대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 3 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.3, 513-526. Sep. 2009

구술형식을 이용한 확률의 독립사건의 개념 지도 방법

최 명 숙*

학교교육에서 확률의 독립사건의 정의 P(B | A) = P(B)가 직관적으로 설명할 수 없고 실생활과 다른 개념으로 잘 못 판단되어 질 수 있는 원인을 분석하고, 확률의 독립사건의 전형적인 문제와 정리들을 이용하여 실생활 개념과 정확하게 일치하고 직관적으로 설명 가능하다는 사실을 '구술형식'으로 논증한다. 확률과 통계 단원은 물리와 유사한 자연현상과 실생활에 더 밀접한 학문이므로 '수리식'을 보완한 '구술형식'의 보급은 불가피하다. 따라서 확률교육에서 오랜 기간 지속 되어 온 '수리식'을 보완하여 '수리식'이 갖는 의미를 직관적으로 쉽게 이해 가능한 새로운 개념 습득 방법인 '구술형식'으로 설명할 필요성과 가능성을 제시한다. 본 논문을 통하여 그 동안 학교교육이 확률의 독립사건 정의의 '수리식' 의미를 파악하지 못하여 확률교육의 맥이 막혀 있었다면 확률교육의 흐름에 새로운 지평을 여는 커다란 파급효과를 기대할 수 있다.

I. 서 론

1. 연구의 목적과 필요성

현대 사회는 과거나 현재의 정보를 가지고 미래를 정확히 예측해야 할 필요성이 대두 되고 있고, 우리의 확률교육도 여기에 맞추어 진행되어야 한다. 뉴올리언스의 태풍, 지진, 쓰나미, IMF의 금융위기 등 예기치 못한 사건의 발생을 미리 예견하고 대비하는 자세가 절실히 필요한 시대에, 이에 걸맞게 우리의 학교교육도 학생들이 교과서에서 배운 확률이론을 실생활에 적용하여 안전한 미래를 설계하고 행복하고 평화로운 삶을 살아 갈 수 있도록 해야한다.

확률의 독립사건 정의 P(B | A) = P(B)는 사건 A가 발생했다는 정보 아래 사건 B가 일어날 사후확률이 사건 B의 사전확률과 같으면 독립사건이 된다는 단순한 개념이다.

그러나 독립사건의 정의가 실제 무엇을 의미하는 지 파악하기 어려웠기 때문에 확률의 곱셈정리 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$에 의존하여 공식에 대입한 지나친 계산위주의 학교교육이 이루어지고 있다. 확률의 독립사건을 '수리식'으로 정의하고 수학적으로만 증명한다면 실제의 의미를 파악하지 못하는 모호성을 가질 수 있다. 그동안 학교교육에서 교사들이 독립사건의 정의가 추상적이어서 직관적으로 설명할 수 없는 문제가 있을 수 있다는 생각과 실생활 개념과 다르다고 잘못된 결론을 유도하여 가르치고 있는 경향이 있었다. 이에 독립사건에 대한 정확한 의미 분석을 위해 새로운 교수학적 방법으로 '수리식'을 보완하여 '구술형식'(verbal form)의 필요성과 가능성을 제시하고자 한다.

* 경일고등학교 교사, 고려대학교 대학원 (mathchoi@korea.ac.kr)

Mendenhall, Scheaffer, Wackerly (2002)는 '구술형식'을 다음과 같이 설명한다. "실제(reality)나 현상을 이론(theory)으로 표현할 때, 자연과학에서 실제에 대한 이론을 수리적 모형으로 표현하는 반면에, 사회과학에서는 계량화가 힘든 일부 분야 즉 수리적 표현이 어려운 분야에서 구술적으로 실제에 대한 이론을 표현하는 형식이다" 라고 정의하고 있다.

또 한 Mendenhall(2002)은 "확률과 통계학은 수학의 한분야로 간주하지 않고 실용적인 정보이론의 개발과 관련이 있는 학문의 한 영역으로 간주한다. 즉, 확률과 통계학을 물리학과 유사한 독립된 한 학문으로, 수학의 한 분야가 아니라 수학을 많이 이용하는 정보이론 학문으로 간주한다."라고 설명한다. 따라서 확률과 통계학은 물리학과 유사하여 자연현상과 실생활에 밀접하게 연관되어 있어서 확률교육에서 오랜 기간 지속되어 온 '수리식'을 보완한 '구술형식' 도입의 불가피성을 강조하고자 한다.

현행 고등학교 수학 I 교과서가 확률의 독립사건의 정의에 대한 충분한 기본 개념에 대한 설명 없이 바로 문제에 접근하여, 독립사건과 종속사건에 대한 정확한 의미 파악을 어렵게 하는 원인을 분석 한다. 독립사건의 기본 개념의 습득을 수학적 증명과 설명에만 의존하여 실제 생활에서 그 이상의 응용이 불가능한 상황이 발생하지 않도록 수학의 '수리식' 표현이 갖는 의미를 직관적이고 실제적으로 이해할 수 있는 '구술형식'으로 표현하여 실제 생활에 쉽게 적용 가능한 새로운 개념 습득 방법을 제시하고자 한다.

이에 본 논문에서는 확률의 곱셈정리에 의한 계산을 도입하기 이전에 독립사건의 정의에 대한 직관을 형성하기 위하여 다음 두 가지를 제시한다. 첫째는 통계적 확률 모형을 만들어 분석하고 통계적 자료에 따라 독립사건과 종속사건이 결정된다는 사실을 '구술형식'으로 서술한다. 둘째는 실생활 문제로 현실감 있게 독립사건의 정의의 본래 의미를 생생하게 체험하여 직관을 형성하기 위한 초석으로 독립사건의 정의를 '구술형식'으로 서술한다. 또 한 확률의 독립사건은 중요한 이론임에도 불구하고 간과해온 정확한 근원적인 본질을 연구하였으며, 직관적으로 설명하기 어렵고 정의와 개념이 갈등을 일으킨다고 잘못 생각하게 하는 독립사건의 전형적인 문제와 정리들을 이용하여 독립사건의 정의가 실생활의 개념과 정확하게 일치하고 직관적으로 설명할 수 있다는 사실을 '구술형식'을 도입하여 논증한다.

