

# 기하대수에 의한 비정현파 다선식 전력계통에서의 피상전력의 표현

논문

58-10-36

## Representation of Apparent Power of Non-sinusoidal Multi-line Power System Using Geometric Algebra

전 성 증\*

(Seong-Jeub Jeon)

**Abstract** - According to recent researches, apparent power in a non-sinusoidal single phase system can be represented with geometric algebra. In this paper, the geometric algebra is applied to apparent power defined in a multi-line system having transmission lines with frequency-dependency under non-sinusoidal conditions.

**Key Words** : Apparent Power, Reactive Power, Power Theory, Geometric Algebra, Multivector

### 1. 서 론

피상전력과 무효전력의 개념은 교류를 발견한 후 곧 정립되기 시작하였다 [1]. 단상 정현파에서나 정현파 대칭 3상에서의 피상전력과 무효전력의 개념은 매우 명확하여 논란의 여지가 없다. 그러나 고조파가 포함되거나 불평형 다상 교류에서의 피상전력과 무효전력 개념은 오랫동안 논란의 대상이었다[2-4]. 최근 들어 논란은 어느 정도 정리되어 Buchholz의 이론이 다수에 의해 받아들여지고 독일의 표준인 DIN 40110과 미국의 표준으로 볼 수 있는 IEEE std. 1459에 반영되었다[5-7]. Buchholz 이론은 전력선 각 상(선)의 저항이 동일하다는 가정 하에 만들어졌다고 볼 수 있다 [8-12]. 각 상(선)의 저항이 동일하지 않은 경우에 대하여서도 연구되었고[13-15] 나아가 전력선의 저항이 주파수에 대한 의존성이 있는 경우의 연구도 있었다[16].

단상정현파 시스템에서 유효전력과 무효전력을 동시에 표현하는 방법으로 복소전력이 일찍부터 도입되어 널리 사용되었다. 고조파가 포함되거나 다상 비대칭/불평형에서는 모든 직교(orthogonal) 성분들이 만드는 교차성분간의 곱(cross product term, 이하 교차성분적으로 표현)이 피상전력에 기여한다는 것은 일찍이 알려졌고[1], 단상정현파에서 정의된 복소전력 만으로는 이런 경우의 피상전력 구성을 표현하기에는 부족하다. 오히려 복소전력은 다른 주파수에 의해 만들어지는 무효전력이 가산적이라는 잘못된 신념을 심어줄 수 있다. 이 신념에 따라 만들어진 Budeanu의 이론은 오랫동안 전기공학에서 사용되어 왔으나 최근들어 배척되기에 이르렀다[3,6]. 동일 주파수의 다른 상에 의해 만들어진 무효전력이 가산적이라는 신념에 따라 만들어진 벡터 피상

전력(vector apparent power)도 IEEE에 의해 폐기권고 되었다[6]. 최근 들어 순시 전력 이론에서 나타나는 교차성분적을 쿼터니온(Quaternion)으로 볼 수 있는 3차의 초복소대수(Hypercomplex number algebra)로 표현된 바 있으며[17], Clifford 이론 또는 기하대수(geometric algebra)를 응용하면 단상 비정현파 계통에서 피상전력에 기여하는 교차성분적을 표현할 수 있음이 최근에 알려졌다[18,19].

본 논문에서는 [16]에서 정의된 전력선의 저항이 주파수에 대한 의존성이 있는 다선식 경우의 피상전력을 기하대수로 표현해 보았다. 이 피상전력은 주파수 영역에서 표현된 많은 이론들에서 정의된 피상전력 개념들을 포함하는 것이므로 주파수 영역에서 표현되는 많은 이론에서 기하대수가 사용될 수 있음을 뜻한다.

### 2. Geometric Algebra

기하대수는 멀티벡터(multivector)의 정의로 시작할 수 있다. 멀티벡터  $\mathbf{A}$ 는 다음과 같이  $k$ -벡터( $k$ -vector)들의 합으로 표현된다.

$$\mathbf{A} = \sum_{k=0}^n \langle \mathbf{A} \rangle_k \quad (1)$$

여기서  $\langle \mathbf{A} \rangle_k$ 는  $k$ -벡터부로  $k$ -벡터들의 선형 조합으로 이루어진다.  $k$ -벡터란  $k$  개의 기본벡터의 외적(outer product)으로 이루어진 새로운 벡터로 볼 수 있다.  $k$ 가 영이면 스칼라(scalar),  $k$ 가 1이면 벡터, 2이면 바이벡터(bivector), 3이면 트리벡터(trivector)라고도 부른다.  $k$ 가 다르면 다른 물리량을 표현한다. 멀티벡터가 정의되면 여기에 기하적(geometric product)이 정의되어 기하대수가 이루어진다.  $\mathbf{A}$ 와  $\mathbf{B}$ 가 멀티벡터면 이들의 기하적은  $\mathbf{AB}$ 로 나타낸다. 기하적은 분배성(distributivity)과 결합성(associativity)은 있으나 교환성(commutativity)은 없다. 전력이론의 응용에는 기하대수 중 매우 적은 부분을 사용한다. 곱하여지는 두 멀티벡터가 단순한 벡터(1-vector)들의 선형조합이라면 이들의 기하

\* 정 회 원 : 부경대학교 전자공학과 교수·공박

E-mail : jeub@pknu.ac.kr

접수일자 : 2009년 8월 20일

최종완료 : 2009년 9월 7일

※ 본 논문은 본 학회 2009년 하계학술대회 학술위원회에서 우수논문으로 선정되어 편집위원회 심사 후 본 논문지에 게재 되었음.

