스퀸 문제에 명백히 존재한다. 이들을 제대로 다루기 위해서는 반드시 정확한 마찰력 정의에 따른 마찰모델 구축이 선행되어야 한다.

Fig. 4에 나타나는 스퀸 모드 중 대표적인 네개의 스퀸 모드의 모드형상을 살펴보기 위해 디스크의 평균부분과 패드의 마찰면(friction interface)부분의



**Fig. 4** Frequency variation with respect to  $K$  and the corresponding unstable modes ( $Re(\lambda) > 0$ ) denoted by ‘o’ at  $\Omega = 5 [rad \cdot s^{-1}]$ ,  $N_a = 92$



**Fig. 5** Mode shapes at squeal frequencies of Fig. 4, (a) modes 46,47, (b) modes 64,65, (c) modes 23,24, (d) modes 32,33

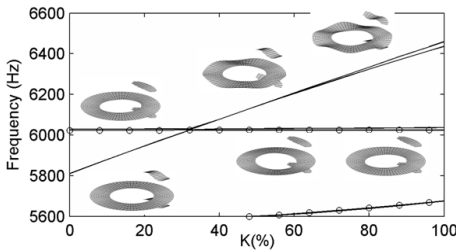


Fig. 6 The mode shape variation near modes 46,47

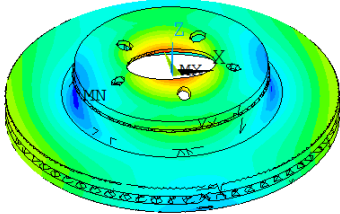


Fig. 7 The original(in-plane mode-like) mode shape of mode 46 in Fig. 4

진동형상을 형상화하였다. 특히 Fig. 5의 (c),(d)에서 보듯이 디스크의 모드쌍(pair mode) 진동은 매우 강한 마찰연성을 갖고 있기 때문에 만나기만 하면 스켈을 발생시킬 수 있는 여지를 항상 갖고 있다<sup>(6)</sup>.

이 연구에서 중요한 부분 중 하나는 평면(in-plane) 모드에 의한 스켈 발생이다. Fig. 4의 modes 46,47은 평면 형태의 진동모드에 가깝지만 지속적으로 스켈을 발생시키고 있음을 알 수 있다. Fig. 5(a)의 모드 형상으로는 수직(out-of-plane)성분이 거의 없기 때문에 식별이 곤란하다. 하지만 Fig. 6에서 보듯이 평면모드형상은 접촉강성에 무관하기 때문에 디스크의 단품 모드형상( $k_c = 0$ )을 통해 파악할 수 있다. 따라서 Fig. 7과 같은 단품 모드 형상으로 mode 46,47의 3차원 모드 형상을 파악할 수 있다.

#### 4. 결 론

이 연구에서는 실제 자동차 디스크 브레이크 모델을 이용하여 이론을 병행한 수치해석적 방법으로 스켈 소음을 분석하는 방법을 제시하였다. 명확한 마찰 모델을 이용한 디스크-패드간 마찰연성모델을 구축하여 체계적인 스켈 연구를 가능토록 하였다. 이 연구를 통해 브레이크 스켈은 디스크 회전속도에 큰

영향을 받는다는 점을 확인하였다. 또한 디스크의 평면(in-plane)모드가 스켈을 발생시킬 수 있음을 확인하였다. 스켈 모드의 진동형상을 형상화하여 스켈 소음 분석 시 체계적인 연구가 가능함을 보였다.

#### 후 기

이 논문은 2009년도 공주대학교 신입교수 정착연구비에 의하여 연구되었음.

#### 참 고 문 헌

- (1) Kinkaid, N. M., O'Reilly, O. M., Papadopoulos, P., 2003, "Automotive Disc Brake Squeal," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 267, pp. 105~166.
- (2) Ouyang, H., Nack, W., Yuan, Y., Chen, F., 2005, "Numerical Analysis of Automotive Disc Brake Squeal: a Review," *International Journal of Vehicle Noise and Vibration*. Vol. 1, pp. 207~231.
- (3) Nack, W., Joshi, A. M., 1995, "Friction Induced Vibration: Brake Moan," Technical Report, 951095, SAE, Warrendale, PA.
- (4) Nack, W., 2000, "Brake Squeal Analysis by Finite Elements," *International Journal of Vehicle Design*. Vol. 23, pp. 263~275.
- (5) Kwon, S. J., Kim, C. J., Lee, D. W., Lee, B. H., Na, B.C., Kim, H. C., 2006, "A study on the Analysis of Squeal Noise for Brake Design," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 16, No. 8, pp. 830~839.
- (6) Kang, J., Krousgrill, C. M., Sadeghi, F., 2008, "Dynamic Instability of a Thin Circular Plate with Friction Interface and its Application to Disc Brake Squeal," *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 316, pp. 164~179.
- (7) Kang, J., Krousgrill, C. M., Sadeghi, F., 2009, "Analytical Formulation of Mode-coupling Instability in Disc-pad Coupled System," *International Journal of Mechanical Science*. Vol. 51, pp. 52~63.
- (8) Kang, J., Krousgrill, C. M., Sadeghi, F., 2009, "Comprehensive Stability Analysis of Disc Brake :

Gyroscopic, Negative Slope and Mode-coupling Instability,” *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 324, pp. 387~407.

(9) Kang, J., Krousgrill, C. M., Sadeghi, F., 2009, “Wave Pattern Motion and Stick-slip Limit Cycle Oscillation of a Disc Brake,” *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 325, pp. 552~564.

(10) Kang, J., 2009, “Squeal Analysis of

Gyroscopic Disc Brake System based on Finite Element Method,” *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 51, pp. 284~294.

(11) Kang, J., Choi, S., 2007, “Brake Dynamometer Model Predicting Brake Torque Variation due to Disc Thickness Variation,” *Journal of Automobile Engineering*. Vol. 221, pp. 49~55.