

# 포트폴리오위험의 추정과 분할방법에 관한 연구\*

김상환\*\*

## 〈요 약〉

본 연구는 새로운 VaR 추정모형으로 수정 VaR(modified VaR)을 소개하고, 수정 VaR의 예측 성과를 역사적 시뮬레이션 모형이나 Riskmetrics 등 전통적인 모형들과 비교하였다. 수정 VaR은 분산뿐만 아니라 왜도, 첨도를 VaR 계산에 고려함으로써 금융자산분포의 비대칭성과 꼬리가 굽은 성질이 위험측정치에 반영될 수 있는 장점이 있다. 수정 VaR은 6개국의 주가지수 수익률을 이용한 표본의 예측성과검증에서 다른 모형들에 비해 가장 우수한 예측성과를 보였다. VaR 예측의 독립성검증에서는 Riskmetrics와 GARCH 모형이 우수한 것으로 나타났으나 수정 VaR에 대해서도 독립성이 기각되지 않았다. 특정한 표본을 이용한 예측성과분석에서 나타날 수 있는 data snooping 문제를 해결하기 위해 skew t 분포를 이용한 시뮬레이션분석을 시도하였는데, 시뮬레이션 검증결과에서도 수정 VaR이 가장 양호한 예측성과를 보였다.

포트폴리오 VaR에 대한 표본의 예측성과에서도 수정 VaR은 단일변량모형이나 다변량 정규분포모형에 비해 우수한 성과를 보였다. 다변량 수정 VaR은 포트폴리오 구성자산 간의 선형상관관계뿐 아니라 공왜도(coskewness)와 공첨도(cokurtosis)를 통한 비선형 상호의존관계도 고려할 수 있다는 점에서 포트폴리오 위험에 대한 우수한 예측성과는 당연한 결과라고 할 수 있다. 6개국 주가지수로 구성된 포트폴리오의 VaR을 component VaR로 분할한 실증분석에서는 포트폴리오 VaR의 분할결과가 적극적인 위험관리와 포트폴리오 최적화를 위한 자산재배분에 효과적으로 활용될 수 있음을 확인하였다.

주제어 : 수정 VaR, 한계 VaR, Component VaR, 포트폴리오 위험의 분할, 자산 재배분

논문접수일 : 2009년 06월 17일 논문최종수정일 : 2009년 08월 28일 게재확정일 : 2009년 08월 31일

\* 이 논문을 심사해주신 두 분의 심사위원께 감사드립니다.

\*\* 충북 청주시 흥덕구 성봉로 410 충북대학교 경제학과, E-mail : swkim7@chungbuk.ac.kr.ac.kr

## I. 서 론

VaR(Value at Risk)은 금융자산의 위험수준을 직관적으로 이해하기 쉽게 요약해준다는 장점에 힘입어 1990년대 후반 이후 대표적인 위험측정치표로 널리 활용되고 있다. 실제로 VaR은 1994년 J.P. Morgan의 RiskMetrics 그룹에 의해 소개된 이후 자산운용 회사의 펀드위험관리와 은행의 신용위험관리에 널리 이용되고 있고, 감독당국이 금융기관의 건전성을 평가하는 데에도 활용되고 있다. 특히 2004년 최종안이 확정된 신바젤협약에서 대형금융기관들이 내부 VaR 모형(internal value-at-risk model)을 이용하여 위험수준을 자체적으로 측정토록 함에 따라 VaR에 대한 업계와 감독당국의 관심은 더욱 커지고 있다.

VaR은 시장이 불리한 방향으로 변화할 때 분석대상 포트폴리오에서 일정한 기간(1일 또는 1주일)동안 일정한 신뢰수준(1% 또는 5%)하에서 발생할 수 있는 최대손실가능 금액을 의미한다. 이처럼 VaR의 개념은 일견 매우 간단해 보이지만 VaR을 실제로 추정하기 위해서는 포트폴리오를 구성하는 자산들의 수익률이 미래의 일정기간 동안 어떠한 확률적 분포를 가질 것인가를 예측하여야 하는 어려운 과정을 거쳐야 한다. 금융자산 수익률의 분포는 대부분 비대칭적인 데다가 꼬리가 굵은 성질을 갖고 있어 예측이 어려울 뿐 아니라 VaR 값이 수익률분포의 좌측꼬리 끝부분에서 결정되기 때문에 신뢰할 만한 VaR 추정치를 구하는 작업은 그리 간단치 않다. 여기에서 다수의 금융자산으로 구성된 포트폴리오의 VaR를 추정하는 데에는 포트폴리오 구성자산들간 상호의존관계까지 고려하여야 하는 어려움이 더해진다. 금융자산수익률간 상호의존관계는 다른 경제변수들과는 달리 선형 상호관계(linear association)로는 측정되지 않는 비선형적인 성질을 가지는데 이러한 비선형 상관관계를 계량적으로 측정하기가 쉽지 않기 때문이다.

재무학계는 이러한 통계적 특성들을 반영하기 위해 다변량 GARCH 모형, 몬테카를로 시뮬레이션, 극단치이론(extreme value theory)과 분위수회귀모형(quantile regression) 등 다양한 VaR 추정모형들을 개발하여 왔다. 그러나 이러한 최신 VaR 모형들은 이론적으로 매우 복잡하고 이해하기 어려운 데다 계산하기도 간단치 않아 대부분의 위험관리실무자들은 여전히 경험적 분포(empirical distribution)나 정규분포를 가정한 계산하기 편리한 추정방법을 사용하고 있는 실정이다. 본 연구에서는 VaR 추정과 관련한 통계적 어려움을 해소할 수 있으면서도 계산하고 이해하기 쉬운 Zangari(1996)의 수정 VaR 모형(modified VaR)을 소개하고 예측성과를 검증하기로 한다. 실증분석결과 수정

VaR 모형은 자산수익률 분포의 비대칭성과 꼬리가 굵은 성질을 VaR 계산에 명시적으로 고려함으로써 극단치모형이나 다변량 GARCH 모형 등에 비해 계산하기 편리하면서도 예측의 정확도가 높은 것으로 나타났다. 또한 포트폴리오 위험추정에 필요한 구성자산 간 상호관계를 측정하는 데에 공분산뿐만 아니라 공왜도(coskewness)와 공첨도(cokurtosis)까지 고려함으로써 포트폴리오 위험에 대한 예측력도 우수한 것으로 나타났다.

본 논문은 VaR 측정방법이라는 연구의 범주를 넘어 측정된 VaR을 포트폴리오 최적화를 위한 자산재분배 또는 적극적인 위험관리에 활용하는 방안을 다루고자 한다. 적극적인 펀드관리를 위해서는 포트폴리오 전체의 하방위험에 대한 예측뿐만 아니라 포트폴리오를 구성하는 개별자산이 포트폴리오의 총위험에 어느 정도 기여하는가에 대한 정보도 필요하다. 포트폴리오 구성자산의 위험기여도는 포트폴리오의 위험배분과 모니터링에 필요하고 나아가 금융기관들이 보유자산에 대한 포지션을 조정할 때에도 활용될 수 있다. 본 연구에서는 포트폴리오 위험을 구성자산별로 분할하는 개념인 component VaR을 소개하고 우리나라를 포함한 6개국 주가지수로 구성된 포트폴리오의 위험을 분할해보기로 한다. 외국에서는 component VaR을 포트폴리오 최적화(Yu, Yang and Wong, 2007)와 헤지펀드 위험분석(Peterson and Boudt, 2008) 등에 응용한 연구들이 진행된 반면 국내에서는 이에 대한 연구가 전무한 실정이다. VaR에 관한 국내의 선행연구를 보면, 조담(2004)이 riskmetrics 모형, 한상범(1999), 문성주 외 3인(2003)과 김규형, 이준행(2005)은 극단치모형에 대해 예측성과를 분석하였고, 포트폴리오의 위험추정에 관한 오세경, 문성주(2006)와 이상진, 빈기범(2008)도 특정 모형의 우수한 예측력을 보이는 데에 초점을 두고 있다. 이와 같이 국내 연구는 대부분 VaR 모형 간의 상대적인 예측능력을 비교하는 데에 집중하였고 VaR을 재무관리에 응용하는 방안에 대해서는 관심이 부족하였다.