적은 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \quad (2)$$

여기서  $\mathbf{a}$ 와  $\mathbf{b}$ 는 벡터이고,  $\cdot$  (dot)은 내적(inner product)을  $\wedge$ 은 외적(outer product)을 나타낸다. 외적으로 표현된 부분이 바이벡터다. 이와 같이 임의의 두 벡터의 기하적은 멀티벡터로 표현된다. 멀티벡터  $\mathbf{A}$ 의 리버스(reverse)  $\mathbf{A}'$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{A}' = \sum_{k=0}^n (-1)^{k(k-1)/2} \langle \mathbf{A} \rangle_k \quad (3)$$

두 멀티벡터의 기하적에 대한 리버스는 다음과 같다.

$$(\mathbf{AB})' = \mathbf{B}'\mathbf{A}' \quad (4)$$

그리고, 멀티벡터  $\mathbf{A}$ 의 놈(norm)  $\|\mathbf{A}\|$ 은 각 부( $k$ -벡터)의 놈의 유클리드 놈으로 리버스를 이용하면 다음과 같이 주어진다.

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{k=0}^n \|\langle \mathbf{A} \rangle_k\|^2} = \sqrt{\langle \mathbf{AA}' \rangle_0} \quad (5)$$

### 3. Non-sinusoidal Power Theory

주파수 영역에서의 전력이론은 전압과 전류의 푸리에 급수 전개를 사용한다. 그림 1(a)에 주어진 전력 시스템에서  $l$  번째 선(도체)의 전압과 전류가 다음과 같이 주어지면

$$v_{sl} = V_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (v_{l,2k-1} + v_{l,2k}), \quad (6a)$$

$$i_l = I_{l,0} + \sum_{k=1}^{\infty} (i_{l,2k-1} + i_{l,2k}) \quad \text{for } l = 1, 2, \dots, m, \quad (6b)$$

여기서  $l$ 은 선 번호다. 우변의 첫 항은 직류 성분이며 나머지는 교류 성분으로  $k$ 는 고조파 차수다. 교류성분은 다음과 같다.

$$v_{l,2k-1} = \sqrt{2} V_{l,2k-1} \sin k\omega t \quad (7a)$$

$$v_{l,2k} = \sqrt{2} V_{l,2k} \cos k\omega t, \quad (7b)$$

$$i_{l,2k-1} = \sqrt{2} I_{l,2k-1} \sin k\omega t, \quad (7c)$$

$$i_{l,2k} = \sqrt{2} I_{l,2k} \cos k\omega t. \quad (7d)$$

여기서  $V_{l,2k}$ ,  $V_{l,2k-1}$ ,  $I_{l,2k}$ ,  $I_{l,2k-1}$ 는 부호 있는 rms (root mean square) 전압·전류로 부호는 그림 1(a)에 표시한 방향과 실제 전압·전류에 의해 결정된다. 인덱스가 서로 다른 전압과 전류 성분은 평균전력을 생성하지 않고 서로 직교적(orthogonal)이다. 전압벡터와 전류벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{V} \equiv \sqrt{\frac{r}{r_{1,0}}} V_{1,0} \mathbf{e}_{1,0} + \sqrt{\frac{r}{r_{2,0}}} V_{2,0} \mathbf{e}_{2,0} + \dots + \sqrt{\frac{r}{r_{l,j}}} V_{l,j} \mathbf{e}_{l,j} + \dots, \quad (8a)$$

$$\mathbf{I} \equiv \sqrt{\frac{r_{1,0}}{r}} I_{1,0} \mathbf{e}_{1,0} + \sqrt{\frac{r_{2,0}}{r}} I_{2,0} \mathbf{e}_{2,0} + \dots + \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r}} I_{l,j} \mathbf{e}_{l,j} + \dots. \quad (8b)$$

여기서  $\mathbf{e}_{l,j}$ 는 기본벡터로 인덱스가  $l,j$ 인 전압과 전류성분을 나타낸다. 전류벡터에 사용된 가중치는 전압벡터에 사용된 가중치의 역수다. 이 전압벡터와 전류벡터는 공간-스펙트럼상(spatiospectral) 가중분포를 나타낸다. 전압벡터와 전류벡터의 놈(norm)은 실효전압( $V_e$ )과 실효전류( $I_e$ )라 불린다.

$$V_e \equiv \|\mathbf{V}\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r}{r_{l,j}} V_{l,j}^2} \quad (9a)$$

$$I_e \equiv \|\mathbf{I}\| = \sqrt{\sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{l,j}}{r} I_{l,j}^2} \quad (9b)$$

실효전류는 그림 1(b)와 같은 등가회로에서 그림 1(a)의 실제 전력 시스템에서의 전력손실과 같은 손실을 발생시킨다. 이들 벡터를 사용하여 멀티벡터 전력  $\mathbf{S}$ 는 다음과 같이 전압 전류 벡터의 기하적으로 정의된다.

$$\mathbf{S} \equiv \mathbf{VI} \quad (10)$$

멀티벡터 전력의 스칼라 부분은 두 벡터의 내적으로 각 벡터의 가중치가 상쇄되어 다음과 같이 평균전력  $P$ 가 된다.

