

다중 메쉬의 교차큐브에 대한 임베딩

(Embedding Multiple Meshes into a Crossed Cube)

김 숙 연 [†]

(Sook-Yeon Kim)

요 약 교차큐브는 병렬처리 시스템의 상호연결망으로서 널리 알려진 하이퍼큐브와 많은 면에서 비슷하면서도 절반 정도의 지름을 가지는 등 개선된 망 성질들을 가지므로 각광 받아 왔다. 크기 4×2^m 인 메쉬의 복사본 두 개, 혹은 크기 8×2^m 인 메쉬의 복사본 네 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음이 알려져 있다[Dong, Yang, Zhao, and Tang, 2008]. 그러나 양변의 길이가 모두 8 보다 큰 메쉬 다수 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있는지는 알려진 바가 없다. 이 논문에서는 크기 $2^n \times 2^m$ 인 메쉬의 복사본 2^{n-1} 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음을 보인다, $n \geq 1, m \geq 3$. 이 연구 결과는 연장과 확장이라는 주요 임베딩 측정 척도에서 최적이다. 또한 이 연구 결과는 메쉬 구조를 가지는 다수 개의 작업을 교차큐브 구조를 가지는 병렬 컴퓨터에 할당하는데 효과적으로 활용될 수 있다.

키워드 : 교차큐브, 메쉬, 임베딩, 연장을, 확장을

Abstract The crossed cube has received great attention because it has equal or superior properties compared to the hypercube that is widely known as a versatile parallel processing system. It has been known that disjoint two copies of a mesh of size 4×2^m or disjoint four copies of a mesh of size 8×2^m can be embedded into a crossed cube with dilation 1 and expansion 1 [Dong, Yang, Zhao, and Tang, 2008]. However, it is not known that disjoint multiple copies of a mesh with more than eight rows and columns can be embedded into a crossed cube with dilation 1 and expansion 1. In this paper, we show that disjoint 2^{n-1} copies of a mesh of size $2^n \times 2^m$ can be embedded into a crossed cube with dilation 1 and expansion 1 where $n \geq 1$ and $m \geq 3$. Our result is optimal in terms of dilation and expansion that are important measures of graph embedding. In addition, our result is practically usable in allocating multiple jobs of mesh structure on a parallel computer of crossed cube structure.

Key words : crossed cube, mesh, embedding, dilation, expansion

1. 서 론

그래프 임베딩은 병렬 구조간의 시뮬레이션이나[1,2], 병렬처리시스템의 병렬 알고리즘 수행[3,4], VLSI 칩 설계[5-7]등을 위해서 필수적인 기술이다. 또한 그래프 임베딩은 작업을 병렬처리 시스템에 할당하는 데에도 활

용되어 왔다. 하나의 작업을 구성하는 부작업들(sub-tasks)과 그들간의 통신을 그래프 G 로 나타내고 병렬 처리 시스템의 프로세서들과 그들간의 연결 상태를 그래프 H 로 나타낸다. 그런 후 그래프 G 를 그래프 H 에 효율적으로 임베딩하면 부작업들은 병렬처리시스템에 효과적으로 할당될 수 있다. 그런데 통상 다수 개의 작업들이 동시에 하나의 병렬 처리 시스템에서 수행되므로 다수 개의 작업을 나타내는 그래프 G 를 임베딩하는 것이 필요하다[8,9]. 다수 개의 작업을 나타내는 그래프 G 는 다수 개의 연결요소를 가지는 그래프로 볼 수 있다. 특히 그래프 G 에 속하는 다수 개 연결 요소가 서로 동형인 경우는 병렬처리 시스템의 고장에 대한 신뢰도를 높이는 방안으로 활용될 수 있다. 왜냐하면 한 작업을 병렬 처리시스템에서 중복 수행하는데 적용될 수 있

[†] 정 회 원 : 한경대학교 컴퓨터공학과 교수
entpentp@paran.com

논문접수 : 2008년 9월 9일
심사완료 : 2009년 6월 22일

Copyright©2009 한국정보과학회 : 개인 목적이나 교육 목적인 경우, 이 저작물의 전체 또는 일부에 대한 복사본 혹은 디지털 사본의 제작을 허가합니다. 이 때, 사본은 상업적 수단으로 사용할 수 없으며 첫 페이지에 본 문구와 출처를 반드시 명시해야 합니다. 이 외의 목적으로 복제, 배포, 출판, 전송 등 모든 유형의 사용행위를 하는 경우에 대하여는 사전에 허가를 얻고 비용을 지불해야 합니다.

정보과학회논문지: 시스템 및 이론 제36권 제5호(2009.10)

기 때문이다.

주어진 그래프 G 에 대해서 $V(G)$ 와 $E(G)$ 를 그래프 G 의 노드 집합과 에지 집합이라고 하자. 주어진 두 개의 그래프 G 과 H 에 대해서 그래프 G 의 그래프 H 에 대한 임베딩은 노드 집합 $V(G)$ 의 노드 집합 $V(H)$ 에 대한 단사 함수 ψ 이다($\psi:V(G) \rightarrow V(H)$). 여기서 그래프 G 를 손님 그래프(guest graph)라 하고 그래프 H 를 주인 그래프(host graph)라고 한다. 어떤 작업을 나타내는 그래프의 복사본 x 개를 임베딩한다면 손님 그래프는 x 개의 연결요소(connected component)를 가진다.

임베딩의 성능을 측정하는 척도에는 연장을(dilation)과 확장율(expansion) 등이 있다. 주인 그래프가 프로세서간의 연결 상태를 나타낼 때 임베딩의 연장은 통신 지연(communication delay)을 측정하는 척도가 되고 확장율은 프로세서 이용도(processor utilization)를 측정하는 척도가 된다. 손님 그래프 G 의 에지 (u,v) 에 대해서 에지 (u,v) 의 연장은 두 노드 $\psi(u)$ 와 $\psi(v)$ 간의 최단 거리이다. 임베딩 ψ 의 연장은 에지 집합 $E(G)$ 에 속한 에지들의 연장에서 최대값이다. 확장율은 주인 그래프와 손님 그래프의 노드 개수의 비율 $|V(H)|/|V(G)|$ 이다.