II. 본 론

1. 연구의 배경

이용구(2005)는 "두 사건이 서로 독립이라는 조건은 직관적으로 설명할 수 없으며 단지 $P(B|A)=P(B)$와 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ 중 어느 하나를 만족하는가를 조사하여 독립성을 증명하므로, 즉 두 사건 A, B가 왜 독립인가는 논리적으로 설명할 수 없으며, 단지 두 사건이 독립성의 조건을 만족하지 않으므로 두 사건은 독립이 아니다." 라고 틀린 설명을 한다. 이와 같은 설명은 확률의 독립사건의 정의와 확률의 곱셈정리의 '수리식'에 해당하는 공식에 의존하여 독립사건과 종속사건을 판단하므로 독립성의 개념에 맞지 않을 수 있는 문제가 있을 수 있다는 명백히 잘못된 설명이다.

유윤재(2009)는 "(문제) 하나의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나오는 사건 A와 5이상의 눈이 나오는 사건을 B라 할 때, 이 (문제)에서 독립성 개념을 직관적으로 설명하는 것은 원천적

으로 불가능하다. 그리고 논리-수학적 사건으로 분류하여, 형식적 사건으로 내용을 가지지 않는 무정의 용어에 지나지 않는다." 라고 틀린 설명을 한다. 이와 같이 많은 사람들이 확률의 독립사건의 개념을 정확하게 알지 못하고 있으며 직관적으로 설명하는 것이 원천적으로 불가능한 문제가 있을 수 있다고 잘못 된 설명을 하고 있다. 본 논문에서는 이와 같이 많은 사람들이 직관적으로 설명할 수 없다고 생각하는 확률의 독립사건의 개념을 직관적으로 설명할 수 있다는 것을 논증하기 위해 새로운 교수학적 방법으로 '구술형식'을 도입할 필요성과 가능성을 제시한다.

가. 현행 수학 I 교과서 분석

독립사건의 정의 P(B | A)= P(B)에서 P(B)는 사건 B의 사전확률(prior probability)이고, P(B | A)는 사건 A가 발생했다는 정보가 주어진 후에 사건 B의 사후확률(posterior probability)이라 한다. 사건 A와 사건 B는 반드시 원인과 결과일 필요도 없으며 시간 순서와도 관련이 없다. 오로지 사건 B의 사전확률과 사건 A가 발생한 후 사건 B의 사후확률이 변하지 않으면 독립사건이 되고, 변하면 종속사건이 되는데 사건 B의 사전확률과 사후확률의 변화하는 과정을 이해하기에는 교과서의 서술 방식으로는 불충분하다고 생각한다. 본 논문에서는 학교교육에서 교과서에 독립사건의 정의의 개념을 파악하기에는 충분하게 서술되어 있지 않아 독립사건의 정의가 실생활 개념에 맞지 않다고 생각 하게 된 원인을 분석하고 그 대안을 제시하고자 한다. 12종의 검인정 교과서는 대동소이하게 교과서의 전개방법과 내용이 유사하므로 교과서 중에서 한 예를 발췌하면 우정호(2007)가 지은 고등학교 수학 I 교과서에 나와 있는 '독립사건과 종속사건에 대한 내용을 설명하는 과정'을 살펴보면 다음과 같다.

……………… 교과서 내용 발췌 ………………

두 사건 A, B에 대하여 한 사건이 일어나거나 일어나지 않는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때 즉,

$P(B \mid A) = P(B \mid A^c) = P(B)$

$P(A \mid B) = P(A \mid B^c) = P(A)$

일 때, 사건 A, B는 서로 독립이라 하고, 서로 독립인 두 사건을 독립사건이라 한다.

따라서 두 사건 A, B가 서로 독립이면 곱셈정리에서

$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = P(A)P(B)$가 성립한다. 역으로 $P(A \cap B) = (A)P(B)$이면 두 사건 A, B는 서로 독립이다. 한편 두 사건이 서로 독립이 아닐 때, 두 사건은 서로 종속이라고 하며 종속인 두 사건을 종속사건이라고 한다. 두 사건 A, B가 서로 독립이기 위한 필요충분조건은 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$이다.

……………… 교과서 내용 발췌 ………………

위의 교과서에 기술한 독립사건의 정의의 전개 방식으로는 학생들이 독립사건의 정의를 정확하게 이해하기 어렵다는 생각이 든다. 또 한 교과서에 독립사건에 대한 충분한 개념 설명이 부족하고 개념의 본질이 잘 반영되어 있지 않아 학생들은 확률의 곱셈정리의 공식으로 기계적인 계산을 하여 독립사건과 종속사건을 판별한다. 그 동안 교사들은 독립사건의 정의가 추상적이어서 실생활 개념에 맞지 않을 수도 있고 직관적으로 설명할 수 없는 문제가 있을 수 있다는 잘못된 결론을 유도하여 독립사건의 정의와 개념을 설명하는 경향이 있었다. 이에 독립사건의 정의를 사전확률과 사후확률의 변화하는 과정을 직관적으로 정확하게 이해하도록 설명할 필요가 있다고 생각되어 학생들이 생생

한 느낌으로 직관적으로 이해할 수 있는 '구술형식'이라는 새로운 교수학적 방법을 도입하고자 한다.

나. 독립사건의 교과서 대표적 문제

(문제1) 우정호(2007). 정육면체 주사위 한 개를 던졌을 때, 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 소수의 눈이 나오는 사건을 B, 5 이상의 눈이 나오는 사건을 C 라 할 때, 서로 독립사건과 종속사건을 찾아라.

(풀이1) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$

$P(B) = \dfrac{1}{2}$ 이므로 $P(B \mid A) \neq P(B)$

그러므로 사건 A, B는 종속사건이다.

(풀이2) $P(A \cap C) = \dfrac{1}{6}$

$P(A)P(C) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}$

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

따라서 사건 A, C는 독립사건이다.