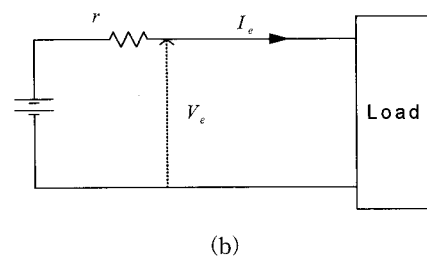
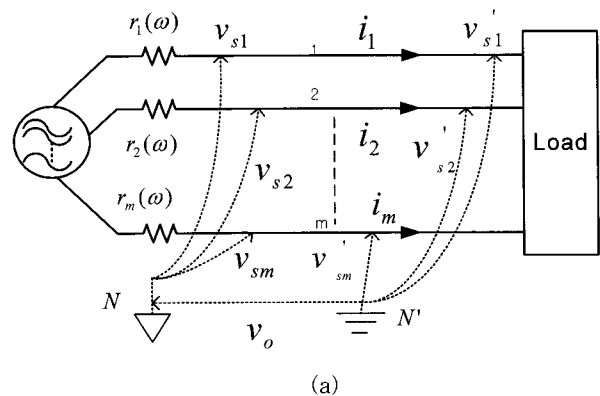


그림 1 다선식 전력계통과 등가회로: (a) 다선식 전력계통, (b) 최적상태의 직류등가회로

Fig. 1 Multi-line power system and its equivalent circuit

$$\langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \sum_{l=1}^m \sum_{j=0}^{\infty} V_{l,j} I_{l,j} = P \quad (11)$$

멀티벡터 전력의 바이벡터 부분은 다음과 같이 무효전력의 벡터형 표현이 된다. 즉 이것의 놈이 무효전력이 된다.

$$\langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = \sum_{(l,j)=1}^m \sum_{(l',j')=1}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{r_{l',j'}}{r_{l,j}}} V_{l',j'} I_{l',j'} - \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r_{l',j'}}} V_{l,j} I_{l,j} \right) \mathbf{e}_{l,j} \mathbf{e}_{l',j'} \quad (12)$$

여기에는 다음의 관계가 사용되었다.

$$\mathbf{e}_{r,j'} \wedge \mathbf{e}_{l,j} = -\mathbf{e}_{l,j} \wedge \mathbf{e}_{r,j'} = \mathbf{e}_{r,j'} \mathbf{e}_{l,j} = -\mathbf{e}_{l,j} \mathbf{e}_{r,j'} \quad (13)$$

두 개의 다른 기본 벡터의 기하적은 내적과 같다. 식 (12)의 바이벡터  $\langle \mathbf{S} \rangle_2$ 의 놈이 [16]에서 정의한 무효전력  $Q$ 가 된다.

$$\|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| = \sqrt{\sum_{(l,j)=1}^m \sum_{(l',j')=1}^{\infty} \left( \sqrt{\frac{r_{l',j'}}{r_{l,j}}} V_{l',j'} I_{l',j'} - \sqrt{\frac{r_{l,j}}{r_{l',j'}}} V_{l,j} I_{l,j} \right)^2} \quad (14)$$

멀티벡터 전력의 놈은 실효전압과 전류의 곱과 같고 피상전력(S)이라 불린다.

$$\|\mathbf{S}\| = \|\mathbf{VI}\| = \sqrt{\mathbf{VI}(\mathbf{VI})^t} = \sqrt{\mathbf{VV}^t \mathbf{II}^t} = V_e I_e \quad (15a)$$

또는 피상전력은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$$S = \|\mathbf{S}\| = \sqrt{\|\langle \mathbf{S} \rangle_0\|^2 + \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\|^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (15b)$$

전력선의 이용도를 나타내는 역률은 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \frac{P}{S} \quad (16)$$

멀티벡터 전력의 놈인 피상전력은 동일한 평균전력을 만드는 전압·전류벡터 중에서 두 벡터가 동형(collinear)일 때 최소가 된다. 이 때 무효전력은 영이 된다. 무효전력이 영인 조건은 전압·전류벡터가 동형인 조건과 같으며 (12) 또는 (14)에서 다음과 같이 구해진다.

$$\frac{V_{l,j}}{r_{l,j} I_{l,j}} = \frac{V_{l',j'}}{r_{l',j'} I_{l',j'}} \quad \text{for all } l, j, l' \text{ and } j'. \quad (17)$$