한편 병렬 처리 분야에서 매우 유명한 상호연결망인 하이퍼큐브는 단순한 구조, 작은 지름, 정규 분지수, 대칭성, 고장 감내성 등의 유용한 성질들을 가지고 있다. 하이퍼큐브의 변형으로서 제안된 교차큐브(crossed cube)는 하이퍼큐브와 많은 면에서 비슷하면서도 절반 정도의 지름을 가지는 등 개선된 망 성질들을 가지므로 각광 받게 되었다[10-17]. 따라서 최단경로, 해밀톤 경로, 사이클, 트리, 메쉬 등을 교차큐브에 임베딩하는 연구도 활발히 진행되었다[8,10,11,18-22]. 메쉬의 복사본 다수개를 임베딩한 결과를 살펴보면, 크기 4×2^m 인 메쉬의 복사본 두 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음이 알려져 있다[8,21]. 또한 크기 8×2^m 인 메쉬의 복사본 네 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음도 알려져 있다[8]. 그러나 양변의 길이가 모두 8 보다 큰 메쉬 다수 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있는지는 알려진 바가 없다.

이 논문에서는 크기 $2^n \times 2^m$ 인 메쉬의 복사본 2^{n-1} 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음을 보인다($n \geq 1, m \geq 3$). 2절에서는 교차큐브와 메쉬를 정의

하고 3절에서는 메쉬의 복사본 다수개를 교차큐브에 재귀적으로 임베딩하는 방법을 제시하고 4절에서는 크기 $2^n \times 2^m$ 인 메쉬의 복사본 2^{n-1} 개가 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있음을 보이고 5절에서는 결론을 맺는다.

2. 교차큐브와 메쉬의 정의

이 절에서는 교차큐브와 메쉬를 정의한다. 교차큐브를 정의하기 위해서 먼저 두 이진스트링간의 쌍관계(pair-relation)를 정의한다.

정의 1. 길이가 짝수 p 인 이진스트링 $u = u_0u_1 \dots u_{p-2}u_{p-1}$ 와 $v = v_0v_1 \dots v_{p-2}v_{p-1}$ 이 있다고 하자. 만약 모든 i , $0 \leq i < p/2$ 에 대해서 다음 조건을 만족하면 u 와 v 는 서로 쌍관계이다. 그 역도 성립한다.

$$(u_{2i}u_{2i+1}, v_{2i}v_{2i+1}) \in \{(00,00), (10,10), (01,11), (11,01)\}$$

이제 교차큐브를 정의한다.

정의 2. p -차원 교차큐브 Q_p 는 2^p 개의 노드를 가진다. 교차큐브 Q_p 의 각 노드는 서로 다른 주소를 가지는데 각 주소는 p 비트이다. 교차큐브 Q_p 의 노드 $u = u_0u_1 \dots u_{p-2}u_{p-1}$ 와 노드 $v = v_0v_1 \dots v_{p-2}v_{p-1}$ 는 다음 조건을 만족하는 d 가 존재하면 d -차원 에지 (u,v) 를 가진다.

- 1) $u_k = v_k, 0 \leq k < d,$
- 2) $u_d \neq v_d,$
- 3) $(p-d)$ 가 홀수이면 $u_{d+1}u_{d+2} \dots u_{p-2}u_{p-1}$ 와 $v_{d+1}v_{d+2} \dots v_{p-2}v_{p-1}$ 가 서로 쌍관계이고,
- 4) $(p-d)$ 가 짝수이면 $u_{d+1} = v_{d+1}$ 이고 $u_{d+2}u_{d+3} \dots u_{p-2}u_{p-1}$ 와 $v_{d+2}v_{d+3} \dots v_{p-2}v_{p-1}$ 가 서로 쌍관계이다.

그림 1과 그림 2에 교차큐브 Q_3 과 교차큐브 Q_4 가 있다.

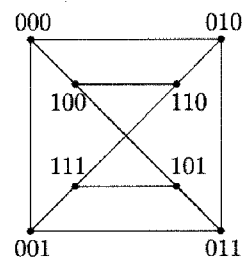


그림 1 교차큐브 Q_3

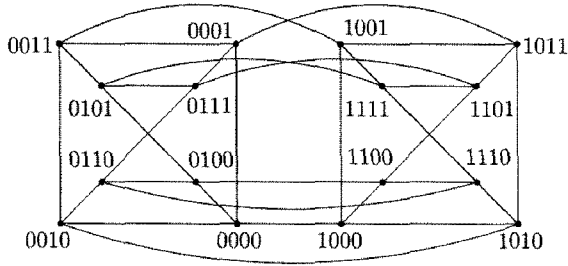


그림 2 교차큐브 Q_4

앞으로 교차큐브를 간단히 큐브라고도 하겠다. 큐브 Q_p 의 노드 $u = u_0u_1 \cdots u_{p-2}u_{p-1}$ 에 대해서 u_i 를 i 번째 비트라고 하자 ($0 \leq i < p$). 또한 i 가 짝수(홀수)일 때는 u_i 를 짝수(홀수, 각각)번째 비트라고도 하자. 큐브 Q_p , $p \geq 4$,의 노드 $u = u_0u_1 \cdots u_{p-2}u_{p-1}$ 에 대해서 처음 네 비트 $u_0u_1u_2u_3$ 을 머리로 정의하고 나머지 비트들 $u_4u_5 \cdots u_{p-2}u_{p-1}$ 을 꼬리로 정의한다. 이제 크기 $N \times M$ 인 메쉬 $T(N, M)$ 를 정의한다. 그림 3에 메쉬 $T(3, 4)$ 가 나타나 있다.