이 논문의 목적은 첫째, 포트폴리오 위험을 예측함에 있어서 포트폴리오 구성자산간 공분산과 함께 공왜도와 공첨도를 고려한 수정 VaR이 어느 정도 정확도를 갖는가를 실증적으로 검토하는 데에 있다. 둘째 목적은 component VaR 개념을 이용하여 포트폴리오 VaR을 구성자산별로 분할해보고, 포트폴리오관리에의 시사점을 제시하는 데에 있다. 이를 위해 1997년 7월초부터 2008년 12월 말까지의 한국을 포함한 6개국의 주가지수로 구성된 분석자료를 이용한 실증분석을 시도하였고, VaR 모형들의 예측성과를 비교하는 데에 data-snooping 문제로 인한 오류를 배제하기 위해 몬테카를로 시뮬레이션도 실시하였다.

본 연구의 내용은 다음과 같이 구성하였다. 제 II장에서는 수정 VaR 모형과 포트폴리오 위험을 분할하는 방법에 대해 소개하고 계산방법을 정리하였다. 제 III장에서는 수정 VaR의 예측성과를 전통적인 모형들과 비교하였는데, 먼저 개별 금융자산에 대한 예측성과를 분석하였고 다음으로 skew t 분포를 이용한 시물레이션을 통해 예측성과를 분석한 다음 포트폴리오의 위험에 대한 예측성과를 분석하였다. 그리고 정규분포모형과 수정 VaR로 측정한 포트폴리오의 위험을 구성자산별로 분할해보았다. 제 IV장에서는 실증분석결과들을 정리하고 추가적인 연구과제들을 제시하였다.

## II. VaR 모형과 포트폴리오위험의 분할

예측력이 우수한 VaR을 추정하기 위해서는 금융자산 수익률의 통계적 성질을 잘 나타낼 수 있는 분포적 가정이 필요하다. 그러나 금융자산의 분포는 비대칭성, 꼬리가 굵은 성질과 비선형적인 상호관계 이외에 변동성의 밀집현상(volatility clustering) 등 매우 복잡한 통계적 성질을 내포하고 있다. 정규분포나 경험적 분포를 이용한 추정모형은 계산하기 편리하고 이해하기도 쉬운 장점이 있는 반면 금융자산의 분포적 성질을 제대로 반영하지 못한다는 이론적인 한계가 있다. 반면, 다변량 GARCH 모형이나 극단치 확률모형과 Copula 개념을 이용한 추정방법들은 금융자산의 분포적 성질을 엄밀하게 고려할 수 있는 장점은 있지만 계산하고 이해하기 어려울 뿐 아니라 여러 가지 추정방법들 중 어떤 것이 우수한가에 대해 아직 학술적 논란이 계속되고 있다. 예를 들어 극단치모형의 경우 GPD, GED 등 여러 분포들이 제시되고 있고 꼬리지수(tail index)를 추정하는 데에도 여러 가지 모수적 또는 비모수적 추정방법들이 소개되고 있다. 설사 극단치이론과 Copula를 이용하여 VaR을 추정할 수 있는 우수한 모형을 발견하였다 하더라도 그 예측결과가 단순한 정규분포모형이나 경험적 분포모형에 비해 우월할 것이라는 보장도 없다. 다변량 GARCH 모형이나 극단치모형을 소개하는 논문에서는 대체로 자신들이 주장하는 모형들이 단순한 형태의 전통적인 모형에 비해 우수한 예측성과를 보인다는 실증분석결과를 제시하고 있지만 그렇지 않다는 연구결과도 보고되고 있다. 예를 들어 이근영(2006)에서는 극단치이론에 의한 VaR 모형의 예측성과가 전통적인 VaR 모형에 비해 오히려 나쁘게 나타났다.

수정 VaR은 Zangari(1996)와 Favre and Galeano(2002)에 의해 소개되었는데, 정규분포가정에 의한 분산-공분산 모형을 분석대상 자료의 왜도와 첨도를 명시적으로 고려할 수 있도록 수정한 것이다. 정규분포의 분위수(quantile)를 Cornish-Fisher 확장(expand-

sion)하여 왜도와 첨도를 고려할 수 있도록 조정하는 방법을 VaR 추정에 응용한 것이 라는 의미에서 Cornish-Fisher VaR이라고도 한다. 수정 VaR을 응용한 선행연구를 보면, Amenc et al.(2003)과 Gueyie and Amvella(2006)가 수정 VaR을 포트폴리오에 대한 평균-VaR 최적화에 이용하였고, Qian(2006)은 수정 VaR로 측정한 포트폴리오 위험을 구성자산별로 분할하는 방법을 실증적으로 시도한 바 있다.

본 연구는 수정 VaR의 예측성과를 전통적인 VaR 모형과 비교하고 수정 VaR로 측정한 가상포트폴리오의 위험을 구성자산별로 분할하는 데에 목적이 있으므로 본 장에서는 수정 VaR과 포트폴리오 위험의 분할방법에 대해 자세하게 설명하고, 수정 VaR과 비교하기 위한 VaR 모형들에 대해서는 이미 많은 선행연구에서 소개된 바 있으므로 간단하게 수식만 제시하기로 한다.

### 1. VaR 추정모형

정규분포를 가정한 VaR 추정식은 다음과 같이 금융자산 수익률의 평균  $\mu$ 과 분산  $\sigma^2$ 만으로 간단하게 계산할 수 있다.

$$VaR(\alpha) = -\mu - z_\alpha \sigma \tag{1}$$

여기에서  $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ 는 표준정규분포의  $\alpha$ -th 분위수를 나타내고,  $\Phi(\cdot)$ 는 표준정규분포의 분포함수를 나타낸다. 정규분포모형은 이처럼 계산하기 편리한 반면 포트폴리오 수익률분포의 비대칭성과 꼬리가 굵은 성질이 전혀 반영되지 못하는 한계가 있다. Zangari(1996)는 위의 식에서 정규분포 분위수  $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ 를 포트폴리오 수익률분포의 왜도  $s$ 와 첨도  $\kappa$ 를 반영하여 수정함으로써 포트폴리오 분포의 비정규성을 위험추정에 반영하는 방법을 제안하였다.

$$VaR(\alpha) = -\mu - z_\alpha^{CF} \sigma \tag{2}$$

정규분포의 분위수  $z_\alpha$ 를 대체한  $z_\alpha^{CF}$ 는 다음과 같이 수익률분포의 왜도와 첨도를 명시적으로 포함하여 계산된다.

$$z_\alpha^{CF} = z_\alpha + \frac{1}{6}(z_\alpha - 1)s + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha)\kappa - \frac{1}{36}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha)s^2 \tag{3}$$

이는 Cornish-Fisher 전개를 이용하여 포트폴리오의 실제 확률분포함수의 역함수, 즉 분위수함수(quantile function)를 근사화하도록 계산된 것이다.<sup>1)</sup> 왜도와 첨도가 0일 경우(즉, 포트폴리오 수익률이 정규분포를 따를 경우) 수정 VaR은 정규분포 VaR과 일치함을 알 수 있다. 또한 수정 VaR은 수익률분포의 왜도와 첨도를 대수적으로(analytically) 위험계산식에 반영함으로써 빠른 계산이 가능하다.