무효전력이 영인 최적인 상태의 전류는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{I} = \frac{P}{V_e^2} \mathbf{V}, \quad \text{또는 } I_{l,j} = \frac{P}{V_e^2} \frac{r}{r_{l,j}} V_{l,j} \quad \text{for all } l \text{ and } j. \quad (18)$$

키르히호프의 법칙에 따라 선전류의 합이 영이므로 전압도 다음의 조건을 만족시켜야 한다.

$$\sum_{l=1}^m \frac{r}{r_{l,j}} V_{l,j} = 0 \quad \text{for all } j. \quad (19)$$

식 (19)를 만족시키는 기준점  $N$ 을 가상 중성점(fictitious neutral point) 이라고 한다. 각선의 저항이 모두 같고 주파수 의존성이 없으면 각 선에 동일한 저항을 연결하여 얻은 Y(star) 점이 가상 중성점이나 주파수 의존적일 때에는 가상 중성점을 만들기가 쉽지 않고 임의 점  $N'$ 에 대하여 측정할 신호에 다음과 같은 연산을 하여 가상 중성점에 대한 전압을 얻는다.

$$V_{l,j} = V_{l,j}' - V_{0,j} \quad \text{for all } l \text{ and } j. \quad (20)$$

여기서  $V_{0,j}$ 는 다음과 같이 정의된 일반화 동상성분이다.

$$V_{0,j} = \frac{\sum_{l=1}^m \frac{r}{r_{l,j}} V_{l,j}'}{\sum_{l=1}^m \frac{r}{r_{l,j}}} \quad (21)$$

#### 4. 적용예

본 논문에서 논의한 전력 이론에서 고조파 전류가 무효전력과 피상전력에 어떻게 영향을 미치나 보기위하여 단상과 3상 3선식 비정현파 시스템에 적용해 보자.

##### 4.1 단상 비정현파 시스템

먼저 그림 2의 단상 시스템에 적용하여 보자. Buchholz 이론은 고전적 단상 시스템과는 일관성을 갖지 못한다 [14,15]. Buchholz 이론과는 달리 이 이론에서는 이선식 시스템의  $r_2(\omega)=0$ 으로 두고  $r_1(\omega)$ 을 일정하다고 두면 고전적인 단상 회로와 동일한 해석을 할 수 있다. 여기서는  $r_1(\omega)$ 은 주파수 의존성이 있다고 가정하자.

고조파 신호에 대하여 고찰하기 위하여 다음과 같은 구형파 전압원을 고려하였다.

$$v = \begin{cases} 100 & 0 < \omega_1 t < \pi \\ -100 & \pi < \omega_1 t < 2\pi \end{cases} \quad (22)$$

푸리에 급수전개하면 다음과 같이 주어진다.

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} V_k \sin(k\omega_1 t) \quad (23)$$

여기서  $\omega_1$ 은 기본파 각주파수고  $V_k$ 는 다음과 같다.

$$V_k = \begin{cases} \frac{200\sqrt{2}}{k\pi}, & \text{for odd } k \\ 0, & \text{for even } k \end{cases} \quad (24)$$

전송선로의 저항이 표피효과로 인해 주파수의 제곱근에 비례한다고 가정하면

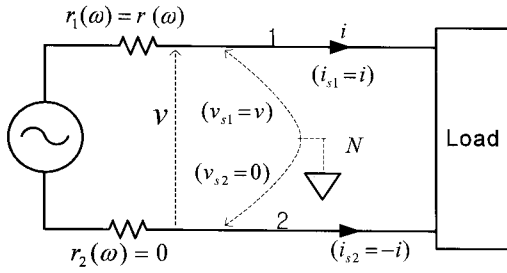


그림 2 이선식(단상)전력시스템  
Fig. 2 Two-line (single-phase) power system

$$r(\omega) = 0.01 \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}} \quad (25)$$

고조파 차수에 대한 함수로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$r_k = 0.01 \sqrt{k} \quad (26)$$

모든 고조파는 서로 직교적이므로 각 고조파를 기본 벡터로 표현하면 전압벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{V} = \frac{200\sqrt{2}}{\pi} (\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{e}_5}{3^{5/4}} + \frac{\mathbf{e}_9}{5^{5/4}} + \frac{\mathbf{e}_{13}}{7^{5/4}} + \dots + \frac{\mathbf{e}_{2k-1}}{k^{5/4}} + \dots) \quad (27)$$

여기서 기준저항  $r$ 은 0.01로 두었다. 실효전압은

$$V_e = \|\mathbf{V}\| \approx 94.61 \text{ V} \quad (28)$$

전압의 파형과 고조파 분포는 그림 3과 같다. 구형파 전류, 최적 전류와 정현파 전류에 따른 세 가지 경우의 해석을 예로 보도록 하자.

