영역 분할법을 이용한 깊은 홈을 가진 임의 형상 오목 멤브레인의 고유치 해석

Eigenvalue Analysis of Arbitrarily Shaped, Concave Membranes With a Deep Groove Using a Sub-domain Method

강 상 욱†·윤 주 일*

S. W. Kang and J. I. Yoon

(2009년 7월 24일 접수 ; 2009년 9월 18일 심사완료)

Key Words : Eigenvalues(고유치), Sub-domain Method(영역 분할법), NDIF Method(무차원 동영향 함수법), Free Vibration(자유 진동), Concave Membrane(오목 멤브레인), Arbitrarily Shaped Membrane(임의 형상 멤브레인), Deep Groove(깊은 홈)

ABSTRACT

A sub-domain method for free vibration analysis of arbitrarily shaped, concave membranes with a deep groove is proposed in the paper. The proposed method divides the concave membrane of interest into two convex regions. The vibration displacement(approximate solution) of each convex region is assumed by linearly superposing plane waves generated at edges of the region. A sub-system matrix for each convex region is extracted by applying a provisional boundary condition to the approximate solution. Finally, a system matrix, which of the determinant gives eigenvalues of the concave membrane, is made by considering the fixed boundary condition(displacement zero condition) at edges and the compatibility condition(the condition of continuity in displacement and slope) at the interface between the two regions. Case studies show that the proposed method is valid and accurate when the eigenvalues by the proposed are compared to those by NDIF method, FEM, or the exact method.

1. 서 론

유한요소법[1]과 경계요소법[2]은 임의형상구조물의 자유 진동 해석을 위해 가장 일반적으로 사용되는 해석기법이다. 이들은 해석 대상물의 내부 영역 또는 경계를 여러 개의 요소로 분할한 후 노드와 노드 사이의 변위를 보간 함수로 근사화시키는 방법을 이용한다. 그러나 이들 보간 함수들이 해석 대상 물체의 운동 지배 방정식을 만족하지 않는 단점으로 인해, 유한요소법과 경계요소법은 해의 정밀도 확보에 있어서 한계를 가지며 많은 수치 계산량을 필요로 하는 단점을 가지고 있다.

1999년 저자는 NDIF법[3](method of non-dimensional dynamic influence function)을 처음으로 개발하여, 위에서 언급한 유한요소법과 경계요소법의 해의 정밀도 한계를 극복할 수 있는 방법을 임의형상 멤브레인에 적용하였다.

NDIF법은 임의 형상 구조물의 고정밀도 고유진동수 및 고유 모드를 적은 수치 계산량으로 정확하게 추출할 수 있는 자유 진동 해석 기법으로, 지난 10년간 임의 형상 멤브레인[3,4], 임의 형상 음향 공동[5], 다양한 경계조건을 가진 임의 형상 평판[6~11]에 대한 NDIF법 이론 정식화가 저자에 의해 성공적으로 이

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : (02)760-4228, Fax : (02)760-4329
* 한성대학교 기계시스템공학과

루어졌다. 참고로, NDIF법은 경계요소법과 마찬가지로 해석 대상물의 경계만을 노드로 이산화하나, 노드와 노드 사이에는 어떠한 요소도 사용하지 않는 무요소법(meshless method)의 일종이다.

한편, NDIF법은 해석 대상 구조물의 경계를 이산화하기 위해 노드의 개수를 너무 많이 사용할 경우, 고유치가 수렴하지 않고 발산하는 한계를 가진다[3]. 저자는 이러한 단점을 극복하기 위해, 평면파(plane wave) 형태의 시리즈 함수(series function)를 이용하여 임의 형상 다각형 평판의 고유치를 구하는 방법[12]을 제안하였다. 이 방법에서는 고유치의 정밀도를 높이기 위해 시리즈 함수의 개수를 증가시키더라도 해의 수렴성은 계속 유지되는 것으로 확인되었다. 그러나, 상기의 방법은 볼록 다각형 형상에만 적용 가능하고 깊은 홈을 가진 오목 다각형 형상에는 적용이 어려운 한계를 가진다.

이 논문에서는 상기의 연구 결과[12]를 확장하여, 깊은 홈을 가진 오목 형상 멤브레인에서도 적용 가능한, 영역 분할법(sub-domain method)을 이용한 고유치 해석 기법을 제안하고자 한다.