이제  $n$ 개의 금융자산에 대해  $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)'$ 의 비중으로 투자한 포트폴리오에 대한 수정 VaR을 계산하기로 하자. 포트폴리오 구성자산의 수익률은 평균이  $\mu$ , 분산이  $\Sigma$ 인 정상적(stationary) 분포를 갖는 확률벡터  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)'$ 로 나타내기로 한다. 포트폴리오 수익률  $r_p$ 는 평균이  $w' \mu$ 이고 분산이  $\sigma_p^2 = w' \Sigma w$ 인 분포를 따른다. 수정 VaR 식에 대입할 포트폴리오 분포의 왜도  $s_p$ 와 첨도  $\kappa_p$ 를 계산하기 위해서는 먼저 구성자산 수익률벡터  $r$ 의 공왜도(co-skewness)행렬  $M_3$ 과 공첨도(co-kurtosis)행렬  $M_4$ 을 구하여야 한다.

$$M_3 = E[(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)'] \quad (4)$$

$$M_4 = E[(r - \mu)(r - \mu)' \otimes (r - \mu)' \otimes (r - \mu)']$$

여기에서  $\otimes$ 는 Kronecker 곱을 나타낸다. 포트폴리오 수익률  $r_p$ 의 왜도  $s_p$ 와 첨도  $\kappa_p$ 는 다음과 같이 계산한다.

$$s_p = \frac{m_3}{\sigma_p^3}, \quad \kappa_p = \frac{m_4}{\sigma_p^4} - 3 \quad (5)$$

여기에서 포트폴리오 수익률  $r_p = w' r$ 의 3차 모멘트와 4차 모멘트는 구성자산 수익률벡터  $r$ 의 공왜도행렬과 공첨도행렬을 이용하여 다음과 같이 계산한다.

$$m_3 = w' M_3 (w \otimes w) \quad (6)$$

$$m_4 = w' M_4 (w \otimes w \otimes w)$$

1) Cornish-Fisher 전개는 포트폴리오 수익률의 “실제” 분포(“true” distribution)를 정규분포의 시리즈 전개(series expansion)로 근사화하는 방법이다. 본 논문에는 Cornish-Fisher 전개의 4개 항만을 이용하였고, 표본크기가  $n$ 일 때 근사화(approximation)의 오차는  $O(n^{-3/2})$ 이다. 자세한 사항은 Johnson and Kotz(1970)을 참조하기 바란다.

따라서 수정 VaR은 구성자산 간의 상관계수뿐만 아니라 공왜도와 공침도와 같은 높은 차수의 상호모멘트(cross-moment)를 통해 구성자산 수익률 간의 비선형 의존성(nonlinear dependence)을 고려함으로써 포트폴리오 위험에 대한 예측력을 높일 수 있게 됨을 알 수 있다.

수정 VaR로 측정된 포트폴리오 위험의 경우에는 개별자산에 대한 투자비중에 대해 대수적인 편미분이 가능하므로 “component VaR”를 계산하는 데에도 편리한 장점이 있는데, 이에 대해서는 다음에 설명하기로 하고 이하에서는 수정 VaR과 비교하기 위한 VaR 모형들을 간단하게 설명하기로 한다. 정규분포모형(또는 분산-공분산 모형)은 식 (1)과 같이 계산함은 이미 설명하였다. 역사적 시물레이션모형(historical simulation VaR)은 과거 수익률데이터를 크기순으로 나열한 다음  $n(\text{표본크기}) \times \alpha(\text{유의수준})$  번째 위치한 수익률 관측치를 유의수준  $\alpha$ 의 VaR로 이용한다.(이하에서는 HS모형으로 표기함) 정규분포모형과 HS 모형은 표본기간 동안 금융자산 수익률의 분산이 일정하다는 가정을 전제로 하는데, 금융자산 수익률의 시변변동성(time-varying volatility)을 고려하기 위해서는 Riskmetrics 모형과 GARCH 모형이 많이 이용된다.

Riskmetrics 모형은 시변변동성을 다음의 EWMA(exponentially weighted moving average)방법으로 추정하며

$$h_{i,t} = \lambda h_{i,t-1} + (1-\lambda) \epsilon_{i,t-1}^2 \tag{7}$$

GARCH 모형은 다음과 같은 모형을 이용하여 추정한다.

$$h_{i,t} = \alpha_i + \beta_i h_{i,t-1} + \gamma_i \epsilon_{i,t-1}^2 \tag{8}$$

여기에서  $\epsilon_{i,t}$ 는 금융자산  $i$ 의 수익률의 평균차감 수익률(demeaned return)을 나타내며  $\lambda$ 는 0.94로 설정하는 것일 일반적이다. Riskmetrics 모형은 VaR 식 (1)에서 표본편차  $\sigma$  대신 식 (7)으로 측정된 시변변동성  $\sqrt{h_{i,t}}$ 을, GARCH 모형은 식 (8)로 측정된 변동성을 대입하여 VaR을 계산한다.

## 2. 포트폴리오 VaR의 분할

포트폴리오 전체에 대해 측정된 위험을 구성자산별로 분석하는 데에는 특정한 구성

자산에 한 단위 더 투자하였을 때 포트폴리오 전체의 위험이 어느 정도 변화하는가를 측정하는 한계 VaR(marginal VaR)이나 포트폴리오 위험을 구성자산별로 분할하여 구성자산 각각의 위험기여도를 측정하는 component VaR이 주로 이용된다. 그런데, 한계 VaR과 component VaR은 별개의 위험분할개념이 아니라 한계 VaR에 구성자산의 투자비중을 곱하면 구성자산별 위험기여도 또는 “component VaR”이 계산된다(Garman, 1997; Gouieroux et al., 2000; Yamai and Yoshiba, 2002; Hallerbach, 2002).

개별자산의 위험기여도 측정은 실용적인 중요성으로 다양한 실증연구에서 다루어졌다. Mausser and Rosen(1998)은 시뮬레이션을 통해 포트폴리오 VaR을 분할하는 방법을 제시하고, 외환포트폴리오와 주식옵션 포트폴리오에 대한 실증분석에서 자신들이 제시한 시뮬레이션방법을 모수적인 측정방법과 비교하였다. 이론적으로는 옵션 포트폴리오와 같이 손실분포의 비대칭성이 심한 경우에는 시뮬레이션방법이 우수할 것으로 예상되지만 실제로는 포트폴리오 위험을 일관되게 측정하지 못하는 결과가 나타났다. Qian (2006)은 1926년 1월부터 2004년 6월까지를 표본기간으로 S&P 500지수에 60%, Ibbotson의 장기국채지수에 40%를 투자한 포트폴리오를 대상으로 VaR 분할을 시도하였다. 그는 수학적으로 정의된 한계 VaR과 component VaR이 “포트폴리오의 잠재적 손실에 대한 개별자산의 예상기여도”라는 경제적 의미에 부합하는 결과를 보이는 동시에 위험예산배분(risk budgeting)에도 효과적으로 활용될 수 있음을 보였다. Yu, Yang and Wong (2007)은 새로운 금융자산을 추가하여 포트폴리오의 샤프비율을 최대화하고자 할 때 component VaR을 이용하는 방법을 제시하였고, Peterson and Boudt(2008)와 Peterson and Croux(2008)는 헤지펀드로 구성된 포트폴리오의 위험을 분할하는 실증분석을 시도한 바 있다.

### 1) 정의와 경제적 해석

한계 VaR(marginal VaR)은 개별자산 $i$ 에 대한 투자비중  $w_i$ 의 변화에 따른 포트폴리오 VaR의 변화로 정의되며, 자산  $i$ 에 대한 한계 VaR을  $M - VaR_i$ 로 표기하면 이는 수학적으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$M - VaR_i \equiv \frac{\partial VaR}{\partial w_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

한계 VaR은 어떤 개별자산에 대한 투자를 한 단위 늘렸을 때 전체 포트폴리오 위험



이 높아지는 정도를 측정한다.