(문제1)에서는 수학적(mathematical)인 계산만으로 '짝수의 눈이 나오는 사건'과 '소수의 눈이 나오는 사건'과 '5 이상의 눈이 나오는 사건'은 사건들이 아무 관련이 없기 때문에 독립사건과 종속사건의 본래의 의미를 직관적이고 논리적으로 설명할 수 없고, 실생활 개념과 다를 수 있다고 잘못 생각되어 질 수 있다. 확률의 곱셈정리에 의한 수학적인 계산만으로 독립사건과 종속사건을 판단하고 있기 때문에 두 사건 사이의 관련성을 깨닫지 못하고 수학은 추상적이어서 실생활 개념과 다를 수 있다는 오해를 가져 오게 하고 있다.

그 원인으로 사건 A와 B에서 사건 A가 발생했다는 경험이 문제에 들어나 있지 않기 때문이다. 그러나 독립사건의 정의 P(B | A)= P(B)에 이미 경험이 포함되어 있는데 이것을 학생들은 인지하지 못할 수 있기 때문에 이와 같은 현상이 발생할 수 있다.

아래 (풀이3)에서 (문제1)을 사건B의 사전확률이 사건A가 발생했다는 사전정보에 따라 사후확률의 변화하는 과정을 정확히 직관적으로 생생하게 느낄 수 있는 '구술형식'으로 설명한다. 이로서 독립사건의 정의를 정확하고 논리적으로 이해할 수 있도록 '수리식'을 보완하기 위해 '구술형식'의 풀이과정이 필요함을 제시한다.

(풀이3) (문제1)을 구술형식으로 풀이

갑이 을에게 주사위 1개를 던졌다. 을이 갑에게 '짝수의 눈이 나왔다고' 사전정보(힌트)를 준 다음 갑에게 '소수의 눈이 나왔을까요?' 라고 물어 보았다. 짝수 2, 4, 6중 소수는 2 밖에 없으므로 갑이 정답을 맞출 확률은 1/3이고, 을이 사전정보(힌트)를 갑에게 주지 않고 갑에게 '소수의 눈이 나왔을까요? '라고 물으면 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 소수가 2, 3, 5 이므로 갑이 맞출 확률이 1/2이다. 을이 '짝수가 나왔다'고 말한 사전정보(힌트)가 갑이 '소수의 눈이 나왔다'고 정답을 맞출 확률이 작아지므로 '짝수의 눈이 나오는 사건'과 '소수의 눈이 나오는 사건'이 종속사건이 된다.

다음은 을이 갑에게 '짝수가 나왔다'는 사전정보(힌트)를 준 다음 갑에게 '5이상의 눈이 나왔을까요?' 라고 물으면 2, 4, 6 중에서 5이상이 6 밖에 없으므로 갑이 맞출 확률은 1/3이고, 을이 갑에게 '짝수가 나왔다'는 사전정보(힌트)를 주지 않고 '5이상의 눈이 나왔을까요?' 라고 물어도 1, 2, 3, 4, 5, 6 중 5이상의 눈이 5, 6 이므로 갑이 맞출 확률은 1/3이다. 을이 갑에게 '짝수가 나왔다'고 말한 사전정보(힌트)는 갑이 '5이상이 나왔다' 라고 정답을 맞출 확률을 변

화시키지 못하므로 '짝수의 눈이 나오는 사건'과 '5이상이 나오는 사건'은 독립사건이 된다.

(문제1)에서 사건 A의 사전정보(힌트)의 제공 유무에 따라 사건 B가 일어날 확률이 변하므로 종속사건이 되고, 사건A의 사전정보(힌트)의 제공 유무에 따라 사건 C가 일어날 확률이 변하지 않으므로 독립사건이 된다. 즉 사전확률과 다른 사건이 발생한 이후의 사후확률의 변화에 따라 독립사건과 종속사건이 결정이 되는 정의의 본래의 의미(original meaning)를 수학적인 증명만 했을 때 보다 '구술형식'으로 논증했을 때 학생들이 문제를 정확하고 직관적으로 이해할 수 있어 독립사건과 종속사건의 개념에 대한 이해도가 현저히 높아질 수 있다.

따라서 많은 사람들이 독립사건이 실생활의 개념과 일치하지 않을 수도 있고 직관적으로 설명할 수 없다고 잘못 생각하고 있는 (문제1)를 '구술형식'(verbal form)으로 논증함으로써 독립사건의 개념은 실생활 개념과 정확하게 일치한다는 사실을 직관적으로 설명할 수 있다.

2. 확률의 독립사건의 개념을 구술형식으로 분석

학교교육에서 확률의 곱셈정리에 의한 기계적인 계산을 하기 이전에 직관적이고 논리적으로 이해할 수 있는 대안으로 독립사건의 정의를 두 가지로 분석한다. 첫째는 통계적 확률모형을 만들어 분석하고 오로지 통계적 수치에 따라 독립사건과 종속사건이 결정된다는 사실을 인지하고 두 사건 사이의 관련성을 직관적 개념습득 방법인 '구술형식'으로 서술한다. 둘째는 실생활 문제로 현실감 있게 독립사건의 정의의 본래의 의미를 생생하게 체험할 수 있도록 독립사건의 정의를 직관적으로 이해할 수 있는 '구술형식'으로 설명하여 직관적인 초석을 마련해야 할 필요성이 있다.

가. 확률의 독립사건의 개념을 통계적 확률모형으로 분석

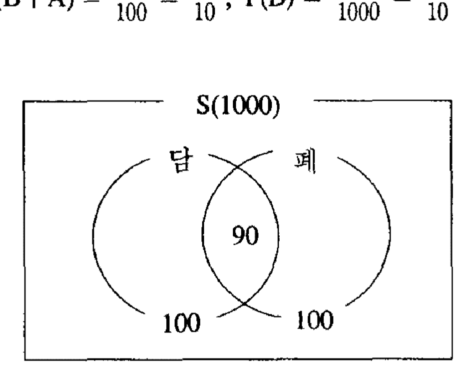
독립사건의 정의 $P(B \mid A)= P(B)$에서 $P(B)$는 사건 B의 사전확률이고 $P(B \mid A)$는 사건 A의 정보가 주어진 후의 사건 B의 사후확률이다. 여기서 사건 B의 사전확률과 사후확률이 같으면 독립사건이 된다. 이것은 사건 A에서 사건 B가 일어나는 비율과 전체에서 사건 B가 일어나는 비율이 같으면 독립사건이 된다는 것을 의미한다.