#### 4.1.1 경우 I (구형파 전류)

다음과 같이 구형파 전류가 흐르는 경우 Buchholz 이론에서는 역률이 1이 된다. 그러나 3 장에서 다른 이론에서는 그렇지 아니하다.

$$i = \begin{cases} 10 & 0 < \omega_1 t < \pi \\ -10 & \pi < \omega_1 t < 2\pi \end{cases} \quad (29)$$

이 구형파 전류를 푸리에 급수전개하면

$$i = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega_1 t) \quad (30)$$

여기서

$$I_k = \begin{cases} \frac{20\sqrt{2}}{k\pi}, & \text{for odd } k \\ 0, & \text{for even } k \end{cases} \quad (31)$$

전류벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{I} = \frac{20\sqrt{2}}{\pi} (\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{e}_5}{3^{3/4}} + \frac{\mathbf{e}_9}{5^{3/4}} + \frac{\mathbf{e}_{13}}{7^{3/4}} + \dots + \frac{\mathbf{e}_{2k-1}}{k^{3/4}} + \dots) \quad (32)$$

전압의 파형과 고조파 분포는 그림 4와 같고 가중분포가 전압의 가중분포와 일치하지 아니한다. 실효전류는

$$I_e = \|\mathbf{I}\| \approx 11.67 \text{ A} \quad (33)$$

전압·전류의 식으로부터 알고 있던 평균전력을 두 벡터의 내적으로부터 다음과 구할 수 있다.

$$P = \langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \frac{8000}{\pi^2} (1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{k^2} + \dots) = 1000 \text{ W} \quad (34)$$

멀티벡터 전력의 바이벡터 부인 무효전력 벡터를 구하면

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle_2 &= \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} \\ &= \frac{8000}{\pi^2} ((\frac{1}{3^{3/4}} - \frac{1}{3^{5/4}}) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_5 + (\frac{1}{5^{3/4}} - \frac{1}{5^{5/4}}) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_7 + \dots) \end{aligned} \quad (35)$$

전압벡터와 전류벡터가 동형이 아니므로 각 바이벡터의 계수가 영이 아님을 볼 수 있다. 따라서 무효전력은 영이 아니다. 무효전력 벡터로부터 무효전력을 구하면

$$Q = \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| \approx 467 \text{ Var} \quad (36)$$

피상전력은 멀티벡터전력의 norm으로 주어진다.

$$S = \sqrt{\|\langle \mathbf{S} \rangle_0\|^2 + \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\|^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \approx 1104 \text{ VA} \quad (37)$$

피상전력은 식 (28)과 (33)에 구해둔 실효전압과 실효전류의 곱으로도 구할 수 있다. 역률은

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{1000}{1104} \approx 0.91 \quad (38)$$

전압과 전류가 동상이지만 그림 3, 4에서와 같이 가중치를 고려한 스펙트럼상 분포가 일치하지 않으므로 역률이 좋지 못하다.

#### 4.1.2 경우 II (최적 전류)

다음과 같이 고조파 성분이 식 (18)로 결정된 전류를 살펴보자.

$$I_k = \begin{cases} \frac{P}{V_e^2} \frac{r}{r_k} V_k, & \text{for odd } k \\ 0, & \text{for even } k \end{cases} \quad (39)$$

그러면 전류 벡터는

$$\mathbf{I} = \frac{2\sqrt{2}10^5}{\pi V_e^2} (\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{e}_5}{3^{5/4}} + \frac{\mathbf{e}_9}{5^{5/4}} + \frac{\mathbf{e}_{13}}{7^{5/4}} + \dots + \frac{\mathbf{e}_{2k-1}}{k^{5/4}} + \dots) \quad (40)$$

이 전류 벡터는 앞 예에서와는 달리 전압벡터와 동형이다. 그림 3과 5에서와 같이 전류 고조파의 가중분포가 전압의 가중분포와 일치한다. 실효전류는

$$I_e = \|\mathbf{I}\| \approx 10.57 \text{ A} \quad (41)$$

전압·전류의 식으로부터 알고 있던 평균전력을 두 벡터의 내적으로부터 다음과 구할 수 있다.

$$P = \langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = \frac{8 \times 10^7}{\pi^2 V_e^2} \left(1 + \frac{1}{3^{10/4}} + \frac{1}{5^{10/4}} + \frac{1}{7^{10/4}} + \dots + \frac{1}{k^{10/4}} + \dots\right) = 1000 \text{ W} \quad (42)$$

멀티벡터전력의 바이벡터 부인 무효전력 벡터를 구하면 다음과 같이 주어진다.

$$\langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = \frac{8 \times 10^7}{\pi^2 V_e^2} \left( \left(\frac{1}{3^{5/4}} - \frac{1}{3^{5/4}}\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 + \left(\frac{1}{5^{5/4}} - \frac{1}{5^{5/4}}\right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_7 + \dots \right) \quad (43)$$

전압벡터와 전류벡터가 동형이므로 각 바이벡터의 계수가 영이 됨을 볼 수 있다. 이로부터 무효전력을 구하면

$$Q = \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| = 0 \text{ Var} \quad (44)$$

피상전력은 멀티벡터전력의 norm으로 주어진다.

$$S = \sqrt{\|\langle \mathbf{S} \rangle_0\|^2 + \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\|^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} = 1000 \text{ VA} \quad (45)$$