포트폴리오 위험을 구성자산별로 분할하는 데에는 component VaR( $C - VaR_i$ 로 표기)이 이용되며 다음과 같이 한계 VaR에 투자비중을 곱하여 계산된다.<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned}
 C - VaR_i &\equiv \frac{\partial VaR}{\partial w_i} \times w_i, \quad i=1, 2, \dots, n \\
 &= M - VaR_i \times w_i
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

$n$ 개의 금융자산으로 구성된 포트폴리오 전체에 대한 VaR은 개별자산 각각에 대해 계산된  $n$ 개의 VaR들의 합과 일치하지 않음은 이미 잘 알려져 있다. 그러나  $n$ 개의 자산 각각에 대해 계산된 식 (10)의 component VaR을 합하면 포트폴리오 전체의 VaR과 일치하게 된다. 이는 포트폴리오 VaR이 투자비중  $w$ 에 대해 1차 동차함수(linear homogeneous function)이므로(Litterman(1996)) 오일러정리를 이용한 다음의 관계가 성립되기 때문이다.

$$VaR = \sum_{i=1}^n \frac{\partial VaR}{\partial w_i} \times w_i = \sum_{i=1}^n C - VaR_i$$

위에서 포트폴리오 VaR의 구성자산별 기도여를 포트폴리오 위험에 대한 편미분으로 정의하였는데, Sharpe(2002)는 이러한 수학적인 분할방법으로는 경제적 의미를 갖는 요인별 위험을 측정할 수 없기 때문에 포트폴리오의 위험예산(risk budget) 설정에 활용하기 어렵다고 주장하였다. Chow and Kritzman(2001)도 포트폴리오의 분산에 의해 결정되는 VaR의 경우에는 분산이 가법적(additive)이지 않기 때문에 포트폴리오의 위험을 구성자산별로 구분할 수 없다고 주장하였다. 이처럼 위에서 제시된 위험분할방법과 이를 활용한 위험예산할당에 대해 회의적인 견해가 제시되고 있는 것은 이러한 위험분할방법에 대해 수학적 정의를 넘어 재무이론적인 해석이 제시되지 못하였기 때문이다.

2) 포트폴리오 VaR의 분할에 관한 연구문헌들에는 Incremental VaR(일반적으로  $I - VaR_i$ 로 표기함)이라는 개념도 소개되고 있다. Incremental VaR은 기존의 포트폴리오  $P$ 에 새로운 자산  $a$ 를 한 단위 추가함에 따른 포트폴리오의 VaR의 변화를 측정한다.

$$I - VaR_i = VaR_{P+a} - VaR_P$$

여기에서  $VaR_{P+a}$ 는 새로운 자산  $a$ 를 추가한 이후의 포트폴리오 VaR을 나타내고  $VaR_P$ 는 기존의 포트폴리오  $P$ 의 VaR을 나타낸다.

이러한 이론적인 공백은 Gourioux et al.(2000)과 Qian(2006)이 식 (9)과 식 (10)의 수학적 정의에 다음과 같은 재무이론적인 의미를 부여함으로써 해결되었다.

먼저 자산  $i$ 에 대한 한계 VaR은 포트폴리오가 VaR 수준의 매우 낮은 수익률을 보일 때 해당 자산에 대한 예상수익률로 해석할 수 있다.

$$M - VaR_i = -E(r_i | r_p = -VaR)$$

즉, 포트폴리오 전체의 투자성과가 부진할 때 수익률악화가 심할 것으로 예상되는 자산에 대한 투자비중이 높을 경우 포트폴리오 수익률은 더욱 낮아지게 될 것이고 결국 포트폴리오 VaR을 높이게 될 것이다. 이에 반해 포트폴리오를 구성하는 대부분의 자산들이 매우 나쁜 투자성과를 보이는 상황에서도 수익률하락이 소폭에 그치는 안정적인 자산에 대해서는 투자비중을 늘림으로써 포트폴리오 전체의 VaR을 낮추게 될 것이며, 따라서 이러한 자산의 한계 VaR은 작은 값을 갖게 될 것이다.

마찬가지로 자산  $i$ 에 대한 component VaR은 포트폴리오 수익률이 VaR 수준으로 저조할 때 해당 자산에  $w_i$ 만큼 투자함에 따른 수익률 손실분이 포트폴리오 전체의 수익률손실에서 차지하는 비중을 나타낸다.

$$C - VaR_i = -w_i E(r_i | r_p = -VaR) = -E(w_i r_i | r_p = -VaR) \quad (11)$$

한계 VaR이 높은 자산에 대한 투자비중이 높을 경우 해당 자산에서의 투자손실이 전체 VaR에서 차지하는 비중 즉 component VaR은 당연히 높아지게 될 것이다.

## 2) 계산방법

포트폴리오 위험을 측정하는 표준편차와 VaR은 모두 투자비중에 대해 1차 동차함수이므로 개별자산별로 위험을 구분할 수 있다. 표준편차  $\sigma_p = (w' \Sigma w)^{1/2}$ 의 경우 자산  $i$ 의 기여도는  $\sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij} / \sigma_p$ 와 같이 간단하게 계산할 수 있다. 그러나 VaR 모형들은 대부분 투자비중  $w_i$ 의 대수적인 함수로 나타낼 수 없기 때문에  $w_i$ 에 대한 편미분을 대수적으로 계산하기는 일반적으로 매우 어렵다. 그러나 식 (1)의 정규분포모형은 포트폴리오 수익률의 평균과 분산에 의해서만 결정되므로 다음과 같이 편미분을 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial VaR(\alpha)}{\partial w_i} = -\mu_i - z_\alpha \frac{\sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij}}{\sigma_p} \tag{12}$$

수정 VaR도 다소 복잡하기는 하지만 투자비중에 대한 대수적인 편미분이 가능하므로 component VaR을 계산할 수 있다. 수정 VaR은 정규분포모형과는 달리 분위수  $z_\alpha^{CF}$ 가 포트폴리오 수익률  $w'r$ 의 왜도와 첨도의 함수이므로 다음과 같은 형태의 편미분으로 한계 VaR을 계산하여야 한다.

$$\frac{\partial VaR(\alpha)}{\partial w_i} = -\mu_i - z_\alpha^{CF} \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} - \sigma_p \frac{\partial z_\alpha^{CF}}{\partial w_i} \tag{13}$$

여기에서  $\frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} = \frac{\sum_{j=1}^n w_j \sigma_{ij}}{\sigma_p}$  이고  $\frac{\partial z_\alpha^{CF}}{\partial w_i}$  는 다음과 같고

$$\frac{\partial z_\alpha^{CF}}{\partial w_i} = \frac{1}{6}(z_\alpha - 1) \frac{\partial s_p}{\partial w_i} + \frac{1}{24}(z_\alpha^3 - 3z_\alpha) \frac{\partial \kappa_p}{\partial w_i} - \frac{1}{18}(2z_\alpha^3 - 5z_\alpha) s_p \frac{\partial s_p}{\partial w_i}$$

왜도  $s_p$ 와 첨도  $\kappa_p$ 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \partial s_p / \partial w_i &= (2\sigma_p^3 \partial m_3 / \partial w_i - 3m_3 \sigma_p \partial \sigma_p^2 / \partial w_i) / 2\sigma_p^6 \\ \partial \kappa_p / \partial w_i &= (\sigma_p^2 \partial m_4 / \partial w_i - 2m_4 \partial \sigma_p^2 / \partial w_i) / \sigma_p^6 \end{aligned}$$

위식에서 포트폴리오 수익률의 모멘트  $m_3$ 와  $m_4$ 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$\partial m_3 / \partial w_i = 3(M_3(w \otimes w))_i, \quad \partial m_4 / \partial w_i = 4(M_4(w \otimes w \otimes w))_i$$

### III. 실증분석

#### 1. 분석자료

분석자료는 우리나라를 포함한 6개국의 일별 주가지수 수익률을 이용하였고, 표본기

간은 1997년 7월 3일부터 2008년 12월말까지로 동아시아 금융위기와 미국의 서브프라임모기지 부실화에 따른 금융위기국면이 분석에 포함되었다. 분석대상 주가지수로는 우리나라의 KOSPI, 중국의 SSEI(상해주식거래소 지수), 인도의 BSE 30 등 3개의 신흥시장 지수와 미국 다우지수, 영국 FTSE와 일본의 Nikkei225 등 3개의 선진국 시장 지수를 이용하였다. 2006년 이후 크게 증가한 해외펀드 설정현황을 살펴보면 선진국 시장에 비해 중국, 브라질 등 신흥시장국에 대한 투자가 더 활발한 것으로 나타났다. 그런데 신흥시장국 중 브라질과 러시아는 주로 석유와 광물 등 원자재산업에 대한 투자가 대부분이어서 주식시장을 분석하고자 하는 본 연구에는 중국과 인도가 적절한 것으로 판단하였다. <표 1>에 나타난 바와 같이 선진국시장과 신흥시장국간의 상관관계수가 낮은 점을 고려할 때 본 연구는 국제분산투자를 통한 포트폴리오 위험관리라는 현실적인 의미를 갖는다고 할 수 있다. 본 연구에서는 포트폴리오에 대한 VaR을 추정하므로 6개국 시장 중 하나의 시장이라도 폐장하는 거래일은 표본에서 제외하여 총 2355개의 일별 수익률을 분석하였다.