즉, $P(B \mid A)=P(B)$은 $\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{n(B)}{n(S)}$을 의미한다는 것을 더 구체적이고 직관적으로 이해하기 위해 실생활에 관련된 자료를 가지고 통계적 수치에 따라 독립사건과 종속사건으로 결정된다는 사실을 설명하기 위해 아래와 같은 통계적 확률모형을 만들어 '구술형식'으로 설명한다.

1) 확률의 종속사건 모형

총 1000명을 조사한 결과 담배 피운 사람이 100명, 폐암에 걸린 사람이 100명이고 담배도 피우고 폐암에 걸린 사람이 90명일 때, 담배 피운 사건 A와 폐암에 걸린 사건 B는 종속사건이다.

$$P(B \mid A) = \frac{90}{100} = \frac{9}{10},\ P(B) = \frac{100}{1000} = \frac{1}{10}$$



[그림 II-1] 담배와 폐암

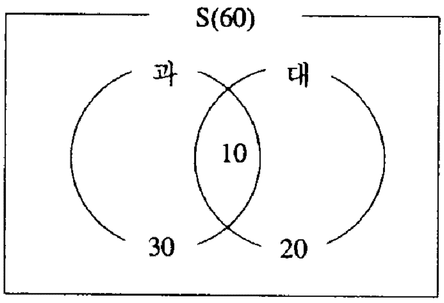
담배를 피운 사람 중 폐암에 걸린 사람의 비율과 전체에서 폐암에 걸린 사람의 비율이 다르므로 종속사건이다.

즉, 담배 피웠다는 사전정보의 제공 유무에 따라 폐암에 걸렸을 것이라고 진단할 확률이 변하기 때문에 '담배 피우는 사건'과 '폐암에 걸리는 사건'은 종속사건이다. 담배 피운 사람 중 폐암에 더 많이 걸렸으므로 담배 피웠다는 사전정보를 알면 의사가 더 쉽게 병에 걸렸다는 것을 진단할 수 있다. 따라서 의사가 병을 진단할 때, '담배를 피우십니까?', '술은 일주일에 몇 번 드십니까?' 라고 묻는 이유도 '담배와 술을 먹었다는 사건'은 '질병이 발생하는 사건'과 종속사건이므로 더 쉽게 병을 진단을 할 수 있기 때문이다. 그러나 담배와 폐암과의 관계는 통계적 자료의 수치에 따라 독립사건이 될 수도 있다.

2) 확률의 독립사건 모형

총 60명을 조사한 결과 과외를 받은 학생이 30명, 대학에 합격한 학생이 20명, 과외도 받고 대학에 합격한 학생이 10명이라고 할 때, 과외 받은 사건 A와 대학에 합격하는 사건 B는 독립사건이다.

$P(B \mid A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{20}{60} = \frac{1}{3}$



[그림 II-2] 과외와 대학합격

과외 받은 학생이 대학에 합격하는 수의 비율과 전체에서 대학에 합격하는 수의 비율이 같으므로 '과외 받았다는 사건'과 '대학에 합격하는 사건'은 독립사건이다.

담임선생님이 어떤 학생이 대학에 합격할 것인가 예측할 때, 과외를 받았다는 사전정보의 유무에 따라 대학에 합격할 확률이 변하지 않으므로 '과외 받은 사건'과 '대학에 합격하는 사건'은 독립사건이 된다. 담임선생님이 학생의 대학합격을 예측할 때, 그 동안의 학생의 성적을 관찰한 사전 정보를 가지고 합격을 예측한다. 그런데 사전정보가 어떤 사건을 예측하는데 도움이 되지 않는 정보가 있다. 이런 경우 두 사건은 독립사건이 된다.

3) 확률의 독립사건을 통계 수치로 분석

독립사건과 종속사건을 결정하는 두 사건은 반드시 원인과 결과일 필요도 없으며 시간적 순서와도 관련이 없다. 오로지 통계적 자료의 수치에 의해 결정된다는 사실을 이해해야 한다. 예를 들면 주머니에 녹색 사탕 15개와 보라색 사탕15개 중 허브 맛 녹색이 10개, 허브 맛 보라색이 5개, 포도 맛 보라색이 10개, 포도 맛 녹색이 5개가 들어 있다. 이 주머니에서 한 개를 꺼내어 눈을 감고 맛을 보니 허브 맛 이었다. 그래서 녹색이라고 답을 했다면 맛을 보기 전보다 녹색을 맞출 확률이 높아진다. '허브 맛이 나오는 사건'과 '녹색이 나오는 사건'은 종속사건이 된다. 허브맛과 녹색은 원인과 결과도 아니며 시간적 순서와도 관련이 없다. 오로지 허브 맛이면 녹색이 많다는 사실로 허브 맛을 본 다음 녹색이라는 사실을 맞출 확률이 높아진다. 따라서 통계적 확률 모형을 만들어 확률의 변화하는 과정으로 독립사건의 정의을 이해 할 수 있도록 '구술형식'으로 설명하여 직관적인 초석을 마련해야 한다.

나. 확률의 독립사건의 개념을 실생활로 분석

현실 상황의 문제에서 두 사건이 독립인지 종속인지 판단할 수 있어야 하며 확률이 변화되는 과정을 직관적으로 이해하도록 독립사건의 정의를 '구술형식'으로 설명할 필요가 있다. 따라서 실생활 문제로 접근하여 확률의 곱셈정리에 의한 계산을 도입하기 이전에 독립사건의 정의를 직관적으로 이해할 수 있는 현실감 있고 생생하게 느낄 수 있는 교수학적 방법으로 다음과 같이 '구술형식'의 개념 습득의 이해과정을 제시할 필요가 있다.

예를 들면 '우정의 무대'라는 텔레비전 프로그램에서 그리운 어머니를 찾을 때, 사회자가 군인에게 '무엇으로 자기 어머니라고 생각되었습니까?' 라고 질문했다. 군인이 '목소리를 듣고 알았다'고 대답했다. 목소리를 듣고 자기 어머니라고 확신이 되었다면 '어머니 목소리를 들은 사건'과 '자기 어머니가 나온다'는 사건은 종속사건이 된다.