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

멤브레인의 자유 진동 지배방정식은 식 (1)과 같이 헬름홀츠 방정식(Helmholtz equation)의 형태를 가진다[13].

$$\nabla^2 W + \Lambda^2 W = 0, \quad (1)$$

여기서 W는 멤브레인의 횡방향 진동변위를 나타내며, Λ는 고유치 파라미터를 나타낸다. 그리고 멤브레인의 고정 경계 조건(변위가 0인 조건)은 다음과 같이 주어진다.

$$W_\Gamma = 0, \ \Gamma : \text{경계}. \quad (2)$$

2.1 분할된 영역에 대한 시스템 행렬식

Fig. 1에서와 같이 해석 대상 오목 다각형 멤브레인(실선으로 표시된 다각형)은 두 개의 볼록 다각형 영역 D_I와 D_{II}로 분할된다. 영역 D_I은 Na개의 경계 모서리 $\Gamma_1^{(I)}, \Gamma_2^{(I)}, \cdots, \Gamma_{Na}^{(I)}$로 둘러 싸여 있다고 가정되며, $\Gamma_{Na}^{(I)}$은 분할된 두 영역 사이의 접경(interface)인 Γ_c에 해당한다. 마찬가지로, 영역 D_{II}은 Nb개의 경계 모서리 $\Gamma_1^{(II)}, \Gamma_2^{(II)}, \cdots, \Gamma_{Nb}^{(II)}$로 둘러 싸여 있다고 가정되며, $\Gamma_{Nb}^{(II)}$은 분할된 두 영역 사이의 접경인 Γ_c에 해당한다.

이 논문에서는 분할된 영역 각각에 대한 시스템 행렬식을 먼저 추출할 것이다. 이를 위해 영역 D_I에서의 자유진동 해(횡방향 변위)는 식 (3)과 같이, D_I의 경계 모서리들에서 발생한 평면파(plane wave)의 선형 중첩으로 가정된다[12].

$$W^{(I)} = \sum_{i=1}^{Na}\sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(i)} \sin\frac{m\pi x_i^{(I)}}{L_i^{(I)}} \exp\left(j\sqrt{\Lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i^{(I)}}\right)^2}\, y_i^{(I)}\right), \quad (3)$$

여기서 $A_m^{(i)}$은 미지 계수, $L_i^{(I)}$는 i번째 경계모서리의 길이, Ns는 각각의 경계 모서리에 사용된 시리즈 함수의 개수, j는 순허수, $(x_i^{(I)}, y_i^{(I)})$는 i번째 경계 모서리에 설정된 지역좌표계(Fig. 1 참조)를 나타낸다. 참고로 식 (3)은 지배방정식 식 (1)을 정확히 만족한다.

다음으로, 식 (2)에서 주어진 멤브레인의 고정 경계조건 대신에, 임시로 식 (4)와 같이 경계 모서리들에서의 변위는 사인 시리즈 함수의 선형 중첩으로 가정된다[12].

$$W^{(I)}(x_r^{(I)}, y_r^{(I)} = 0) = \sum_{n=1}^{Ns} U_n^{(r)} \sin\frac{n\pi x_r^{(I)}}{L_r^{(I)}}, \quad r = 1, 2, \cdots, Na, \quad (4)$$

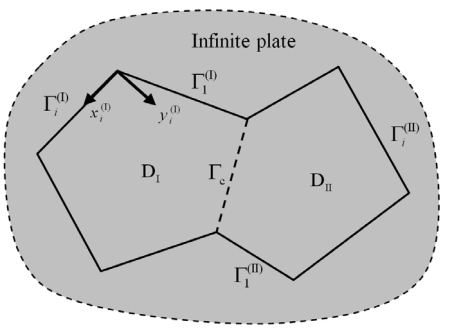

Fig. 1 Arbitrarily shaped polygonal membrane divided into two regions D_I and D_{II}

여기서 $U_n^{(r)}$은 미지계수, $(x_r^{(\mathrm{I})}, y_r^{(\mathrm{I})})$은 r번째 경계 모서리에 설정된 지역좌표계를 나타낸다.