<표 1> 분석대상 주식시장 간 상관계수

1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지를 표본기간으로 미국(다우지수), 영국(FTSE), 일본(Nikkei225), 한국(KOSPI), 중국(SSEI)과 인도( BSE 30) 등 6개국의 주가지수 수익률들(로그변화율로 계산)에 대해 측정된 상관관계를 정리하였다.

	미국	영국	일본	한국	중국	인도
미국 Dow Jones	1.00	0.56	0.26	0.24	0.03	0.22
영국 FTSE	-	1.00	0.43	0.323	0.07	0.29
일본 Nikkei225	-	-	1.00	0.51	0.18	0.38
한국 KOSPI	-	-	-	1.00	0.11	0.37
중국 SSEI	-	-	-	-	1.00	0.17
인도 BSE 30	-	-	-	-	-	1.00

요약 통계량을 정리한 <표 2>를 보면, 선진국 시장과 신흥시장국 시장의 통계적 성질이 뚜렷한 차이를 보이고 있다. 평균수익률을 보면, 미국과 영국은 표본기간 중 거의 투자수익을 내지 못하고 있고 특히 일본은 상당히 큰 폭의 손실을 보이고 있는 반면, 신흥시장국들은 매우 우수한 투자성적을 보이고 있다. 표준편차로 나타난 변동성에서도 뚜렷한 차이를 보여, 선진국시장에 비해 신흥시장국의 변동성이 큰 것으로 나타났다. 특히 우리나라는 중국이나 인도에 비해서도 변동성이 높게 나타났다. 왜도는 대부분 음의 값을 가져 큰 폭의 주가상승보다는 큰 폭의 주가하락이 더 자주 발생하는 주

식시장의 일반적인 성질을 그대로 대변하고 있다. 또한 모든 시장에서 4이상의 첨도를 보여 극단적인 주가의 움직임이 빈번하게 발생하였음을 보여주고 있다.

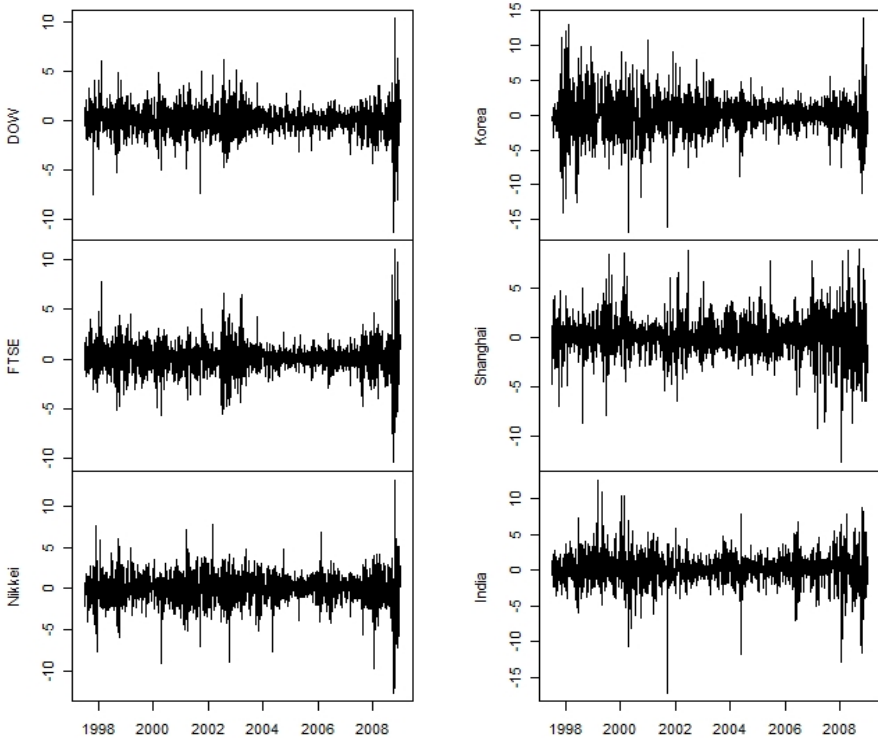
<표 2> 분석대상 주식시장의 기초통계량

이 표는 1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지의 6개국 주가지수 수익률들에 대한 기초통계량을 정리하였다.

	평균	중위수	표준편차	왜도	첨도
미국 Dow Jones	0.0045	0.0374	1.3733	-0.2820	8.1736
영국 FTSE	-0.0033	0.0233	1.4510	0.0438	7.6807
일본 Nikkei 225	-0.0350	-0.0055	1.7691	-0.5384	6.7027
한국 KOSPI	0.0157	0.0911	2.4636	-0.2563	5.4259
중국 SSEI	0.0180	0.0184	1.8458	-0.0604	4.4468
인도 BSE 30	0.0343	0.1099	1.9903	-0.4493	7.4280

[그림 1] 분석대상국가의 일별수익률

이 그림은 1997년 7월 3일부터 2008년 12월말까지 본 연구의 분석대상인 6개국의 일별 주가지수 수익률을 그린 것이다.



[그림 1]은 분석대상 국가의 주가지수 수익률을 그린 것인데, 신흥시장국의 변동성이 선진국시장에 비해 상대적으로 높은 것을 확인할 수 있다. 특히 우리나라는 외환위기 직후 2000년에 이르기까지 매우 큰 변동성을 보인데다 2008년 하반기부터는 미국의 서브프라임모기지 부실화로 인하여 국제금융시장이 불안해지자 다시 변동성이 크게 높아졌고 주가변동폭도 다른 국가에 비해 큰 것으로 나타난다. 선진국시장은 동아시아 위기로 인한 충격은 크지 않았으나 2008년 미국의 금융위기 이후로는 매우 큰 폭의 변동성을 보이고 있다.

## 2. VaR 예측성과분석

본 절에서는 수정 VaR의 예측능력을 HS 모형, 정규분포모형, Riskmetrics와 GARCH 모형과 비교·검토하기로 한다. VaR 모형의 예측성과를 평가한 기존 연구들은 대부분 특정한 표본에 대한 VaR의 예측성과를 분석하는 방법을 이용하고 있다. 그러나 이러한 방식에 의한 예측성과 검증결과는 검증에 이용된 표본에 대해서만 성립될 뿐 통계적 성질이 다른 표본에서는 전혀 다른 결과가 나타날 수 있다는 data snooping 편의에서 자유로울 수 없다. 따라서 본 논문에서는 앞에서 소개한 6개국의 주가지수 수익률에 대해 VaR 예측성과를 검토하는 동시에 skew t 분포를 이용한 몬테카를로 시뮬레이션 분석도 시도하였다.