또 하나의 예를 들면 미팅을 나가기 전 그녀는 예쁠까? 라는 궁금증에서 '미스코리아 출신이 나온다'는 사전정보가 주어지면 예쁠 것이라는 생각을 하게 되어 '예쁜 사람이 나온다'는 사실을 맞출 확률이 높아진다. '미스코리아가 나온다'는 사건과 '예쁜 사람이 나온다'는 사건은 종속사건이 된다.

독립시행을 예로 들면 농구 선수가 자유투를 2개 던지는데 '첫 번째 던진 공이 실패 하였다'는 사전정보는 두 번째 던진 공의 성공여부를 알아내는데 영향을 미치지 못한다. 따라서 자유투 던지는 시행은 독립시행이다. 그러나 첫 번째 던진 공이 실패했을 때, 관중이 선수가 심리적으로 흔들리는 모습을 발견했다면 심리적으로 흔들리는 사전정보(힌트)는 두 번째 자유투의 성공여부를 알아내는데 영향을 미친다. 따라서 '심리적으로 흔들리는 사건'과 '두 번째 자유투가 성공하는 사건'은 종속사건이 된다. 그러므로 어떤 사건을 설정하는가에 따라 독립사건과 종속사건으로 구분되기 때문에 자유투 던지는 것은 무조건 독립시행이라고 생각하면 안 된다. 그러므로 수학적 정의만으로 파악하기 어려운 독립사건의 개념을 실생활 문제로 설명하여 사건 A의 사전정보의 제공 유무에 따라 사건 B의 사전확률과 사후확률의 변화하는 과정을 학생들이 생생하게 느껴 독립사건과 종속사건을 확률의 곱셈정리에 의한 계산을 하기 이전에 충분히 직관적으로 개념 습득을 해야 하며 확률이론은 우리 실생활 속에 있다는 사실을 깨닫게 해야 한다.

Sheldon Ross (1988)는 (문제)에서 만일 A를 차기 대통령이 홍길동이 당선되는 사건이라 하고, B를 다음해에 큰 지진이 일어날 사건이라 하면, 대부분의 사람들은 기꺼이 A, B를 독립사건이라 생각할 것이다. 그러나 C를 선거후 2년 내 전쟁이 일어나는 사건이라 하면 A, C를 독립사건이라고 판단하는 것이 타당한지에 관한 논쟁이 있을 것이다.

이 문제를 '구술형식'으로 증명을 하면 홍길동이 대통령에 당선된다는 사전정보를 알고 있다고 하여도 다음해 지진이 일어날 확률이 변하지 않는다는 사실이 통념이므로 두 사건 A와 B는 독립사건이다. 그러나 홍길동이 대통령으로 당선된다는 사실이 2년 내 전쟁이 일어나는데 원인 제공을 하는지를 판단해야만 사건 A와 C가 독립사건인지 종속사건인지 알 수 있다. 이와 같이 '수리식'으로 증명하지 않아도 개념만 알고 있다면 독립사건인지 종속사건인지 직관적으로 파악할 수 있도록 '구술형식'으로 서술해야 한다.

3. 직관적으로 설명하기 어려운 확률의 독립사건의 전형적인 문제와 정리

다음은 독립사건과 종속사건을 직관적으로 설명하기 어렵다고 생각되어 지는 대표적인 문제와 정리를 직관적으로 설명 가능하다는 것을 논증하기 위하여 '구술형식'의 풀이과정을 제시하였다.

가. 직관적 설명으로 설명하기 어려운 확률의 독립사건의 대표적 문제

(문제2) 정육면체 주사위 1개를 2번 던졌다.

A : 첫 번째 시행에서 4의 눈 이 나오는 사건

B : 눈의 합이 6이 나오는 사건

(문제3) 정육면체 주사위 1개를 2번 던졌다.

A : 첫 번째 시행에서 4의 눈 이 나오는 사건

B : 눈의 합이 7이 나오는 사건

확률의 곱셈정리를 사용하여 수학적으로 기계적인 계산을 하면 (문제2)는 사건 A, B가 종속사건이고, (문제3)은 사건 A, B 가 독립사건이다. 그러나 첫 번째 시행에서 4의 눈이 나왔다는 사전정보를 제공 유무에 따라, 눈의 합이 6이 나올 확률이 변하여 종속사건이고, 눈의 합이 7이 나올 확률은 변하지 않아 독립사건이 된다는 것을 직관적으로 설명할 수 없다고 생각되어지는 확률의 독립사건의 전형적인 문제이다.

따라서 '구술형식'을 이용하여 다음과 같이 직관적으로 논증할 수 있다

(문제2)의 (구술형식 풀이)

첫 번째 시행에서 4의 눈이 나왔다는 사전정보(힌트)를 제공하면 눈의 합이 6이 나올 것이라는 사실을 예측하는데 조금 유리하다. 왜냐하면 첫 번째 주사위의 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 눈 중 6의 눈이 나왔다는 사전정보는 눈의 합이 6이 되는 것을 불가능하게 함으로써 6이 아닌 다른 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중의 어느 하나가 첫 번째 주사위에서 나왔다는 사전정보, 즉 첫 번째 시행에서 4가 나왔다는 사전정보는 눈의 합이 6이 라고 정답을 맞출 확률이 높아지는 결과를 초래하게 되므로 종속사건이다.

(문제3)의 (구술형식 풀이)

첫 번째 시행에서 4의 눈이 나왔다는 사전정보를 제공해도 눈의 합이 7이 나올 확률은 변하지 않는다. 왜냐하면 첫 번째 주사위가 1, 2, 3, 4, 5 ,6 중 어떤 눈이 나와도 눈의 합이 7이 나올 가능성은 똑 같으므로 첫 번째 시행에서 4의 눈이 나와 나왔다는 사전정보(힌트)가 눈의 합이 7이 라고 정답을 맞출 확률을 변화시키지 않는다. 따라서 특별한 사전정보가 되지 않으므로 독립사건이 된다.

(문제2)와 (문제3)을 '구술형식'으로 논증하면 독립사건과 종속사건의 본래의 의미(original meaning)와 정확하게 일치한다는 사실을 인식하여 수학적인 계산만 했을 때 보다 학생들의 이해도가 현저히 높아질 수 있고 직관적으로 설명할 수 있다는 사실을 알 수 있다.