정의 3. 메쉬 $T(N, M)$ 는 다음과 같은 노드 집합 V 와 에지 집합 E 를 가진다.

$$V = \{(i, j) \mid 0 \leq i < N, 0 \leq j < M\}$$

$$E = \{((i, j), (i', j)) \mid (i, j) \in V, (i', j) \in V, i+1 = i'\}$$

$$\cup \{((i, j), (i, j')) \mid (i, j) \in V, (i, j') \in V, j+1 = j'\}$$

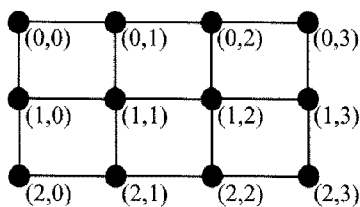


그림 3 메쉬 $T(3, 4)$

3. 메쉬의 복사본 다수개의 교차큐브에 대한 재귀적 임베딩

이 절에서는 메쉬의 복사본 다수개를 교차큐브에 임베딩하는 재귀적인 방법을 제시한다. 이 방법은 한 개의 메쉬를 재귀적으로 임베딩하는 방법[22]을 확장한 것이다. 별도의 언급이 없어도 앞으로 제시하는 모든 임베딩의 연장율은 1이다. 임베딩을 재귀적으로 정의하기 위해서 다음과 같은 조건 3.1을 설정한다.

조건 3.1. 메쉬 $T(N, M)$ 를 교차큐브 Q_p 에 임베딩할

때 차원 p 는 짝수이고 임의의 행 i , $0 \leq i < N$,의 맨 왼쪽 노드 $(i, 0)$ 과 맨 오른쪽 노드 $(i, M-1)$ 가 대응하는 큐브 노드들이 서로 쌍관계이다.

그림 4에 메쉬 $T(1, 4)$ 를 조건 3.1을 만족하면서 Q_2 에 임베딩한 예가 나타나 있다. 맨 왼쪽 노드 $(0, 1)$ 이 대응하는 노드 01과 맨 오른쪽 노드 $(0, 3)$ 이 대응하는 노드 11이 서로 쌍관계이다.

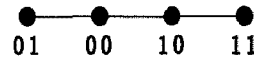


그림 4 메쉬 $T(1, 4)$ 의 큐브 Q_2 에 대한 임베딩

그림 5에 메쉬 $T(2, 8)$ 을 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_4 에 임베딩한 예가 나타나 있다. 맨 왼쪽 위 노드 $(0, 0)$ 과 맨 오른쪽 위 노드 $(0, 7)$ 이 대응하는 큐브 노드 0101과 1111은 서로 쌍관계이고 맨 왼쪽 아래 노드 $(1, 0)$ 과 맨 오른쪽 아래 노드 $(1, 7)$ 이 대응하는 노드 0111과 1101은 서로 쌍관계이다. 그림 5에서 같은 행에서 인접한 두 노드 (i, j) 와 (i, j') 가 대응하는 큐브 노드들의 주소를 비교해 보자 ($j+1 = j'$). 그러면 j 가 짝수일 경우엔 처음 세 비트는 같고 마지막 비트만 다르므로 3-차원 에지로 인접한다. j 가 홀수일 경우엔 첫 두 비트 중 한 비트만 다르고 마지막 두 비트는 서로 쌍관계이다. 따라서 j 가 홀수일 경우엔 0-차원이나 1-차원 에지로 인접한다. 그림 5에서 같은 열에서 인접한 두 노드 (i, j) 와 (i', j) 가 대응하는 큐브 노드들은 2-차원 에지로 인접한다($i+1 = i'$).

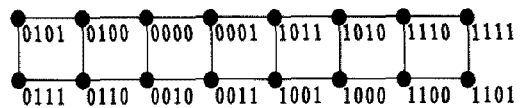


그림 5 메쉬 $T(2, 8)$ 의 큐브 Q_4 에 대한 임베딩 f_1

그림 4이나 그림 5와 같이 메쉬 $T(N, M)$ 를 큐브 Q_p 에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있으면 메쉬 $T(N, 4M)$ 를 큐브 Q_{p+2} 에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있다. 예를 들어 그림 4와 같이 메쉬 $T(1, 4)$ 를 Q_2 에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있으면 그림 6과 같이 메쉬 $T(1, 16)$ 를 Q_4 에 조건 3.1을 만족하면서 임베딩할 수 있다.

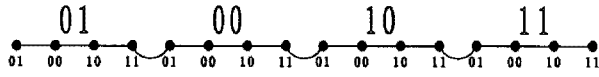


그림 6 메쉬 $T(1,16)$ 의 Q_4 에 대한 임베딩

그림 6은 메쉬 $T(1,4)$ 의 복사본 네 개에 에지를 추가 하여 메쉬 $T(1,16)$ 를 구성한 예를 보여 준다. 추가된 에지들은 곡선으로 보인다. 그림 6에서 각 복사본의 아래 쪽에는 그림 4와 똑같이 두 비트씩 붙어 있다. 또한 각 복사본의 위쪽에는 큰 숫자로 2 비트씩 붙어 있다. 위쪽의 2 비트와 아래쪽의 2 비트를 연결하여 네 비트의 큐브 노드 주소를 얻을 수 있다. 예를 들어 맨 왼쪽 노드 $(0,0)$ 은 큐브 노드 0101에 대응되고 그 다음 노드 $(0,1)$ 은 0100에 대응되고 맨 오른쪽 노드 $(0,15)$ 는 1111에 대응된다. 그림 6에서 인접한 메쉬 노드들은 인접한 큐브 노드들에 대응한다. 뿐만 아니라 맨 왼쪽 노드 $(0,0)$ 과 맨 오른쪽 노드 $(0,15)$ 가 대응하는 노드들 0101과 1111이 서로 쌍관계이다. 앞으로 메쉬의 복사본 다수개를 임베딩하겠는데, 이 때 손님 그래프는 각 메쉬를 연결요소로 가지는 그래프로 간주한다. 이제 다음 소정리를 증명한다.

소정리 1. 메쉬 $T(N,M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1, M > 1$). 그러면 메쉬 $T(N,4^i M)$ 의 복사본 h 개는 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_{p+2i} 에 임베딩된다 ($i \geq 0$).

증명. 정수 i 에 관한 수학적 귀납법으로 증명한다. 기본 단계(Basis Step)로서 본 소정리가 $i=0$ 일 때 성립함을 쉽게 보일 수 있다. 귀납 단계 (Inductive Step)로서 본 소정리가 $i=j$ 일 때 성립한다고 가정하고 $i=j+1$ 일 때 성립함을 보인다. 메쉬 $T(N,M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1, M > 1$). 그러면 가정에 의해 메쉬 $T(N,4^j M)$ 의 복사본 h 개는 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_{p+2j} 에 임베딩된다 ($i \geq 0$). 이 때 메쉬 $T(N,4^j M)$ 의 복사본 h 개중 하나를 T_j 라 하자. 메쉬 T_j 의 네 개의 복사본을 만들어 $T_j^0, T_j^1, T_j^2, T_j^3$ 라 하자. 이들에 에지를 추가하여 그림 7과 같이 메쉬 T_{j+1} 을 형성한다. 메쉬 T_{j+1} 은 $T(N,4^{j+1}M)$ 와 동형이다. 그 추가된 에지들은 그림 7에서 곡선으로 보인다.