### 1) 표본자료에 대한 VaR 예측성과분석

수정 VaR의 예측성과를 다른 추정방법과 비교·분석하기 위해 다음과 같이 표본의 기간(out-of-sample)에 대한 사후검증방법을 이용하였다. 과거 1년간의 데이터를 이용하여 VaR을 측정하는 것이 일반적이므로 VaR을 추정하기 위한 윈도우는 250일로 설정하였다. 최초 관찰치인 1997년 7월 3일부터 1998년 9월 21일까지의 250거래일 자료를 이용하여 1998년 9월 22일에 대한 VaR 예측치를 계산하고 그날의 실제 손실값과 비교하였다. 이후 2008년 12월 29일까지 하루씩 윈도우를 전진하면서 윈도우 다음날에 대한 VaR 예측치를 계산하고, 이를 실제의 손실과 비교하는 방식으로 예측성과를 평가하였다. VaR 모형의 예측성과를 검증하는 방법으로는 Christoffersen(1998)의 무조건부 실패율에 대한 우도비검증통계량(likelihood ratio test statistic)과 예측실패의 독립성에 대한 검증통계량을 이용하였다. 이 검증방법은 VaR 모형에 관한 국내외 선행연구들에 자세하게 설명되어 있으므로 본 연구에서는 간단한 설명을 부록에 실었다.

<표 3>의 예측성과 검증결과를 보면 무조건부 실패율에서는 수정 VaR 모형이 가장

우수한 성과를 보였고, 실패사건의 독립성측면에서는 GARCH 모형, Riskmetrics와 수정 VaR 모형이 우수한 것으로 나타났다. 먼저, 표본의 실패율을 보면 수정 VaR을 제외한 모든 모형들이 양의 편의(positive bias)를 갖는 것으로 나타났다. 특히 정규분포 모형과 Riskmetrics의 편의가 큰 것으로 나타났는데, 이는 주식수익률이 음의 방향으로 비대칭적으로 분포되어 있고 분포의 꼬리가 굵은 성질을 갖는다는 점을 고려하지 못하여 지나치게 작은 VaR 값을 제공하기 때문이다. HS 모형과 GARCH 모형도 실패율이 유의수준 0.01보다 일관되게 큰 값을 갖는 것으로 나타났는데, 이러한 결과는 본 연구에서만 나타난 것이 아니라 VaR 예측에 관한 대부분의 실증분석에서 나타나는 일반적인 현상이다. 이러한 현상은 Inui, Kijima and Kitano(2005)에서 엄밀하게 분석되었는데, 이들은 전통적인 VaR 모형이 유의적인 양의 편의를 가지며, 편의의 크기는 첨도가 클수록, 유의수준이 작을수록 그리고 표본의 크기가 작을수록 커짐을 보였다. 우리나라의 자본시장자료를 이용한 이근영(2006)과 이상진, 빈기범(2008)의 VaR 예측성과분석에서도 유의수준 0.01인 VaR의 경우 양의 편의가 나타나고 있다. 그러나 수정 VaR의 경우 표본의 실패율이 유의수준 0.01에 가장 근접하고 한국과 일본시장에 대해서는 실패율이 유의수준에 비해 낮게 측정될 정도로 보수적인 위험측정치를 보여주고 있다. 이상에서 살펴본 바와 같이 수정 VaR은 실패율이 유의수준에 근접한 반면 다른 모형들은 모두 편의를 갖는다는 사실은 실패율에 관한 우도비검증결과에서도 그대로 나타나, 수정 VaR에 대해서는 귀무가설 “무조건부 실패율 = 유의수준”이 기각되지 않았지만 나머지 모형들에 대해서는 모두 기각되는 결과가 나타났다.

다음으로 실패사건의 독립성에 대한 검증결과를 보면, GARCH 모형과 Riskmetrics가 가장 우수한 성과를 보이는 것으로 나타났다. 이는 이들 모형들이 변동성의 시간에 따른 변화를 추정함으로써 시간에 따른 위험수준의 변화를 적시에 포착할 수 있기 때문이다. 수정 VaR의 경우에는 추정윈도우 기간동안 나타날 수 있는 변동성의 변화를 반영하지 못하기 때문에 우도비검증의  $p$ -값이 미국, 인도를 제외한 나머지 시장에서 GARCH 모형과 Riskmetrics에 비해 낮게 나타났다. 이처럼 수정 VaR이 GARCH 모형에 비해  $p$ -값이 다소 낮게 나타나는 했지만 그렇다고 수정 VaR의 독립성이 기각된 것은 아니다. 실제로 수정 VaR에 대한 독립성검증결과를 보면 유의수준을 10%로 해도 일본에서만 기각될 뿐 나머지 시장에서는 기각되지 않았다. 수정 VaR에서 실패사건의 독립성이 기각되지 않는 것은 윈도우 기간에 대해서는 변동성의 변화를 고려할 수 없지만 윈도우를 하루씩 전진시킴으로써 전체 표본기간에서 나타나는 변동성의 변화는 수정 VaR에도 반영될 수 있기 때문이다. 검증결과를 전체적으로 종합하면, 수정 VaR은 표본의 실패율이 가장 정확한 데다 독립성도 일본을 제외하고는 기각되지 않고 미

국과 인도시장에서는 가장 독립적인 것으로 나타난 점 등을 고려할 때 수정 VaR 모형의 위험예측능력이 가장 우수한 것으로 평가할 수 있다.

<표 3> VaR의 예측성과분석(유의수준 $\alpha = 0.01$ )

최초 관찰치인 1997년 7월 3일부터 1998년 9월 21일까지의 250거래일 자료를 이용하여 1998년 9월 22일에 대한 VaR 예측치를 계산하고 그날의 실제 손실값과 비교하였다. 이후 2008년 12월 29일까지 하루씩 윈도우를 전진하면서 윈도우 다음날에 대한 VaR 예측치를 계산하고, 이를 실제의 손실과 비교하는 방식으로 VaR 예측성과를 평가하였다. 표본의 예측실패율은  $t \sim t+249$ 기간의 일별 수익률을 이용한  $t+1$ 기에 대한 VaR 예측치보다  $t+1$ 기의 실제 수익률이 더 낮은 실패횟수를 VaR 예측횟수로 나눈 비율을 나타낸다.  $LR_{UC}$ 는 무조건부실패율이 유의수준 0.01과 일치하는 지를 검증하기 위한 우도비검증통계량이며,  $LR_{IND}$ 는 VaR 모형의 예측실패사건의 독립성에 대한 우도비 검증통계량을 나타낸다.

		표본외 예측실패율	$LR_{UC}(p\text{-value})$	$LR_{IND}(p\text{-value})$
한국	HS 모형	0.0138	2.71(0.0995)	3.31(0.0688)
	정규분포모형	0.0223	23.93(0.0000)	8.24(0.0041)
	Riskmetrics	0.0200	16.34(0.0000)	1.17(0.2803)
	GARCH 모형	0.0171	8.84(0.0029)	0.19(0.6642)
	수정 VaR	0.0086	0.47(0.4933)	2.04(0.1535)
미국	HS 모형	0.0195	14.95(0.0001)	1.28(0.2575)
	정규분포모형	0.0223	23.93(0.0000)	0.68(0.4107)
	Riskmetrics	0.0204	17.76(0.0000)	3.24(0.0718)
	GARCH 모형	0.0195	14.96(0.0001)	1.28(0.2575)
	수정 VaR	0.0109	0.18(0.6738)	0.53(0.4664)
영국	HS 모형	0.0181	11.13(0.0008)	4.39(0.0361)
	정규분포모형	0.0237	29.02(0.0000)	7.21(0.0073)
	Riskmetrics	0.0238	29.02(0.0000)	2.00(0.1576)
	GARCH 모형	0.0162	6.78(0.0092)	2.31(0.1286)
	수정 VaR	0.0152	4.96(0.0259)	2.67(0.1017)
일본	HS 모형	0.0147	4.15(0.0417)	6.48(0.0109)
	정규분포모형	0.0209	19.24(0.0000)	9.38(0.0022)
	Riskmetrics	0.0214	20.75(0.0000)	17.17(0.0000)
	GARCH 모형	0.0152	4.96(0.0259)	2.68(0.1017)
	수정 VaR	0.0081	0.84(0.3587)	13.45(0.0002)
상해	HS 모형	0.0143	3.40(0.0653)	0.54(0.4631)
	정규분포모형	0.0195	14.96(0.0001)	0.04(0.8426)
	Riskmetrics	0.0181	11.13(0.0008)	0.11(0.7349)
	GARCH 모형	0.0138	2.71(0.0995)	0.84(0.3599)
	수정 VaR	0.0119	0.71(0.4007)	1.01(0.3158)
인도	HS 모형	0.0171	8.84(0.0029)	8.68(0.0032)
	정규분포모형	0.0233	27.28(0.0000)	4.55(0.0330)
	Riskmetrics	0.0209	19.24(0.0000)	0.95(0.3294)
	GARCH 모형	0.0190	13.63(0.0002)	1.41(0.2357)
	수정 VaR	0.0128	1.56(0.2117)	0.80(0.3720)