나. 두 사건 설정에 따라 달라지는 확률의 독립사건

(문제4) 찌그러진 동전 1개를 2번를 던졌다. 이 동전의 앞면이 나올 확률이 1/3일 때,

A: 첫 번째 시행에서 앞면이 나오는 사건

B: 두 시행에서 같은 면이 나오는 사건

(문제4)의 (구술형식 풀이)

첫 번째 앞면이 나왔다는 사전정보가 주어질 때, 같은 면이 나오려면 두 번째 앞면이 반드시 나와야 하는 데 앞면이 뒷면보다 나오기 더 어려운 관계로 같은 면이 나올 확률이 아무 정보도 주어지지 않은 상태에서 같은 면이 나올 확률보다 줄어든다.

따라서 사건A와 B는 종속사건이다.

(문제5) 찌그러진 동전 1개를 2번 던졌다. 이 동전의 앞면이 나올 확률이 1/3일 때,

A: 첫 번째 시행에서 앞면이 나오는 사건

B: 두 번째 시행에서 뒷면이 나오는 사건

(문제5)의 (구술형식 풀이)

첫 번째 앞면이 나왔다는 사전정보가 주어져도 두 번째 뒷면이 나올 사후확률과 사전확률이 모두2/3로 변하지 않으므로 사건 A와 사건 B는 독립사건이다.

(문제4)와 (문제5)에서 동일한 시행에서도 어떤 사건을 설정하는가에 따라 독립사건과 종속사건이 결정된다는 사실을 '구술형식'을 통하여 직관적으로 설명할 수 있다.

(문제6) 주머니에 당첨제비 3개와 비 당첨제비 7개가 있을 때 갑과 을이 차례로 1개씩 비복원추출로 꺼낼 때,

A: 갑이 당첨되는 사건

B: 을이 당첨되는 사건

(문제6)의 (구술형식 풀이)

갑이 당첨되었다는 사실을 알았을 때 을이 당첨될 확률이 갑이 당첨되었다는 사실을 모를 때 을이 당첨될 확률과 다르므로 두 사건 A와 B는 종속사건이다.

(문제7) 주머니에 당첨제비 3개, 비 당첨제비 7개가 들어있다.

A: 갑이 을보다 먼저 1개를 꺼낸 사건

B: 을이 당첨되는 사건

두 사건 A와 사건 B는 독립사건이다.

(문제7)의 (구술형식 풀이)

갑이 을보다 먼저 1개를 꺼내 간 사실을 알 때 을이 당첨 될 확률이 갑이 을보다 먼저 1개를 꺼내 간 사실을 모를 때 을이 당첨될 확률과 같으므로 두 사건 A와 B는 독립사건이다.

따라서 (문제6)과 (문제7)에서는 복원추출과 비복원추출로 독립사건과 종속사건으로 결정되는 것이 아니라 어떤 사건을 설정하는 가에 따라 독립사건과 종속사건으로 결정된다는 사실을 알 수 있다.

이와 같이 독립사건의 정의의 정확한 이해와 분석으로 충분히 알기 쉽게 본질을 학생들이 직관적으로 습득할 수 있도록 '구술형식'(verbal form)의 풀이과정을 기술해야 하며 기본개념을 잘 이해했을 때만이 학생들이 무한한 응용력이 생긴다는 사실을 간과해서는 안 될 것이다.

다. 직관적으로 설명하기 어려운 확률의 독립사건의 대표적인 정리

수리식에 의한 수학적(mathematical)증명 만으로는 두 사건의 관련성을 찾지 못하여 독립사건의 정의가 실생활이나 일상어와 다르다고 잘못 생각할 수 있는 독립사건의 정리를 '구술형식'(verbal form)으로 설명한다.

(정리1) 공사건이 아닌 두 사건 A, B가 배반사건이면 A, B는 종속사건이다.

위 정리는 수학적(mathematical)으로 증명하면 성립한다. 그러나 공사건이 아닌 두 사건 A, B가 배반사건이면 강력한 종속사건이다. 그런데 '두 사건이 분리 되어 있으면 독립이다' 라는 오해를 하기도 하고 영향의 유무를 판단하는데 인지적 갈등을 유발 한다. 이런 오해를 극복할 수 있는 방법으로 '구술형식'으로 논증할 필요가 있다.

(예제1) 정육면체 주사위 1개를 던졌다. 짝수의 눈이 나오는 사건 A와 홀수의 눈이 나오는 사건 B라 할 때, 두 사건 A와 B는 독립사건인

가 종속사건인지 말하라.

배반 사건이므로 위의 (정리1)에 의하면 종속사건이 된다. 이것을 더욱 이해하기 쉽게 설명하기 위해 '구술형식'으로 논증한다.

(예제1)의 (구술형식 풀이)

갑이 을에게 주사위 하나를 던졌다. 을이 갑에게 짝수의 눈이 나왔다는 사전 정보를 알려주고, 을이 갑에게 '홀수의 눈이 나왔을까요?' 라고 질문하면 홀수의 눈이 나 올 수 없으므로 갑은 '아니다' 라고 정답을 말할 것이고, 짝수가 나왔다는 사전정보(힌트)를 제공했기 때문에 '홀수가 나오지 않았다'는 사실을 확실히 알 수 있으므로 사건 A, B는 종속사건이다. 즉 '짝수가 나왔다'는 사전 정보(힌트)의 제공 유무에 따라 '홀수가 나왔다'는 사실을 맞출 확률이 확실히 변하기 때문에 두 사건은 종속사건이다.

이와 같이 '구술형식'의 풀이과정으로 논증을 하고 의사소통으로서의 수학을 한다면 수학적인 증명만으로 발생하는 혼란은 없을 것이다.

(정리2) 두 사건 A와 B가 서로 독립사건이면 사건 A^c 과 B도 서로 독립사건이다

(예제2) 정육면체 주사위 하나를 던질 때, '짝수가 나온다'는 사건과 '5 이상이 나온다'는 사건은 독립사건이다. 그러면 '짝수가 나오지 않았다'는 사건과 '5 이상이 나오는 사건'은 무슨 사건인지 말하라.