이제 임시 경계조건 식(4)를 가정된 자유 진동해 식(3)에 적용한 후, 경계 모서리를 따라 적분을 수행하면 식(5)를 얻을 수 있다[12].

$$\sum_{i=1}^{Na}\left(\sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(i)} SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(i,r)}\right) = U_q^{(r)}, \quad q = 1,2,\cdots,Ns;\ \ r = 1,2,\cdots,Na, \tag{5}$$

여기서

$$SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(i,r)} = \frac{2}{L_r^{(\mathrm{I})}}\int_0^{L_r^{(\mathrm{I})}} \left[\sin\frac{m\pi x_i^{(\mathrm{I})}}{L_i^{(\mathrm{I})}} \times \exp\left(j\sqrt{\Lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i^{(\mathrm{I})}}\right)^2}\, y_i^{(\mathrm{I})}\right) \sin\frac{q\pi x_r^{(\mathrm{I})}}{L_r^{(\mathrm{I})}}\right]_{y_r^{(\mathrm{I})}=0} dx_r^{(\mathrm{I})} \tag{6}$$

나중에 두 영역의 접경 Γ_c에서 변위 및 기울기 연속 조건을 사용하기 위하여, 식(5)는 다음과 같이 경계 모서리($\Gamma_1^{(\mathrm{I})}, \Gamma_2^{(\mathrm{I})}, \cdots, \Gamma_{Na-1}^{(\mathrm{I})}$)와 접경($\Gamma_c$)에 대한 식으로 분리된다.

$$\sum_{i=1}^{Na-1}\left(\sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(i)} SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(i,r)}\right) + \sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(Na)} SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(i,r)} = U_q^{(r)}, \quad q = 1,2,\cdots,Ns;\ \ r = 1,2,\cdots,Na-1, \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{Na-1}\left(\sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(i)} SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(i,Na)}\right) + \sum_{m=1}^{Ns} A_m^{(Na)} SM_{\mathrm{I}(q,m)}^{(Na,Na)} = U_q^{(Na)}, \quad q = 1,2,\cdots,Ns. \tag{8}$$

마지막으로 식(7)과 식(8)은 다음과 같이 시스템 행렬식의 형태로 각각 표현된다.

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})} + \mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})} = \mathbf{U}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})}, \tag{9}$$

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})} + \mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})} = \mathbf{U}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}, \tag{10}$$

여기서 위첨자 b는 경계모서리를 의미하며, 위첨자 c는 분할된 두 영역 사이의 접경을 의미한다. 참고로 이 논문에서는 식(9, 10)을 영역 $\mathrm{D_I}$에 대한 시스템 행렬식으로 정의한다.

이제 영역 $\mathrm{D_{II}}$에 대한 시스템 행렬식을 구하기 위하여, 영역 $\mathrm{D_{II}}$에서의 자유 진동 해와 접경 Γ_c에서의 변위는 다음과 같이 가정된다.

$$W^{(\mathrm{II})} = \sum_{i=1}^{Nb}\sum_{m=1}^{Ns} B_m^{(i)} \sin\frac{m\pi x_i^{(\mathrm{II})}}{L_i^{(\mathrm{II})}} \exp\left(j\sqrt{\Lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{L_i^{(\mathrm{II})}}\right)^2}\, y_i^{(\mathrm{II})}\right), \tag{11}$$

$$W^{(\mathrm{II})}(x_r^{(\mathrm{II})}, y_r^{(\mathrm{II})} = 0) = \sum_{n=1}^{Ns} V_n^{(r)} \sin\frac{n\pi x_r^{(\mathrm{II})}}{L_r^{(\mathrm{II})}}, \quad r = 1,2,\cdots,Nb. \tag{12}$$

여기서 $B_m^{(i)}$와 $V_n^{(r)}$은 미지 계수를 나타내며, $(x_i^{(\mathrm{II})}, y_i^{(\mathrm{II})})$는 영역 $\mathrm{D_{II}}$의 i번째 경계 모서리에 설정된 지역좌표계를 나타낸다. 다음으로, 영역 $\mathrm{D_I}$에 대해 수행된 식(3~10)의 과정을 식(11, 12)에 적용을 하면 다음과 같은 영역 $\mathrm{D_{II}}$에 대한 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})}\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})} + \mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})} = \mathbf{V}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})}, \tag{13}$$

$$\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})} + \mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})}\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})} = \mathbf{V}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}. \tag{14}$$

2.3 경계조건과 연속조건 적용

Fig. 1에서 주어진 해석 대상 오목 다각형 멤브레인에 대한 시스템 행렬식을 얻기 위하여, 분할된 영역 각각에 대해 구해진 시스템 행렬식(식(9, 10, 13, 14))들은 접경 Γ_c에서의 변위와 기울기 연속조건을 고려하는 방법에 의해 하나의 시스템 행렬식으로 통합된다. 이를 위해 식(9, 13)에 고정단 경계조건 $\mathbf{U}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})} = \mathbf{V}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})} = \mathbf{0}$을 적용하면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})} = -\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}, \tag{15}$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})} = -\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}. \tag{16}$$