## 2) VaR 예측성과에 관한 시뮬레이션분석

특정한 표본에 국한되지 않고 일반화할 수 있는 예측성과검증을 위해 skew t-분포를 가정한 시뮬레이션분석을 시도하였다. skew t-분포는 Hansen(1994)이 자산수익률을 모형화하는 데에 처음 적용한 이후 Azzalini and Capitanio(2003), Bauwens and Laurent (2005)를 포함한 많은 실증연구문헌에서 비대칭적이고 꼬리가 굽은 자산수익률의 분포를 모형화하는 데에 응용된 바 있다. skew t-분포는 몇 가지 방법으로 정의할 수 있는데, 본 연구에서는 다음과 같은 밀도함수정의를 이용하기로 한다.

$$f(x) = \frac{2}{\gamma + \frac{1}{\gamma}} \left[ t_{\nu}(\gamma x) I(x < 0) + t_{\nu}\left(\frac{x}{\gamma}\right) I(x \geq 0) \right], \gamma > 0$$

여기에서  $I(\cdot)$ 는 지표함수(indicator function)이고,  $t_{\nu}(x)$ 는 자유도가  $\nu$ 인 Student t-분포의 확률밀도함수를 나타낸다. 모수  $\gamma$ 는 왜도를 결정하며  $\gamma=1$ 인 경우 위의 밀도함수는 대칭적인 t-분포의 밀도함수가 되며  $\gamma < 1$ 인 경우는 음의 방향으로,  $\gamma > 1$ 일 때는 양의 방향으로 기울어진 비대칭적 t-분포가 된다. skew t-분포의 꼬리부분은 다음과 같이 Student t-분포의 꼬리부분과 같다.

$$f(x) \sim const \cdot |x|^{-\nu-1}, \quad x \rightarrow \pm \infty$$

따라서 자유도  $\nu$ 가 작을수록 꼬리부분이 굽고 무한대로 커질수록 정규분포와 같이 가는 꼬리형태를 갖게 된다.

<표 4>는 skew t-분포를 따르는 난수(random number)로 표본크기가 1250인 1000개의 표본을 만들어 각 표본에서의 VaR 예측성과를 측정한 결과를 평균한 것이다. 자산수익률에 나타나는 왜도와 첨도가 VaR의 예측성과에 어떠한 영향을 주는가를 분석하기 위해 첨도를 결정하는 자유도  $\nu$ 로 4, 8과  $\infty$ 를 선택하였고, 왜도를 결정하는  $\gamma$ 는 시뮬레이션 표본의 왜도가 -1, 0과 1에 근접한 수준이 되도록 설정하였다. 표에 정리한 표준편차, 왜도와 첨도는 1000개의 표본 각각에 대해 측정한 값들을 평균한 값이며, VaR 모형의 실패율과 무조건부 검증통계량에 대한  $p$ -값도 각각의 표본에 대한 실패율과  $p$ -값을 1000개의 표본에 걸쳐 평균한 값이다. 추정원도수를 250으로 하여 관측치 하나씩 전진하는 방식으로, 즉  $t \sim t + 249, t = 1, \dots, 1000$ 의 관측치를 이용하여 1000개의 VaR 값을 계산하고, 이렇게 계산된 VaR 값을  $t+250$ 기의 주식수익률과 비교하는 방식으로 표본외 실패율과 무조건부검증을 시행하였다. 본 시뮬레이션작업의 설정구조 상

시뮬레이션 자료들이 변동성밀집현상(volatility clustering)이나 시계열 상관관계 등을 전혀 내포하고 있지 않으므로 조건부 독립성검증은 의미가 없어 시행하지 않았고 변동성의 시계열 변화를 포착하는 데에 장점이 있는 GARCH 모형도 비교대상에서 제외하였다.

예측성가에 대한 전반적인 시뮬레이션결과를 요약하면 수정 VaR이 가장 우월한 성과를 보였다고 할 수 있다. 수정 VaR은 침도가 높고 양의 왜도가 있는 표본(자유도 4, 왜도모수 1.2인 표본과 자유도 8, 왜도모수 1.5인 표본)에서는 실패율이 유의수준 0.01을 초과했지만 다른 표본에서는 가장 정확도가 높은 것으로 나타났다. 왜도와 침도를 달리한 9유형의 시뮬레이션 표본에서 수정 VaR에 대한 무조건부검증의  $p$ -값이 평균 10% 이상으로 나타나 귀무가설 “실패율 = 유의수준” 가설이 기각되지 않았다. 그런데, 양의 왜도가 있는 표본에서 실패율이 다소 높게 나타난 것은 1000개의 시뮬레이션 표본 중 일부 표본에서 극단적인 양의 값들이 관측되고 이러한 값들이 3차, 4차 모멘트인 왜도와 침도를 더욱 극단적으로 커지게 함에 따라 왜도와 침도가 명시적으로 계산식에 포함되는 수정 VaR를 왜곡시켰기 때문이다.<sup>3)</sup> 1000개의 표본에 대해 평균한 값을 기록한 <표 4>에는 나타나지 않지만, 양의 왜도를 갖는 1000개의 표본 중 대부분에서는 수정 VaR의 실패율이 유의수준과 거의 일치하는 바람직한 결과를 보였으나 극단적인 양의 값을 포함한 일부 표본에서 매우 높은 실패율이 나타났다. 그런데 이처럼 양의 왜도를 가정한 일부 표본에서 과도한 실패율이 나타나는 것은 수정 VaR을 실제로 사용하는 데에는 큰 문제가 되지 않는다. 대부분의 자산수익률들은 큰 폭의 상승보다는 큰 폭의 하락이 더 자주 관찰되는 음의 왜도를 보이기 때문에 양의 왜도에서 간혹 관찰되는 높은 실패율은 이론적인 면에서 지적될 수는 있겠으나 금융시장 현실에서는 큰 문제가 아닌 것으로 보인다.

정규분포 VaR과 Riskmetrics는 음의 왜도와 높은 침도를 갖는 표본에서 높은 실패율을 보인 반면 낮은 침도와 양의 왜도를 갖는 표본에서는 지나치게 보수적으로 위험을 측정하여 실패율이 유의수준에 비해 낮게 측정되었다. HS 모형은 왜도와 침도에 상관없이 표본의 실패율이 1.36~1.38%로 유의수준에 비해 다소 높게 나타났으나 가장 안정적인 예측성가를 보였다. HS 모형이 시뮬레이션 표본의 분포형태와 상관없이 안정적인 예측성가를 보인 것은 HS 모형의 비모수적(nonparametric) 성질에 기인한 것으로 판단된다.

3) 극단적인 값들로 인해 higher moment가 극단적으로 커지는 문제를 해소하기 위해 Peterson and Kris Boudt(2008)은 수정VaR에 내포된 왜도와 침도를 이상치에 대해 로버스트한 통계량으로 대체하는 방법을 제안하였다. 그러나 주가의 극단적인 움직임 자체가 위험관리에 중요한 분석대상이라는 점에서 이상치를 통계적으로 완화시키는 방법은 바람직하지 않다고 판단하여 본 연구에서는 로버스트 통계량을 이용하는 방법을 시도하지 않았다.