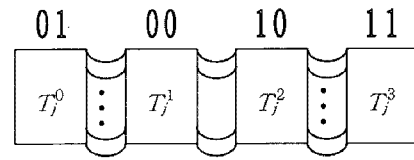


그림 7 메쉬 T_{j+1} 의 큐브 $Q_{p+2(j+1)}$ 에 대한 임베딩

가정에 의해 메쉬 T_j 의 각 노드는 길이 $p+2j$ 의 큐브 노드 주소를 가지고 있다. 길이 $p+2j$ 인 큐브 노드 주소의 앞에 두 비트씩 덧붙이되 메쉬 T_j^0 의 노드들에는 모두 01을 덧붙인다. 또한 메쉬 T_j^1, T_j^2, T_j^3 의 노드들에는 각각 00, 10, 11을 덧붙인다. 그러면 메쉬 T_{j+1} 의 각 노드들은 서로 다른 새로운 큐브 노드 주소를 갖게 되는데 이 큐브 노드 주소는 길이가 $p+2j+2$ 이다. 이 주소대로 T_{j+1} 을 큐브 $Q_{p+2(j+1)}$ 에 임베딩하면 조건 3.1을 만족한다. 왜냐하면 맨 왼쪽 노드의 첫 두 비트 01과 맨 오른쪽 노드의 첫 두비트 11은 서로 쌍관계이기 때문이다. 첫 두비트를 제외한 나머지 비트들에 대해서 맨 왼쪽 노드와 맨 오른쪽 노드가 서로 쌍관계임은 가정에 의해서 명확하다. 또한 메쉬 T_{j+1} 에서 인접한 노드들은 인접한 큐브 노드들에 대응함도 쉽게 확인해 볼 수 있다.

메쉬 $T(N,4^j M)$ 의 복사본 h 개 중 T_j 를 제외한 나머지 메쉬들에 대해서도 그림 7과 같은 방법으로 열의 개수가 네 배인 메쉬를 큐브 Q_{p+2j+2} 에 임베딩할 수 있다. 그러면 열의 개수가 네 배인 메쉬는 각각 조건 3.1을 만족한다.

이제 메쉬 $T(N,4^{j+1}M)$ 의 복사본 h 개가 노드 중복 없이 임베딩되었음을 보이기만 하면 증명이 끝난다. 두 노드가 같은 메쉬 $T(N,4^{j+1}M)$ 에 속할 경우 그들이 서로 다른 큐브 노드에 대응함은 그림 7로부터 명확하다. 두 노드가 다른 메쉬에 속할 경우 그들이 대응하는 큐브 노드의 마지막 $(p+2j)$ 비트는 반드시 다르다. 왜냐하면 마지막 $(p+2j)$ 비트는 메쉬 $T(N,4^j M)$ 의 복사본 h 개를 임베딩할 때 사용한 주소와 같기 때문이다. □

위 소정리에서는 메쉬 $T(N,M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩되면 열의 개수가 네 배인 메쉬들을 같은 확장율로 임베딩할 수 있음을 보였다. 이제 열의 개수가 두 배인 메쉬들을 같은 확장율로 임베딩할 수 있음을 보이겠다.

소정리 2. 메쉬 $T(N, M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1, M > 1$). 그러면 메쉬 $T(N, 2 \cdot 4^i M)$ 의 복사본 h 개가 큐브 Q_{p+2i+1} 에 임베딩된다 ($i \geq 0$).

증명. 메쉬 $T(N, M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1, M > 1$). 그러면 소정리 1에 의해서 메쉬 $T(N, 4^i M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_{p+2i} 에 임베딩된다 ($i \geq 0$). 메쉬 $T(N, 4^i M)$ 의 복사본 h 개 중 하나를 T_i 라 하자. 메쉬 T_i 의 복사본을 두 개 만들어 T_i^0 와 T_i^1 라 한 후 에지들을 추가하여 연결함으로써 메쉬 $T(N, 2 \cdot 4^i M)$ 를 형성한다. 가정에 의해 복사본들의 노드들은 각각 길이가 $p+2i$ 인 큐브 노드 주소를 가지고 있다. 길이 $p+2i$ 인 큐브 노드 주소의 앞에 한 비트씩 덧붙이되 복사본 T_i^0 의 노드들에는 모두 0을 복사본 T_i^1 의 노드들에는 모두 1을 붙인다. 그러면 메쉬 $T(N, 2 \cdot 4^i M)$ 의 각 노드들은 서로 다른 새로운 큐브 노드 주소를 갖게 되는데 이 큐브 노드 주소의 길이는 $p+2i+1$ 이다. 이 주소대로 큐브 Q_{p+2i+1} 에 임베딩하면 메쉬 $T(N, 2 \cdot 4^i M)$ 에서 인접한 노드들은 인접한 큐브 노드들에 대응한다.

메쉬 $T(N, 4^i M)$ 의 복사본 h 개중 T_i 를 제외한 나머지 메쉬들에 대해서도 같은 방법으로 열의 개수가 두 배인 메쉬의 복사본 h 개를 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_{p+2i+1} 에 임베딩할 수 있다. 메쉬 $T(N, 2 \cdot 4^i M)$ 의 복사본 h 개가 노드 중복 없이 임베딩되었음도 쉽게 확인할 수 있다. □

소정리 1과 소정리 2로부터 다음과 같은 정리를 얻을 수 있다.

정리 1. 메쉬 $T(N, M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩된다고 하자 ($N \geq 1, M > 1$). 그러면 메쉬 $T(N, 2^q M)$ 의 복사본 h 개는 큐브 Q_{p+q} 에 임베딩된다 ($q \geq 0$).