다음으로, 식(15, 16)을 식(10, 14)에 각각 대입하면 다음의 식들을 얻을 수 있다.

$$(-\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}+\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})})\,\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}=\mathbf{U}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}, \quad (17)$$

$$(-\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}+\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})})\,\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}=\mathbf{V}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}. \quad (18)$$

이제 접경 Γ_c에서 변위 연속 조건 $\mathbf{U}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}=\mathbf{V}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}$을 식 (17, 18)에 적용하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(-\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}&\\ +\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})})\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}&+\\ (\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}&\\ -\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})})\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}&=\mathbf{0}\end{aligned}. \quad (19)$$

추가적으로 접경 Γ_c에서 기울기 연속 조건을 고려하기 위하여, 영역 $\mathrm{D_I}$의 관점에서 이 접경 Γ_c에서의 기울기는 다음과 같이 가정된다.

$$\frac{\partial W^{(\mathrm{I})}}{\partial y_{Na}^{(\mathrm{I})}}(x_{Na}^{(\mathrm{I})},y_{Na}^{(\mathrm{I})}=0)=\sum_{n=1}^{Ns}\overline{U}_n^{(Na)}\sin\frac{n\pi x_{Na}^{(\mathrm{I})}}{L_{Na}^{(\mathrm{I})}}, \quad (20)$$

여기서 $\overline{U}_n^{(Na)}$는 미지 계수이다. 다음으로, 자유진동해 식 (3)을 식 (20)에 대입한 후, 접경 Γ_c를 따라 적분을 수행하면, 다음의 식이 구해진다.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{Na-1}(\sum_{m=1}^{Ns}A_m^{(i)}\overline{SM}_{\mathrm{I}\,(q,m)}^{(i,Na)})+&\\ \sum_{m=1}^{Ns}A_m^{(Na)}\overline{SM}_{\mathrm{I}\,(q,m)}^{(Na,Na)}&=\overline{U}_q^{(Na)},\\ q=1,2,\cdots,Ns,&\end{aligned} \quad (21)$$

여기서

$$\begin{aligned}\overline{SM}_{\mathrm{I}\,(q,m)}^{(i,Na)}=\frac{2}{L_r^{(\mathrm{I})}}\int_0^{L_r^{(\mathrm{I})}}\frac{\partial}{\partial x_r^{(\mathrm{I})}}[\sin\frac{m\pi x_i^{(\mathrm{I})}}{L_i^{(\mathrm{I})}}\times&\\ \exp(j\sqrt{\Lambda^2-(\frac{m\pi}{L_i^{(\mathrm{I})}})^2}\,y_i^{(\mathrm{I})})\sin\frac{q\pi x_r^{(\mathrm{I})}}{L_r^{(\mathrm{I})}}]_{y_r^{(\mathrm{I})}=0}dx_r^{(\mathrm{I})}&\end{aligned}. \quad (22)$$

마지막으로 식 (21)은 다음과 같이 시스템 행렬식의 형태로 간단히 표현된다.

$$\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{b})}+\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})}\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}=\overline{\mathbf{U}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}. \quad (23)$$

다음으로, 영역 $\mathrm{D_{II}}$의 관점에서 이 접경 Γ_c에서의 기울기를 구하기 위하여, 영역 $\mathrm{D_I}$에 대해 수행한 식 (20~23)의 과정을 반복하면 다음과 같은 시스템 행렬식을 얻을 수 있다.

$$\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{b})}+\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})}\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}=\overline{\mathbf{V}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}. \quad (24)$$

이제 식 (23, 24)에 접경 Γ_c에서의 기울기 연속 조건 $\overline{\mathbf{U}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}=\overline{\mathbf{V}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}$을 적용함과 동시에 식 (15, 16)을 고려하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}(-\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}&\\ +\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})})\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}&+\\ (\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}&\\ -\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})})\mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}&=\mathbf{0}\end{aligned} \quad (25)$$

2.4 최종 시스템 행렬식과 고유치 추출

분할된 두 영역의 접경에서의 변위 및 기울기 연속 조건으로부터 구한 두 개의 시스템 행렬식 식 (19, 25)는 다음과 같이 하나의 식으로 통합된다.