(예제2)의 (구술형식 풀이)

짝수가 나왔다'는 사전정보(힌트)와 '짝수가 나오지 않았다'는 사전정보(힌트)는 동일한 정보이므로 독립사건이다.

따라서 '구술형식'으로 풀이하여 학생들이 명제를 실생활에 활용할 수 있게 해야 한다.

위의 정리를 대부분 수학적(mathematical)으로 증명한다. 그러나 수학적 증명을 보완하여 '구술형식'(verbal form)으로 설명하지 않는다면 실생활에서 응용하기 어렵다. 따라서 수학의 정의를 이용하여 정리와 문제를 증명할 때, 수학적으로만 증명하는 것을 보완하여 '구술형식'으로 논리를 전개하여 증명을 부연 설명한다면 '수리식'에 숨겨진 본래의 의미를 잘 파악할 수 있기 때문에 '수리식'으로 배운 확률이론을 실생활에 무한히 응용할 수 있고, 독립사건의 의미를 파악하지 못하여 막혀있던 확률교육의 새로운 흐름을 열 수 있다.

라. 세 사건 이상의 확률의 독립사건

두 사건 A, B가 상호(Mutual)독립사건이고, 두 사건 B, C가 독립사건이고, 두 사건 C, A가 독립사건일 지라도, 세 사건 A, B, C 가 각각(Disjoint)독립사건이 되는 것은 아니다.

(문제8) 이틀간의 주가 동향을 관찰한 결과 상승과 하락의 확률이 똑같이 1/2이라고 할 때, A: 첫 날 상승할 사건, B: 둘째 날 상승할 사건, C: 정확히 하루만 상승할 사건이다. 이 때, 세 사건 A, B, C가 독립사건인지 판별하라.

(문제8)의 (구술형식 풀이)

사건 A, B의 사전정보가 합해져서 사건 C가 나올 가능성을 확실히 예측할 수 있기 때문에, 즉 첫날 상승했고 둘째 날도 상승했다는 사전정보는 정확히 하루만 상승할 수 없기 때문에 사건 C를 맞출 확률이 높아졌으므로 세 사건 A, B, C는 독립사건이 아니다.

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid A \cap B)$$

인 세 사건의 확률의 곱셈정리에서,

사건 A, B, C가 독립사건일 때,

$P(B \mid A) = P(B)$와 $P(C \mid A \cap B) = P(C)$가 동시에 성립하므로,

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$이다.

이 공식에 대입하면 세 사건 A, B, C가 독립사건이 아니라는 사실을 수학적으로 증명할 수 있다.

그러나 많은 사람들이 수학적 증명만으로는 세 사건 A, B, C가 독립사건이 아닌 이유를 직관적으로 설명할 수 없다고 잘 못 생각할 수 있다.

따라서 수학적인 증명을 보완하여 구술형식 풀이로 논증하고 부연 설명하면 학생들의 이해도가 현저히 높아질 수 있다. 그리고 이 문제가 교과서에 도입 되어야 3개 이상의 독립사건에 대한 설명 없이 독립시행 개념을 설명하는 교과서의 논리적 비약을 해결할 수 있다.

4. 구술형식(verbal form)의 교육적 함의

Mendenhall(2002)은 구술형식이란 "실제(reality)나 현상을 이론(theory)으로 표현할 때, 자연과학에서 실제에 대한 이론을 '수리식'으로 표현하는 반면에, 사회과학에서는 실제에 대한 이론을 계량화가 힘든 일부 분야 즉 수리적 표현이 어려운 분야에서 구술적으로 이론을 표현하는 형식이다" 라고 정의한다. 우리가 물리적 현상을 이해하기 위하여 '수리식'을 선택하는 것은 '수리식'이 실제에 대한 과정을 정확하게 반영함으로써 과정 자체의 본질을 파악하는데 이용하기 위한 것이다. 따라서 확률론도 실제를 설명하기 위하여 '수리식' 으로 확률 및 추측이론을 전개한다. 이러한 '수리식'이 실제를 정확하게 설명하지만, 확률론에서는 '수리식' 이 실제 무엇을 나타내는 것인지 파악하기 매우 힘든 경우가 있다. 이런 경우는 '수리식'으로 배운 이론이 실생활에서 정보의 획득 및 이용을 어렵게 한다. 따라서 본 논문에서는 '수리식' 방식으로 표현된 이론을 사회과학에서 사용하는 '구술형식'(verbal form)을 이용하여 개념파악을 하고자 하였다. '구술형식'의 표현은 수학을 좀 더 알기 쉽게 하고 실생활에 유용하게 사용할 수 있는 커다란 파급효과를 기대할 수 있다고 생각한다.

신현용(2004)은 고전적 의미에서의 증명은 엄밀한(rigorous) 증명 즉 '수학적(mathematical)증명'이고 '정당화'는 기존의 증명 방법은 물론, 다양한 증명기법을 포괄하는 넓은 의미로써 '정당화'와 관련하여 현행 수학교육의 새로운 증명방법의 필요성을 제시하고 있다. 그러한 이유로는 첫째 실생활에서 '수학적 증명'보다는 '정당화'가 폭넓게 활용되기 때문이고, 둘째 괴델의 불완전성 정리 이후 고전적인 '수학적인 증명'은 절대 권위를 상실하였으며, 수학 분야에서 이미 다양한 '정당화'기법이 사용되고 있고, 교육현장에서 '수학적 증명'만을 고집하는 것은 수학사적 흐름을 거스르는 것이라고 말한다.

따라서 본 논문에서는 확률이론은 '수학적 증명' 보다 '정당화' 수준의 '구술형식' (verbal form)으로 논증을 전개하여 실생활과 밀접히 연관시킬 필요가 있다는 점에서 '구술형식'을 이용한 논증 능력 함양에도 역점을 둘 필요성을 설명했다. 학교 수학에서 엄밀한 '수학적 증명'에 초점을 맞추는 수학하는 방식에서 탈피하여 '구술형식'을 도입하고 적극적으로 활용해야 한다. 수학의 기호를 이용한 논리전개의 체계인 '수리식' 만큼 직관적인 체계를 이용한 '구술형식'도 중요한 가치를 부여받아야 한다고 생각한다. 왜냐하면 2000년 이상 기호 체계로 이루어진 '수리식'의 간편함과 의미 그리고 가치는 지속되어야 하지만, 수학을 단순 계산에만 의존함으로 수학은 '수리식'으로만 증명하여 이해하고 표현하는 학문으로 여기고 현실과 무관하게 생각되어지는 결과를 초래하지 않도록, '수리식'이 실제의 자연 현상과 정확하게 일치

한다는 사실을 학생들이 깨닫게 하기 위해 '정당화'의 한 방법으로 '구술형식'의 보급은 불가피하다고 생각한다.