피상전력은 식 (28)와 (41)에 구해둔 실효전압과 실효전류의 곱으로도 구할 수 있다. 이 경우의 역률은 1이다.

$$\lambda = \frac{P}{S} = 1.0 \quad (46)$$

### 4.1.3 경우 III (정현파 전류)

마지막 경우로 준최적인 경우로 다음과 같이 고조파 성분이 없는 정현파 전류의 경우를 살펴보자.

$$i = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega_1 t) \quad (47)$$

여기서

$$I_1 = \frac{P}{V_1} = \frac{5\pi}{\sqrt{2}} \quad (48)$$

전류벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{I} = \frac{5\pi}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_1 \quad (49)$$

따라서

$$I_e = \|\mathbf{I}\| = \frac{5\pi}{\sqrt{2}} \approx 11.11 \text{ A} \quad (50)$$

평균전력을 두 벡터의 내적으로부터 다음과 구할 수 있다.

$$P = \langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = 1000 \text{ W} \quad (51)$$

멀티벡터 전력의 바이벡터 부인 무효전력 벡터를 구하면

$$\langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = 1000 \left( -\frac{1}{3^{5/4}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3 - \frac{1}{5^{5/4}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_7 - \frac{1}{7^{5/4}} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_{11} - \dots \right) \quad (52)$$

전압벡터와 전류벡터가 동형이 아니므로 각 바이벡터의 계수가 영이 아님을 볼 수 있다. 따라서 무효전력은 영이 아니다. 무효전력 벡터로부터 무효전력을 구하면

$$Q = \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| \approx 323 \text{ Var} \quad (53)$$

피상전력은 멀티벡터전력의 norm으로 주어진다.

$$S = \sqrt{\|\langle \mathbf{S} \rangle_0\|^2 + \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\|^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \approx 1051 \text{ VA} \quad (54)$$

피상전력은 식 (26)과 (49)에 구해둔 실효전압과 실효전류의 곱으로도 구할 수 있다. 역률은

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{1000}{1051} \approx 0.95 \quad (55)$$

전류 벡터가 전류벡터와 동형은 아니지만 경우 I에 비해 좋은 역률을 나타낸다.

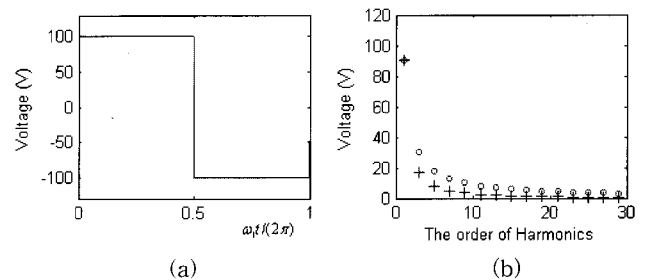


그림 3 전압의 파형과 스펙트럼: (a) 파형, (b) 스펙트럼  
Fig. 3 Source voltage waveform and its spectrum: (a) waveform, (b) spectrum (o: unweighted, +: weighted)

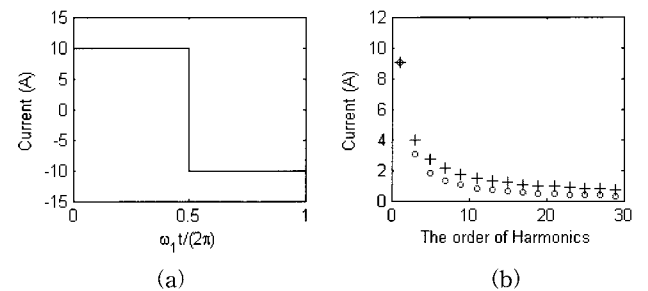


그림 4 구형파 부하전류의 파형과 스펙트럼: (a) 파형, (b) 스펙트럼  
Fig. 4 Squarewave load current and its spectrum: (a) waveform, (b) spectrum (o: unweighted, +: weighted)

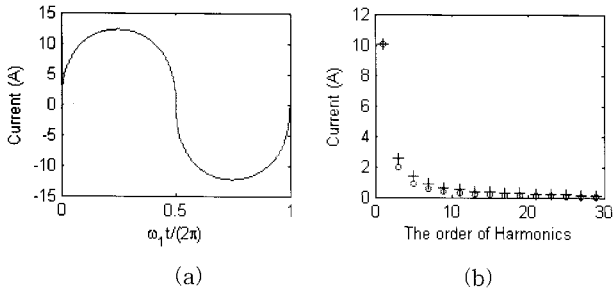


그림 5 최적 부하 전류의 파형과 스펙트럼: (a) 파형, (b) 스펙트럼

Fig. 5 Optimum current waveform and its spectrum: (a) waveform, (b) spectrum(o: unweighted, +: weighted)

전압에 고조파가 포함된 경우 Buchholz 이론에서는 전류도 동일한 정도의 고조파가 포함되기를 요구한다. 그러나 전력계통에서는 정현파에 가까운 전류가 더 좋은 것으로 인식되어 전력이론과 일반적 믿음 사이에 괴리가 있으나 [16]에서 제안된 이론에서는 이상적인 전류는 전압보다 더 정현파에 가깝다. 즉 일반적인 믿음에 더 부합되는 이론으로 볼 수 있다.