$$\mathbf{SM}(\Lambda)\,\mathbf{C}=\mathbf{0}, \quad (26)$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(\Lambda)$은 고유치 파라미터 Λ의 함수이며,

$$\mathbf{SM}(\Lambda)=\begin{bmatrix}\mathbf{SM}_{11} & \mathbf{SM}_{12}\\ \mathbf{SM}_{21} & \mathbf{SM}_{22}\end{bmatrix}, \quad (27)$$

$$\mathbf{SM}_{11}=-\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}+\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})}, \quad (28a)$$

$$\mathbf{SM}_{12}=\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}-\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})}, \quad (28b)$$

$$\mathbf{SM}_{21}=-\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{bc})}+\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{cc})}, \quad (28c)$$

$$\mathbf{SM}_{22}=\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cb})}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bb})^{-1}}\mathbf{SM}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{bc})}-\overline{\mathbf{SM}}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{cc})}, \quad (28d)$$

$$\mathbf{C}=\begin{Bmatrix}\mathbf{A}_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{c})}\\ \mathbf{B}_{\mathrm{II}}^{(\mathrm{c})}\end{Bmatrix}. \quad (29)$$

마지막으로 해석 대상 멤브레인의 고유치는 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(\Lambda)$의 판별식(determinant)이 영이 되는 조건인 식 (30)의 해로부터 구해질 수 있다[3,4,12].

$$\det[\mathbf{SM}(\Lambda)]=0. \quad (30)$$

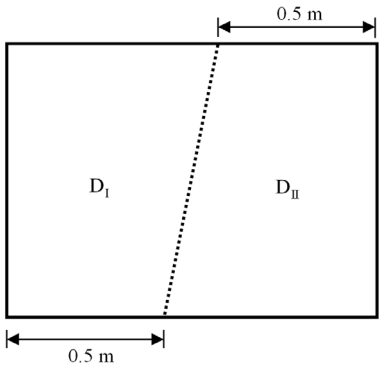

Fig. 2 Rectangular membrane divided into two regions

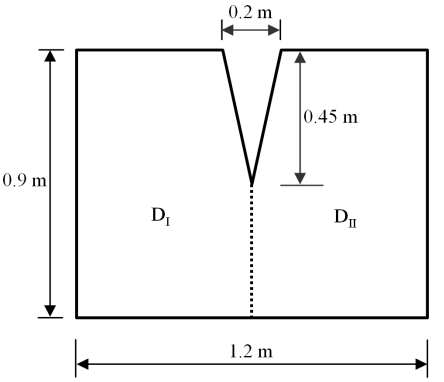

Fig. 3 Concave membrane with a deep groove

Table 1 Eigenvalues Λ_i of the rectangular membrane obtained by the proposed method, NDIF method, FEM(NASTRAN) and the exact method

Λ_i	Proposed method (*Ns*=6)	NDIF method[4] (27 nodes)	FEM (1102 nodes)	Exact method[14]
1	4.37	4.36	4.37	4.36
2	6.30	6.29	6.30	6.29
3	7.45	7.46	7.47	7.46
4	8.60	8.59	8.62	8.59
5	8.72	8.73	8.74	8.73
6	10.52	10.51	10.54	10.51

3. 검증 예제

3.1 직사각형 멤브레인

이 논문에서 제안된 방법의 타당성 및 정확성을 검증하기 위해 엄밀해가 존재하는 직사각형 멤브레인이 첫 번째 예제로 고려되었다. Fig. 2와 같이 가로 길이가 1.2 m, 세로 길이가 0.9 m인 직사각형 멤브레인을 두 개의 영역으로 나눈 다음, 고유치 해석이 수행되었다.

Table 1은 이 논문에서 제안된 방법, NDIF법[4], FEM(NASTRAN), 엄밀해 방법[14]에 의해 구해진 고유치 결과를 보여준다. 표에서 알 수 있듯이, 이 논문에서 제안된 방법은(엄밀해와 비교해볼 때) 아주 정확한 결과를 제공함을 확인할 수 있으며, NDIF법 보다는 다소 부정확하지만 FEM에 비해서는 정확함을 확인할 수 있다.