III. 결 론

많은 연구결과에 의하면 확률단원은 학생들이 어려워 하고 교사들도 가르치기 힘들어 하는 단원이라고 한다.

본 논문에서는 확률단원중에서도 확률의 독립사건의 개념파악이 어려워 일상어와 다르다고 잘못 생각하고 있으며 곱셈정리에만 의존하여 애매하게 가르쳐지고 있는 문제점을 인식하고 학생들이 생생한 느낌과 직관적으로 독립사건과 종속사건의 정의를 파악할 수 있는 새로운 교수학적 방법으로 '수리식'을 보완하여 '구술형식' 의 필요성을 제시하였다.

본 논문에서는 확률의 독립사건은 중요한 이론임에도 불구하고 간과해온 정확한 근원적인 본질을 연구하고 확률의 독립사건의 정의가 직관적으로 설명할 수 없다고 잘못된 결론을 유도하여 대다수의 교사가 학생을 지도하는 현실을 바로잡기 위해서 독립사건은 직관적으로 설명할 수 있다는 사실을 '구술형식'으로 논증하였다. 따라서 본 논문을 통하여 그동안 학교교육이 독립사건의 정의의 본래의 의미를 파악하지 못하여 확률교육의 맥이 막혀 있었다면 확률교육의 흐름에 새로운 지평을 여는 커다란 파급효과를 기대할 수 있다.

확률의 독립사건은 '수리식' 으로 정의하고 수학적증명만으로 실제를 파악하지 못하는 모호성을 가질 수 있다. 이와 같이 오랜 세월 동안 만들어진 수학적 정의나 수학적 증명을 보완하여 실제를 더욱 정확히 파악하기 위하여 '정당화'의 한 방법으로 '구술형식'을 도입하여 논증을 한다면, 수학적 증명만으로 파악하기 어려운 내용을 명확히 이해를 할 수 있고 교과서에서 배운 확률이론을 실생활에 무한히 적용할 수 있는 힘이 생길 수 있다.

그 동안 학교 교육이 기계적인 계산에 의존함으로써 독립사건의 수학적 정의 뒤에 숨겨진 실제를 발견하지 못하고 있었다면, '구술형식'을 도입하여 정확한 독립사건의 수학적 정의의 의미를 파악하고 기본 개념 학습이 철저히 이루어지도록 해야 한다. 따라서 교과서에 확률의 독립사건의 정의를 충분히 알기 쉽게 본질을 학생들이 습득할 수 있도록 '구술형식'으로 기술해야 하며 기본 개념을 잘 이해했을 때만이 학생들이 실생활에 이용할 수 있는 무한한 응용력이 생긴다는 사실을 간과해서는 안 될 것이다.

그러나 '구술형식'이 수학적 정의의 개념 습득에 많은 도움이 되지만 '수리식'의 정확성과 엄밀함(rigorous)에 비해 한계가 있을 수 있어서 '구술형식'과 '수리식'을 병행하여 지도할 필요성도 염두에 둔다.

Mendenhall(2002)은 "확률과 통계학은 수학의 한 분야로 간주하지 않고 실용적인 정보이론의 개발과 관련이 있는 학문의 한 영역으로 간주한다. 즉, 확률과 통계학을 물리학과 유사한 독립된 한 학문으로, 수학의 한 분야가 아니라 수학을 많이 이용하는 정보이론 학문으로 간주한다."고 말한다. 따라서 확률과 통계단원을 물리와 같이 수학에서 분리된 하나의 교과로 교육과정을 운영한다면 '구술형식'을 도입함으로써 교과서의 분량이 많아지는 것도 극복될 수 있다.

아울러 본 논문에서는 독립사건의 정의가 '수리식'만으로는 실생활 개념과 다르며 직관적으로 설명할 수 없다고 잘 못 생각하는 한계를 극복할 수 있는 교수학적 방법으로 '구술형식'

을 시도해 보았다. 앞으로 '구술형식'을 수학의 다른 단원에도 확대 적용될 수 있도록 더 많은 실험과 심층 연구가 필요하다.

참고문헌

신현용 (2004). **학교수학에서의 정당화지도의 필요성 및 가능성에 관한 연구**. 대한수학회. 제19권. 제4호

우정호 외 5인(2007). **고등학교 수학I.** (주)대한교과서

유윤재 (2009). **확률에서 독립성개념의 의미 분석.** 수학교육시리즈A. 제48권. 제3호 353-357. 한국수학교육학회

이용구 (2005). **통계학의 이해.** 율곡출판사.

Mendenhall; Scheaffer& Wackerly(2002). Mathematical statistics with Applications, duxbury.

Sheldon Ross (1988). A First Course in Probability, Prentice-Hall.

Teaching Methods for the Concept of Independent Event in the Probability by Verbal Form

Choi, Myeong Sook (Kyoungil high school teacher,
Graduate School of Korea University)

The purpose of this paper intuitively shows the exact and logical explanation of Independent Event and Dependent Event. In actual classrooms, teachers have difficulty in describing the connection between those events and real life. Some teachers have wrong perceptions on the definition of those events. For example, they may not realize exactly what $P(B\ A)=P(B)$ means and may not explain intuitively the original meaning of why it is independent event. Also they believe that Independent Event and Dependent Event do not always match with real life. This paper, therefore, tries to prove intuitively the exact meanings of those events in the Verbal Form with some examples and it proves that those events exactly match with real life. It is expected that this paper will greatly contribute to the improvement of Probability education.

* key words : Independent Event(독립사건), Verbal Form(구술형식), intuitively(직관적으로)

논문접수 : 2009. 8. 1
논문수정 : 2009. 9. 4
심사완료 : 2009. 9. 11