4.2 삼상 비정현파 시스템

3상 3선식 시스템은 그림 1(a)에서  $m=3$ 인 경우이다. 복잡성을 줄이기 위해 전원은 상전압의 실효치가  $V$ 인 정현파 대칭 3상으로 하고, 부하는 평형 3상 전류에 한 가지 고조파만 대칭으로 기본파의 30%를 포함시키자. 선로의 저항은 4.1에서와 같이 표피효과로 인해 주파수의 제곱근에 비례한다고 가정하고 고조파 차수의 함수로 표현하면

$$r_{1,k} = r_{2,k} = r_{3,k} = 0.01\sqrt{k} \tag{56}$$

1번 선의 전압이 다음과 같고 2, 3번 선의 전압은 각기 주기의 1/3, 2/3 만큼 씩 늦다.

$$v_{s1} = \sqrt{2}V \sin \omega_1 t \tag{57}$$

그러면 전압벡터는

$$\mathbf{V} = 0.5V(2\mathbf{e}_{1,1} - \mathbf{e}_{2,1} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2} - \mathbf{e}_{3,1} + \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}) \tag{58}$$

1번 선의 전류가 다음과 같고 2, 3번 선은 각기  $2\pi/3$ ,  $4\pi/3$ 의 위상지연이 있다.

$$i_1 = \sqrt{2}I \sin \omega_1 t + 0.3\sqrt{2}I \cos k\omega_1 t \tag{59}$$

전류벡터는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{I} = 0.5I(2\mathbf{e}_{1,1} - \mathbf{e}_{2,1} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2} - \mathbf{e}_{3,1} + \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}) + 0.15k^{1/4}(2\mathbf{e}_{1,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{2,2k-1} - \mathbf{e}_{2,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2k-1} + \mathbf{e}_{3,2k}) \tag{60}$$

멀티벡터 전력  $\mathbf{S}$ 는 (8)과 같이  $\mathbf{VI}$ 로 주어지는데 이의 스칼라

라 부분은 평균전력  $P$ 로 다음과 같이 주어진다.

$$P = \langle \mathbf{S} \rangle_0 = \mathbf{V} \cdot \mathbf{I} = 0.25VI(4+1+3+1+3) = 3VI \tag{61}$$

무효전력을 나타내는 바이벡터 부분은 다음과 같다.

$$\mathbf{Q} = \langle \mathbf{S} \rangle_2 = \mathbf{V} \wedge \mathbf{I} = 0.15k^{1/4}VI(2\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{1,2k} - \sqrt{3}\mathbf{e}_{1,1}\mathbf{e}_{2,2k-1} + \dots + \sqrt{3}\mathbf{e}_{3,2}\mathbf{e}_{3,2k}) \tag{62}$$

무효전력은 다음과 같이 주어진다.

$$Q = \|\langle \mathbf{S} \rangle_2\| = 3VI\sqrt{k} \times 0.09 = 0.9VI k^{1/4} \tag{63}$$

피상전력은 다음과 같이 주어진다.

$$S = \|\mathbf{S}\| = 3VI\sqrt{1+0.09k} \tag{64}$$

고조파 차수가  $k=5$ , 47인 경우의 무효전력, 피상전력을 표 1에 나타내었다. 300차 고조파까지의 영향을 그림 6에 나타내었다. 같은 크기의 고조파라 하더라도 고조파 차수가 높으면 표피효과로 인해 손실이 커지는 것이 반영되어 무효전력이 크게 나타났다.

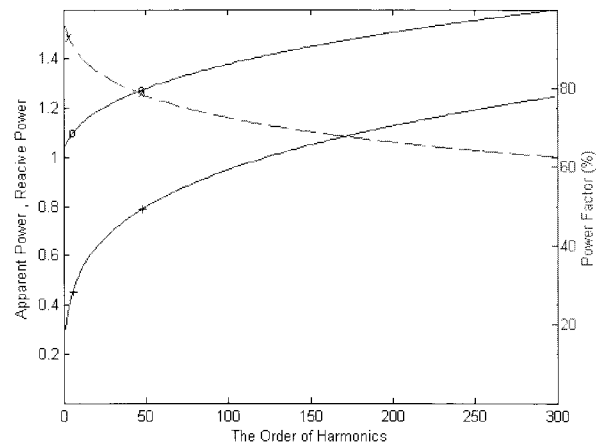


그림 6 고조파 차수에 따른 무효전력, 피상전력과 역률의 변화 (+-+: 무효전력, o-o: 피상전력, x--x:역률)

Fig. 6 Variation of reactive power, apparent power and power factor according to harmonic order

5. 결 론

본 논문에서는 기하대수를 전력선의 저항이 주파수 의존성을 갖는 계통에서 정의된 전력 이론에 적용하여 멀티벡터 전력을 정의하였다. 멀티벡터 전력의 스칼라 부는 평균전력을 나타내며 바이벡터 부는 무효전력을 벡터형으로 나타낸다. 바이벡터 부의 높음 무효전력을 나타낸다. 이로써 주파수 영역에서 정의되는 대부분의 전력이론에서의 피상전력은 기하대수로 표현할 수 있음을 확인하였다.