Table 2 Eigenvalues Λ_i of the concave membrane obtained by the proposed method, NDIF method and FEM(NASTRAN)

Λ_i	Proposed method (*Ns*=6)	NDIF method[4] (30 nodes)	FEM		
			1701 nodes	976 nodes	451 nodes
1	5.75	5.79	5.71	5.72	5.74
2	6.43	6.42	6.42	6.43	6.44
3	8.11	8.15	8.17	8.18	8.21
4	8.90	8.88	8.89	8.90	8.92
5	9.85	9.92	9.87	9.89	9.94
6	11.31	11.25	11.31	11.34	11.43

4.1 깊은 홈을 가진 임의 형상 멤브레인

이 예제에서는 Fig. 3과 같이 모서리에 매우 깊은 홈을 가진 오목 멤브레인이 고려되었으며, 이 논문에서 제안된 방법을 적용하기 위하여 그림과 같이 두 개의 볼록 영역으로 분할되었다.

Table 2는 이 논문에서 제안된 방법, NDIF법[4], FEM(NASTRAN)에 의해 구해진 고유치 결과들을 보여준다. 표에서 확인할 수 있듯이, 이 논문에서 제안된 방법은 NDIF법이나 FEM과 비교해볼 때 매우 정확한 해석 결과를 제공함을 알 수 있다.

5. 결 론

이 논문에서는 깊은 홈을 가진 오목 멤브레인의 고유치 해석을 위해 해석 대상 멤브레인을 두 개의 볼록 영역으로 나누는 영역 분할법이 제안되었다. 두 가지 예제를 통하여 이 논문에서 제안된 방법의 타당성과 정확성이 검증되었다. 차후의 연구에서는

고유치 해석된 멤브레인의 고유 모드를 구하는 방법이 추가로 연구될 예정이다.

비록 이 논문에서는 해석 대상 영역을 단지 두 개의 영역으로 나누는 영역 분할법이 시도되었으나, 차후의 연구에서는 해석 대상 영역을 여러 개의 영역으로 나누어서, 보다 복잡한 형상을 가진 멤브레인에 대한 고유치 해석이 가능한 방법을 제안할 예정이다.

후 기

이 연구는 2009년도 한성대학교 교내연구비 지원 과제임.

참 고 문 헌

(1) Bathe, K., 1982, “Finite Element Procedures in Engineering Analysis,” Prentice-Hall, New Jersey.

(2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, “Boundary Element Techniques, Springer-Verlag,” New York.

(3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 1999, “Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Membrane Using Non-dimensional Dynamics Influence Function,” Journal of Sound and Vibration. Vol. 221, pp. 117~132.

(4) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, “Application of Free Vibration Analysis of Membranes Using the Non-dimensional Dynamics Influence Function,” Journal of Sound and Vibration. Vol. 234, No. 3, pp. 455~470.

(5) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, “Eigenmode Analysis of Arbitrarily Shaped Two-dimensional Cavities by the Method of Point-matching,” Journal of the Acoustical Society of America. Vol. 107, No. 3, pp. 1153~1160.

(6) Kang, S. W. and Lee J. M., 2001, “Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Clamped Edges Using Wave-type Functions,” Journal of Sound and Vibration. Vol. 242. No. 1, pp. 9~26.

(7) Kang, S. W., 2002, “Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with a Mixed Boundary Condition Using Non-dimensional Dynamic Influence Functions,” Journal of Sound and Vibration, Vol. 256, No. 3, pp. 533~549.

(8) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2003, “Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Free Edges Using Non-dynamic Influence Functions,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 821~827.

(9) Kang, S. W., 2007, “Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Polygonal Plates with Free Edges by Considering the Phenomenon of Stress Concentration at Corners,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 3, pp. 220~225.

(10) Kang, S. W., Kim, I. S. and Lee, J. M., 2008, “Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Plates with Smoothly Varying Free Edges Using NDIF Method,” Journal of Vibration and Acoustics, Transactions of ASME. Vol. 130, No. 4, pp. 041010.1~041010.8.

(11) Kang, S. W. and Atluri, S. N., “Development of Meshless Method for Free Vibration Analysis of Arbitrarily Shaped Free Plates Using Local Polar Coordinates,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 18, No. 6, pp. 674~680.

(12) Kang, S. W., 2007, “Free Vibration Analysis of Clamped Plates with Arbitrary Shapes Using Series Functions,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 10, pp. 531~538.

(13) Meirovitch, L., 1967, “Analytical methods in vibrations,” Macmillan Publishing, New York.

(14) Blevins, R. D., 1979, “Formulas for Natural Frequency and Mode Shape,” Litton Educational Publishing, New York.