이 절에서는 메쉬의 복사본 다수개를 교차큐브에 임베딩하는 재귀적인 방법을 제시했다. 메쉬 $T(N, M)$ 의 복사본 h 개가 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_p 에 임베딩되면 메쉬 $T(N, 2^q M)$ 의 복사본 h 개는 큐브 Q_{p+q} 에 임베딩된다.

4. 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개의 큐브 Q_{2n+m-1} 에 대한 임베딩

이 절에서는 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개가 큐브 Q_{2n+m-1} 에 임베딩될 수 있음을 보인다 ($n \geq 1, m \geq 3$). 먼저 임베딩을 간편하게 설명하기 위해 필요한 함수들을 정의한다. 함수 $b_n(i, j)$ 과 $g_n(i, j)$ 는 각각 정수 i 를 n 비트의 이진수와 그레이 코드 표현했을 때 j 번째 등장하는 비트이다 ($j < n$). 단 $i \geq 2^n$ 일 경우엔 i 를 이진수나 그레이 코드로 표현하여 마지막 n 비트만 취한다. 표 1에 비트 함수 b_n 과 g_n 의 예가 나타나 있다. 또 다른 함수 $r_n(i, i')$ 는 i 와 i' 를 n 비트 이진수로 표현했을 때 서로 다른 첫 비트의 위치이다. 예를 들어 3과 4를 네 비트의 이진수로 표현하면 0011과 0100이므로 서로 다른 제일 첫 비트의 위치는 1이다. 따라서 $r_4(3, 4) = 1$ 이다. $r_n(i, i')$ 은 i 와 i' 를 n 비트 그레이 코드로 표현했을 때 서로 다른 첫 비트의 위치이기도 하다.

표 1 비트 함수 b_3 과 g_3

	$b_3(i,0)$	$b_3(i,1)$	$b_3(i,2)$	$g_3(i,0)$	$g_3(i,1)$	$g_3(i,2)$
$i=0$	0	0	0	0	0	0
$i=1$	0	0	1	0	0	1
$i=2$	0	1	0	0	1	1
$i=3$	0	1	1	0	1	0
$i=4$	1	0	0	1	1	0
$i=5$	1	0	1	1	1	1
$i=6$	1	1	0	1	0	1
$i=7$	1	1	1	1	0	0

i 와 $i+1$ 의 이진수 표현을 비교해 보면 $r_n(i, i')$ 번째 비트 이후에 등장하는 비트들은 모두 다르다. 따라서 $b_n(i, k) \neq b_n(i', k)$, $k > r_n(i, i')$, $i' = i+1$ 이다. 한편 i 와 $i+1$ 의 그레이 코드 표현을 비교해 보면 $r_n(i, i')$ 번째 비트 이후에 등장하는 비트들은 모두 같다. 따라서 $g_n(i, k) = g_n(i', k)$, $k > r_n(i, i')$, $i' = i+1$ 이다.

메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개를 큐브 Q_{2n+m-1} 에 임베딩함에 있어 먼저 열의 개수가 8인 메쉬들을 임베딩한 후 정리 1을 이용하여 열의 개수가 2^m 인 메쉬들로 확장한다. 메쉬 $T(2^n, 8)$ 의 복사본 2^{n-1} 개를 큐브 Q_{2n+2} 에 임베딩하는 함수 $f_n(x, i, j, k)$ 은 x 번째 메쉬의

노드 (i, j) 가 대응하는 큐브 노드의 k 번째 비트이다. 따라서 f_n 은 다음과 같다.

$$f_n : \{x | 0 \leq x < 2^{n-1}\} \times \{i | 0 \leq i < 2^n\} \times \{j | 0 \leq j < 8\} \times \{k | 0 \leq k < 2n+2\} \rightarrow \{0,1\}$$

그림 5로부터 1 개의 메쉬 $T(2,8)$ 을 큐브 Q_4 에 임베딩하는 함수 f_1 을 얻을 수 있다. 표 2는 함수 f_1 을 나타내는데 0 열과 1 열의 처음 세 비트만 표시하였고 나머지는 생략하였다.

표 3에 함수 $f_n, n \geq 2$, 이 머리와 꼬리에 대해서 따로 정의되어 있다. 노드 (i, j) 가 메쉬의 상반부에 속할 경우 머리는 그림 5의 위쪽 행과 같다. 따라서 머리에 속하는 비트들에 대해서 $f_n(x, i, j, k) = f_1(0, 0, j, k), 0 \leq i < 2^{n-1}$, 이다. 노드 (i, j) 가 메쉬의 하반부에 속할 경우에 머리는 그림 5의 아래쪽 행과 같다. 따라서 머리에 속하는 비트들에 대해서 $f_n(x, i, j, k) = f_1(0, 1, j, k), 2^{n-1} \leq i < 2^n$, 이다.

꼬리는 홀수 번째 비트들과 짝수 번째 비트들로 나누어서 정의한다. k 가 홀수일 경우엔 x 를 $(n-1)$ 비트의 이진수로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터 얻어진다. 따라서 꼬리에 속하는 홀수 번째 비트들에 대해서 $f_n(x, i, j, k) = b_{n-1}(x, k'), k' = \lfloor (k-4)/2 \rfloor$, 이다. 앞으로 $\lfloor (k-4)/2 \rfloor$ 을 간단히 k' 이라 한다.

꼬리에 속하는 짝수 번째 비트들에 대해서는 바로 다음 비트가 0인 경우와 1인 경우로 나누어서 정의한다. 다음 비트 $f_n(x, i, j, k+1)$ 이 0인 경우에는 i 를 $(n-1)$ 비트 그레이 코드로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터

얻어진다. 따라서 $f_n(x, i, j, k) = g_{n-1}(i, k')$ 이다. 다음 비트 $f_n(x, i, j, k+1)$ 이 1인 경우에는 짝수 열과 홀수 열이 서로 보수가 되게 정의한다. 짝수 열은 i 를 $(n-1)$ 비트 이진수로 표현했을 때 등장하는 비트들로부터 얻어진다. 따라서 $f_n(x, i, j, k) = b_{n-1}(i, k')$ 이다. 홀수 열은 짝수 열의 해당 비트의 보수이다. 표 3에 함수 $f_n, n \geq 2$, 이 정의되어 있다.