표 1 고조파차수에 따른 실효전류, 무효전력 및 피상전력  
**Table 1** Effective current, reactive power and apparent power according to harmonic orders

고조파차수	정규화 실효전류 (I)	정규화 무효전력 (3VI)	정규화 피상전력 (3VI)
5	1.8984	0.4486	1.0960
47	2.2025	0.7855	1.2716

**참 고 문 헌**

[1] W.V. Lyon, "Reactive power and unbalanced circuits", Electrical World, vol. 75, no. 25, pp. 1417-1420, 1920.  
 [2] P.S. Filipski, Y. Baghzouz and M.D. Cox, "Discussion of power definitions contained in the IEEE dictionary", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 9, no. 3, pp. 1237- 1244, July 1994.  
 [3] L.S. Czarnecki, "What is wrong with the Budeanu Concept of Reactive and Distortion Power and Why It Should be Abandoned", IEEE Trans. Instrumentation and Measurement, vol. 36, no. 3, pp. 834-837, 1987.  
 [4] P.S. Filipski, "Apparent power - a misleading quantity in non-sinusoidal power theory: Are all non-sinusoidal power theories doomed to fail?", European Transactions on Electrical Power, vol. 3, no. 1, pp. 21-26, Jan./Feb. 1993.  
 [5] A. Ferrero, "Definitions of electrical quantities commonly used in nonsinusoidal conditions", ETEP, European Transactions on Electrical Power, vol. 8, no. 4, pp. 235-240, Jul./Aug. 1998.  
 [6] IEEE Trial-Use Standard: Definition for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions, IEEE std. 1459, 2000.  
 [7] H. Spath, "A general purpose definition of active current and non-active power based on German standard DIN 40110", Electrical Engineering, vol. 89, pp. 167-175, 2007.  
 [8] M. Depenbrock, "The FBD-method, a generally applicable tool for analyzing power relations", IEEE Trans. Power Systems, vol. 8, no. 2, pp. 381-387, May 1993.  
 [9] A.E. Emanuel, "The Buchholz-Goodhue apparent power definition: The practical approach for nonsinusoidal and unbalanced system", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 13, no. 2, pp. 344-350, Apr. 1998.  
 [10] A.E. Emanuel, "Apparent power definition for three-phase systems", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 14, no. 3, pp. 767-772, 1999.  
 [11] N. LaWhite and M.D. Ilic, "Vector space decomposition of reactive power for periodic nonsinusoidal signals", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 44, no. 4, pp. 338-346, 1997.

[12] S.-J. Jeon, "Considerations on a reactive power concept in a multi-line system", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 21, no. 2, pp. 551-559, Apr. 2006.  
 [13] J.G. Mayordomo and J. Usaola, "Apparent power and power factor definitions for polyphase non-linear loads when supply conductors present different resistances", European Trans. Electr. Power, vol. 3, no. 6, pp. 415-420, 1993.  
 [14] J.L. Willems, "Critical analysis of the concepts of instantaneous power current and of active current", European Trans. Electrical Power vol. 8, no. 4 pp. 271-274, 1998.  
 [15] S.-J. Jeon, "Definitions of apparent power and power factor in a power system having transmission lines with unequal resistances", IEEE Trans. Power Delivery, vol. 20, no. 3, pp. 1806-1811, 2005.  
 [16] S.-J. Jeon, "Non-sinusoidal power theory in a power system having transmission lines with frequency- dependent resistances", IET Gener. Transm. Distrib., vol. 1, no. 2, pp. 331-339, Mar. 2007.  
 [17] L. Cristaldi and A. Ferrero, "Mathematical foundation of the instantaneous power concepts: an algebraic approach", European Trans. Electr. Power, vol. 6, no. 5, pp. 305-309, 1996.  
 [18] A. Menti T. Zacharias and J. Miliias-Artitis, "Geometric algebra: a powerful tool for representing power under nonsinusoidal conditions", IEEE Trans. Circuit and Systems, vol. 54, no. 3, pp. 601-609, Mar. 2007.  
 [19] M. Catilla, J. C. Bravo, M. Ordonez and J. C. Montano, "Clifford theory: a geometrical interpretation of multivectorial apparent power", IEEE Trans. Circuit and Systems, vol. 55, no. 10, pp. 3358-3367, Nov. 2008.

**저 자 소 개**



**전 성 줌 (田 成 緝)**

1957년 생. 1980년 숭전대학교 전기공학과 졸업. 1982년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학석사. 2001년 한국과학기술원 전기 및 전자공학과 공학박사. 1982년 3월~1985년 2월 한국과학기술원 연구원. 1985년 3월~1986년 8월 한국전기연구소 연구원. 1986년 9월 ~ 현재 부경대학교 교수.

Tel : 051-629-6216  
 E-mail : jeub@pknu.ac.kr