표 4와 표 5에는 각각 0번째와 3번째 메쉬 $T(8,8)$ 를 큐브 Q_8 에 임베딩하는 함수 f_3 이 나타나 있다. 첫 두 비트는 각 열의 위쪽에 따로 표시하였다. 예를 들어 0열과 1열의 첫 두 비트는 모두 01이고 2열과 3열의 첫 두 비트는 모두 00이다. 표 4와 표 5에서 위쪽 네 행에 대해서 머리는 그림 5의 위 행과 같고 아래쪽 네 행에 대해서 머리는 그림 5의 아래 행과 같다. 또한 표 4에서 $f_3(0, i, j, 5)$ 와 $f_3(0, i, j, 7)$ 은 0의 이진수 표현 00으로부터 얻어지고 표 5에서 $f_3(3, i, j, 5)$ 와 $f_3(3, i, j, 7)$ 은 3의 이진수 표현 11로부터 얻어짐을 볼 수 있다. 표 4에서 $f_3(0, i, j, 4)$ 와 $f_3(0, i, j, 6)$ 은 i 를 그레이 코드로 표현했을 때 등장하는 마지막 2 비트들로부터 얻어진다. 따라서 주어진 행에 대해서 마지막 네 비트가 모두 같다. 표 5의 짝수 열에 대해서 $f_3(3, i, j, 4)$ 와 $f_3(3, i, j, 6)$ 은 정수 i 를 이진수로 표현했을 때 등장하는 마지막 2 비트들로부터 얻어진다. 표 5의 홀수 열에 대해서 $f_3(3, i, j', 4)$ 와 $f_3(3, i, j', 6)$ 은 짝수 열의 해당 비트의 보수이다. 따라서 표 5에서 주어진 행에 대해서 짝수 열의 마지막 네 비트가 모두 같고 홀수 열의 마지막 네 비트가 모두 같다.

표 2 함수 f_1

$f_1(0,0,0,0)$ = 0	$f_1(0,0,0,1)$ = 1	$f_1(0,0,0,2)$ = 0	$f_1(0,0,1,0)$ = 0	$f_1(0,0,1,1)$ = 1	$f_1(0,0,1,2)$ = 0
$f_1(0,1,0,0)$ = 0	$f_1(0,1,0,1)$ = 1	$f_1(0,1,0,2)$ = 1	$f_1(0,1,1,0)$ = 0	$f_1(0,1,1,1)$ = 1	$f_1(0,1,1,2)$ = 1

표 3 $f_n(x, i, j, k), n \geq 2, k' = \lfloor (k-4)/2 \rfloor$

		4 ≤ k < 2n+2 (꼬리)			
	0 ≤ k < 4 (머리)	짝수 k		홀수 k	
		$f_n(x, i, j, k+1) = 0$	$f_n(x, i, j, k+1) = 1$		
			짝수 j	홀수 j	
$i < 2^{n-1}$	$f_1(0,0, j, k)$	$g_{n-1}(i, k')$	$b_{n-1}(i, k')$	$b_{n-1}(i, k')$	$b_{n-1}(x, k')$
$i \geq 2^{n-1}$	$f_1(0,1, j, k)$				

표 4 0번째 메쉬 $T(8,8)$ 의 큐브 Q_8 에 대한 임베딩 f_3

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
	01		00		10		11	
$i=0$	010000	000000	000000	010000	110000	100000	100000	110000
$i=1$	010010	000010	000010	010010	110010	100010	100010	110010
$i=2$	011010	001010	001010	011010	111010	101010	101010	111010
$i=3$	011000	001000	001000	011000	111000	101000	101000	111000
$i=4$	111000	101000	101000	111000	011000	001000	001000	011000
$i=5$	111010	101010	101010	111010	011010	001010	001010	011010
$i=6$	110010	100010	100010	110010	010010	000010	000010	010010
$i=7$	110000	100000	100000	110000	010000	000000	000000	010000

표 5 3번째 메쉬 $T(8,8)$ 의 큐브 Q_8 에 대한 임베딩 f_3

	$j=0$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
	01		00		10		11	
$i=0$	010101	001111	000101	011111	110101	101111	100101	111111
$i=1$	010111	001101	000111	011101	110111	101101	100111	111101
$i=2$	011101	000111	001101	010111	111101	100111	101101	110111
$i=3$	011111	000101	001111	010101	111111	100101	101111	110101
$i=4$	110101	101111	100101	111111	010101	001111	000101	011111
$i=5$	110111	101101	100111	111101	010111	001101	000111	011101
$i=6$	111101	100111	101101	110111	011101	000111	001101	010111
$i=7$	111111	100101	101111	110101	011111	000101	001111	010101

함수 f_n 을 이용하여 메쉬 $T(2^n, 8)$ 의 복사본 2^{n-1} 개를 큐브 Q_{2n+1} 에 임베딩하면 다음과 같은 성질들을 만족한다.

성질 1. 다른 메쉬에 속하는 임의의 두 노드는 반드시 다른 큐브 노드들에 대응한다.

증명. x 번째 메쉬의 노드에 대하여 꼬리에 속하는 홀수 번째 비트들은 x 의 이진수 표현으로부터 얻어진다. 따라서 만약 x 와 x' 가 다르면 x 번째 메쉬의 노드와 x' 번째 메쉬의 노드에 대하여 꼬리에 속하는 홀수 번째 비트들이 모두 같을 수는 없다. □

성질 2. 같은 메쉬에 속하는 임의의 두 노드에 대하여 꼬리에 속하는 홀수 번째 비트들이 서로 같다.

성질 3. 같은 메쉬에 속하는 서로 다른 두 노드는 반드시 다른 큐브 노드들에 대응한다.

증명. $n=1$ 일 경우에 본 성질이 성립함은 그림 5로부터 쉽게 알 수 있다. $n \geq 2$ 일 경우에 x 번째 메쉬에 속하는 서로 다른 두 노드 (i, j) 와 (i', j') 이 같은 큐브

노드에 대응한다고 해보자. 그러면 모든 k 에 대해서 $f_n(x, i, j, k) = f_n(x', i', j', k)$ 이다. 머리가 같다는 것은 두 노드 (i, j) 와 (i', j') 이 같은 열에 속하면서, $j = j'$, 모두 상반부에 속하거나 모두 하반부에 속함을 의미한다. 그러나 같은 열의 상반부(하반부)에 속하는 서로 다른 두 노드는 같은 큐브 노드에 대응할 수 없다. 왜냐하면 $i \neq i'$ 이면 꼬리에 속하는 짝수 번째 비트들이 모두 같을 수가 없기 때문이다. □

성질 4. 같은 행에서 인접한 두 노드에 대하여 꼬리들은 서로 쌍관계이다.

증명. 같은 행에서 인접한 두 노드에 대하여 꼬리에 속하는 홀수 k 번째 비트들이 같은데 홀수 k 번째 비트들이 1이면 바로 전 $(k-1)$ 번째 비트가 다르고 0이면 바로 전 $(k-1)$ 번째 비트가 같기 때문이다. □

성질 5. 두 노드 (i, j) 와 (i', j') 가 같은 행에서 인접한다고 하자 $(i+1=i')$. 그러면 두 노드 (i, j) 와 (i', j') 가 대응하는 큐브 노드들은 j 가 짝수일 경우엔 3-차

원 에지로 인접하고 j 가 홀수일 경우엔 0-차원이나 1-차원 에지로 인접한다.

증명. $n=1$ 일 경우엔 그림 5로부터 본 성질이 성립함을 알 수 있다. $n \geq 2$ 일 경우에 두 노드 (i, j) 와 (i', j') 가 대응하는 큐브 노드들의 주소를 비교해 보면 머리는 그림 5의 f_1 과 같고 꼬리는 성질 4에 의해 서로 쌍관계이다. 따라서 j 가 짝수일 경우엔 3-차원 에지로 인접하고 j 가 홀수일 경우엔 0-차원이나 1-차원 에지로 인접한다. \square

성질 6. 같은 열에서 인접한 두 노드 (i, j) 와 (i', j) 가 대응하는 큐브 노드들은 $(2 \cdot r_n(i, i') + 2)$ -차원 에지로 인접한다($i+1=i'$).

증명. 두 노드 (i, j) 와 (i', j) 가 대응하는 큐브 노드를 각각 u 와 v 라고 하자. 두 노드 (i, j) 와 (i', j) 중 하나는 상반부에 속하고 나머지 하나는 하반부에 속한다고 해보자. 그러면 $i=2^{n-1}-1$ 이고 $i'=2^{n-1}$ 이다. 그러면 u 와 v 의 꼬리는 서로 쌍관계이다. 왜냐하면 꼬리에 속하는 홀수 k 번째 비트들이 같은데 홀수 k 번째 비트들이 1이면 바로 전 $(k-1)$ 번째 비트가 다르고 0이면 바로 전 $(k-1)$ 번째 비트가 같기 때문이다. 노드 u 와 v 의 머리를 살펴보면 u 와 v 는 2-차원 에지로 인접함을 알 수 있다. 그리고 $2 \cdot r_n(i, i') + 2 = 2$ 이다.

두 노드 (i, j) 와 (i', j) 가 모두 상반부에 속하거나 하반부에 속한다고 해보자. 그러면 두 노드 u 와 v 의 머리는 같다. 더구나 $(2 \cdot r_n(i, i') + 2)$ 번째 비트를 제외하고 모든 $k < (2 \cdot r_n(i, i') + 4)$ 에 대해서 u 와 v 는 k 번째 비트가 같다. 나머지 비트들에 대해서 u 와 v 는 서로 쌍관계다. 왜냐하면 $k \geq (2 \cdot r_n(i, i') + 4)$ 일 경우 홀수 k 번째 비트들이 같은데 홀수 번째 비트들이 1이면 바로 전 비트가 다르고 0이면 바로 전 비트가 같기 때문이다. 따라서 u 와 v 는 $(2 \cdot r_n(i, i') + 2)$ -차원 에지로 인접한다. \square

성질 7. 메쉬의 임의의 행 i , $0 \leq i < 2^n$ 에 대해서 노드 $(i, 0)$ 와 $(i, 7)$ 이 대응하는 큐브 노드들은 서로 쌍관계이다.

증명. $n=1$ 일 경우에 본 성질이 성립함은 그림 5로부터 쉽게 알 수 있다. $n \geq 2$ 일 경우 노드 $(i, 0)$ 와 $(i, 7)$ 이 대응하는 큐브 노드들의 머리들은 f_1 과 같으므로 서로 쌍관계이다. 큐브 노드들의 꼬리들도 서로 쌍관계이다. 왜냐하면 꼬리에 속하는 홀수 k 번째 비트들이 같은데 홀수 k 번째 비트들이 1이면 바로 전 $(k-1)$ 번

째 비트가 다르고 0이면 바로 전 $(k-1)$ 번째 비트가 같기 때문이다. 따라서 본 성질이 성립한다. \square \square

위 성질들로부터 다음과 같은 소정리를 얻을 수 있다.

소정리 2. 메쉬 $T(2^n, 8)$ 의 복사본 2^{n-1} 개는 각각 조건 3.1을 만족하면서 큐브 Q_{2n+2} 에 임베딩될 수 있다($n \geq 1$).

소정리 2와 정리 1에 의해서 메쉬 $T(2^n, 8 \cdot 2^q)$ 의 복사본 2^{n-1} 개는 큐브 $Q_{(2n+2)+q}$ 에 임베딩될 수 있다($n \geq 1, q \geq 0$). 여기서 q 를 $m-3$ 으로 치환하면 다음과 같은 정리 2를 얻을 수 있다.

정리 2. 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개는 큐브 Q_{2n+m-1} 에 임베딩될 수 있다($n \geq 1, m \geq 3$).

정리 2로부터 다음과 같은 따름정리들을 얻을 수 있다.

따름정리 1. 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개는 교차 큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있다($n \geq 1, m \geq 3$).

따름정리 2. 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 는 교차큐브에 연장을 1, 확장을 2^{n-1} 로 임베딩될 수 있다($n \geq 1, m \geq 3$).

따름정리 3. 메쉬 $T(4, 2^m)$ 의 복사본 두 개는 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있다($m \geq 3$).

따름정리 4. 메쉬 $T(8, 2^m)$ 의 복사본 네 개는 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩될 수 있다($m \geq 3$).

따름정리 1과 따름정리 2와 따름정리 3은 이미 알려져 있다[8,21,22].

5. 결론

이 논문에서는 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{n-1} 개를 노드 중복 없이 교차큐브에 연장을 1, 확장을 1로 임베딩할 수 있음을 보였다. 이 연구 결과는 연장과 확장을 이라는 주요 임베딩 측정 척도에서 최적이다. 또한 이 연구 결과는 메쉬 구조를 가지는 다수 개의 작업을 교차큐브 구조를 가지는 병렬 컴퓨터에 할당하는데 효과적으로 활용될 수 있다. 한편, 교차큐브와 같이 하이퍼 큐브 변형에 속하는 뫼비우스 큐브(Möbius cube)나 꼬인 큐브(Twisted cube)에 대해서도 같은 결과를 얻을 수 있는지는 향후 연구 과제이다. 메쉬 $T(4, 2^m)$ 의 복사본 두 개가 0-타입 뫼비우스 큐브에 혹은 짝수 $m' \geq 2$ 에 대하여, 메쉬 $T(4, 2^{m'})$ 의 복사본 두 개가 꼬인 큐브에 노드 중복 없이 연장을 1, 확장을 1로 임베딩

될 수 있음은 알려져 있다[9,23]. 그러나 메쉬 $T(2^n, 2^m)$ 의 복사본 2^{m-1} 개를 노드 중복 없이 피비우스 큐브나 꼬인 큐브에 연장율 1, 확장율 1로 임베딩할 수 있는지는 알려져 있지 않다.

참 고 문 헌

- [1] B. Monien and H. Sudborough, "Embedding one interconnection network in another," pp.257-282, Springer-Verlag/Wien, 1990. Computing Supplementum 7: Computational Graph Theory.
- [2] A. Rosenberg, "Issues in the study of graph embeddings," *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, New York, vol.100, pp.150-176, 1981.
- [3] F. Berman and L. Snyder, "On mapping parallel algorithms into parallel architectures," *J. Parallel Distrib. Comput.*, vol.4, pp.439-458, 1987.
- [4] V. Chaudhary and J.K. Aggarwal, "Generalized mapping of parallel algorithms onto parallel architectures," *Proc. Int'l Conf. Parallel Processing*, pp.137-141, Aug. 1990.
- [5] S.L. Bezrukov, J.D. Chavez, L.H. Harper M. Röttger, and U.-P. Schroeder, "The congestion of n-cube layout on a rectangular grid," *Discrete Math.*, vol.213, no.1-3, pp.13-19, Feb. 2000.
- [6] A. Matsubayashi, "VLSI layout of trees into grids of minimum width," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol.E87-A, no.5, pp.1059-1069, May 2004.
- [7] A. Patel, A. Kusalik, and C. McCrosky, "Area-efficient VLSI layouts for binary hypercubes," *IEEE Trans. Computers*, vol.49, no.2, pp. 160-169, Feb. 2000.
- [8] Q. Dong, X. Yang, J. Zhao and Y.Y. Tang, "Embedding a family of disjoint 3D meshes into a crossed cube," *Information Sciences*, vol.178, Issue 11, pp.2396-2405, June 2008.
- [9] C.-J. Lai and C.-H. Tsai, "Embedding a family of meshes into twisted cubes," *Information Processing Letters*, In Press, Accepted Manuscript, Available online 29, June, 2008.
- [10] C.-P. Chang, T.-Y. Sung, and L.-H. Hsu, "Edge congestion and topological properties of crossed cubes," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol.11, no.1, pp.64-80, Jan. 2000.
- [11] K. Efe, "A variation on the hypercube with lower diameter," *IEEE Trans. Computers*, vol.40, no.11, pp.1312-1316, Nov. 1991.
- [12] K. Efe, "The crossed cube architecture for parallel computing," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol.3, no.5, pp.513-524, Sept.-Oct. 1992.
- [13] K. Efe, P.K. Blachwell, W. Slough, and T. Shiau, "Topological properties of the crossed cube architecture," *Parallel Computing*, vol.20, pp.1763-1775, 1994.
- [14] J. Fan, "Diagnosability of crossed cubes under the comparison diagnosis model," *IEEE Trans. Parallel and Distributed Systems*, vol.13, no.10, pp.1099-1104, Oct. 2002.
- [15] J. Fan, and X. Jia, "Edge-pancyclicity and path-embeddability of bijective connection graphs," *Information Sciences*, vol.178, Issue 2, pp. 340-351, Jan. 2008.
- [16] J. Fan and X. Lin, "The t=k-diagnosability of the BC graphs," *IEEE Trans. Computers*, vol.53, no. 2, pp.176-184, Feb. 2005.
- [17] P. Kulasinghe, "Connectivity of the crossed cube," *Information Processing Letters*, vol.61, pp.221-226, Jul. 1997.
- [18] W.-T. Huang, Y.-C. Chuang, J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "On the fault-tolerant hamiltonicity of faulty crossed cubes," *IEICE Trans. Fundamentals*, vol. E85-A, no.6, pp.1359-1370, Jun. 2002.
- [19] M.-C. Yang, T.-K. Li, J.J.M. Tan, and L.-H. Hsu, "Fault-tolerant cycle-embedding of crossed cubes," *Information Processing Letters*, vol.88, Issue 4, pp. 149-154, Nov. 2003.
- [20] P. Kulasinghe and S. Bettayeb, "Embedding binary trees into crossed cubes," *IEEE Trans. Computers*, vol.44, no.7, pp.923-929, Jul. 1995.
- [21] J. Fan, and X. Jia, "Embedding meshes into crossed cubes," *Information Sciences*, vol.177, Issue 15, pp. 3151-3160, 2007.
- [22] 김숙연, "메쉬의 교차큐브에 대한 임베딩", *한국정보처리학회논문지A*, vol.15A, no.6, pp.301-308, 2008.
- [23] C.-H. Tsai, "Embedding of meshes in Möbius cubes," *Theoretical Computer Science*, Vol.401, Issues 1-3, pp.181-190, Jul. 2008.

김 숙 연

정보과학회논문지 : 시스템 및 이론
제 36 권 제 3 호 참조