<표 4> VaR 예측성과 시뮬레이션(원도우 = 250)

skew t 분포를 따르는 random number를 이용하여 크기가 1250인 표본을 1000개 만들어 각 표본에서의 VaR 예측성과를 측정하였다. skew t 분포의 자유도  $df$ 는 첨도를 결정하는데, 첨도의 크기에 따른 예측성과의 변화를 살펴보기 위해 자유도는 4, 8과  $\infty$ 를 선택하였다. 왜도를 결정하는 모수인  $\gamma$ 는 왜도가 -1, 0과 1 정도의 값을 갖도록 하는 값으로 결정하였다. 표준편차, 왜도와 첨도는 개별 표본의 표준편차, 왜도와 첨도를 구하여 평균값을 나타낸다. VaR 추정방법의 표본의 실패율과 무조건부 검증통계량에 대한  $p$ -값도 각각의 표본에 대한 실패율과  $p$ -값을 1000개의 표본에 걸쳐 평균한 값이다. 각각의 표본에 대한 VaR은 윈도우를 250으로 하여 관측치 하나씩 전진하는 방식으로 추정하여 개별 표본마다 1000개의 VaR 값이 계산되었고, VaR의 유의수준은 0.01로 설정하였다.

모수설정		$\nu = 4$ $\gamma = .8$	$\nu = 4$ $\gamma = 1$	$\nu = 4$ $\gamma = 1.2$
	표준편차	1.49	1.41	1.46
	왜도	-1.26	-0.04	1.03
	첨도	12.81	8.89	10.41
HS 모형	표본의 실패율	0.0137	0.0136	0.0136
	무조건부검증 $p$ -값	0.3387	0.3487	0.3584
정규분포모형	표본의 실패율	0.0233	0.164	0.010
	무조건부검증 $p$ -값	0.0072	0.1659	0.5376
Riskmetrics	표본의 실패율	0.0281	0.0205	0.0137
	무조건부검증 $p$ -값	0.0004	0.0308	0.3506
수정 VaR	표본의 실패율	0.0102	0.0113	0.0233
	무조건부검증 $p$ -값	0.5216	0.5361	0.3609
모수설정		$\nu = 8$ $\gamma = .6$	$\nu = 8$ $\gamma = 1$	$\nu = 8$ $\gamma = 1.5$
	표준편차	1.40	1.15	1.31
	왜도	-1.10	0.00	0.95
	첨도	2.64	1.44	2.42
HS 모형	표본의 실패율	0.0136	0.0137	0.0136
	무조건부검증 $p$ -값	0.3473	0.3433	0.3544
정규분포모형	표본의 실패율	0.0276	0.0146	0.003
	무조건부검증 $p$ -값	0.0005	0.2836	0.0316
Riskmetrics	표본의 실패율	0.0315	0.0178	0.0048
	무조건부검증 $p$ -값	0.0000	0.0987	0.1414
수정 VaR	표본의 실패율	0.0114	0.0112	0.0180
	무조건부검증 $p$ -값	0.5571	0.5433	0.1602
모수설정		$\nu = \infty$ $\gamma = .5$	$\nu = \infty$ $\gamma = 1$	$\nu = \infty$ $\gamma = 2$
	표준편차	1.35	1.00	1.35
	왜도	-0.78	0.00	0.79
	첨도	0.47	0.00	0.47
HS 모형	표본의 실패율	0.0138	0.0137	0.0136
	무조건부검증 $p$ -값	0.3347	0.3417	0.3446
정규분포모형	표본의 실패율	0.0252	0.0107	0.0000
	무조건부검증 $p$ -값	0.0024	0.5323	0.0000
Riskmetrics	표본의 실패율	0.0285	0.0133	0.0004
	무조건부검증 $p$ -값	0.0004	0.3814	0.0003
수정 VaR	표본의 실패율	0.0125	0.0116	0.0115
	무조건부검증 $p$ -값	0.4637	0.5432	0.4670

### 3. Component VaR 분석결과

앞에서의 예측성과분석에서는 단일 금융자산에 대한 수정 VaR의 예측성과를 분석하였는데, 본 절에서는 6개국 주가지수로 구성된 포트폴리오에 대한 위험예측성과를 검증하기로 한다. 다음으로는 포트폴리오 위험에 대한 구성자산별 기여도를 측정하고 포트폴리오 관리에 대한 시사점을 도출하기로 한다.

#### 1) 포트폴리오 VaR에 대한 예측성과분석

포트폴리오의 VaR을 측정하는 방법은 크게 단일변량모형과 다변량모형으로 구분할 수 있다. 단일변량모형은 포트폴리오를 구성하는 구성자산의 확률적 성질은 고려하지 않고 구성자산 수익률의 가중합(weighted sum)으로 계산된 포트폴리오 수익률만을 이용하여 VaR을 측정하는 방식이다. 반면 다변량모형은 포트폴리오 구성자산의 통계적 성질과 상호종속성을 VaR의 계산에 반영한다. 단일변량모형은 계산하기에 간단한 장점이 있지만 국내외의 실증분석결과에 의하면 다변량모형에 비해 예측성과가 나쁜 것으로 나타났다(Brooks and Persaud, 2003; 이상진, 빈기범, 2008). 이들 선행연구들의 다변량모형은 다변량 GARCH을 이용하고 있다. 본 연구에서는 수정 VaR을 이용하여 포트폴리오 구성자산들의 개별적인 통계적 성질 이외에 공분산, 공왜도(coskewness)와 공첨도(cokurtosis)를 고려한 위험측정방법이 어떠한 예측성과를 갖는가를 분석하기로 한다.

<표 5>는 6개국 주식시장에 동일 비중으로 투자한 포트폴리오에 대한 VaR 예측성과를 검증한 결과인데, 단일변량모형으로는 HS 모형, Riskmetrics와 GARCH 모형을 분석하였고 다변량모형으로는 정규분포모형과 수정 VaR 모형을 측정하였다. 검증결과에 의하면 포트폴리오 VaR에 대한 예측성과에서도 수정 VaR이 가장 우수한 것으로 나타났다. 다음으로 HS 모형이 우수한 예측성과를 보여주고 있다. 개별시장에 대한 표본외 예측성과에서와 마찬가지로 대부분의 모형들에서 표본외 실패율이 유의수준보다 높게 나타났다, 특히 Riskmetrics와 다변량 정규분포모형에서는 실패율과 유의수준과의 차이가 상당히 크게 나타났다. 반면 다변량 수정 VaR은 유의수준보다 실패율이 낮게 나타나 다소 보수적으로 위험수준을 측정하는 것으로 나타났으나 실패율과 유의수준 간의 차이가 다른 모형에 비해 작았다. 예측성과검증에서 흥미로운 점은 추정윈도우를 250일에서 500일로 늘릴 경우 모든 모형의 예측성과가 오히려 나빠지는 것으로 나타났다. 이는 다음기의 위험수준과 거의 상관없는 1년 이상 지난 과거의 시장정보를 예측에 사

용함으로써 오히려 위험예측을 왜곡시키기 때문인 것으로 판단된다.

독립성검증에서는 시간에 따른 변동성의 변화를 반영할 수 있는 GARCH 모형이 가장 우수한 성과를 보일 것으로 예상되지만 실제 검증결과에 의하면 GARCH 모형이 실패사건의 독립성 가설을 가장 유의적으로 기각하는 정반대의 결과가 나타났다. 이는 개별시장에서 강하게 나타나는 시변변동성과 밀집성이 개별수익률을 평균한 동일가중 포트폴리오에서 크게 약화된 데다 추정윈도우인 250일이 변동성 밀집현상을 추정하기에 부족하기 때문인 것으로 판단된다. 추정윈도우를 금융기관들이 통상적으로 사용하는 250일의 2배인 500일로 늘려 예측성과를 분석한 결과에 의하면 GARCH 모형의  $LR_{IND}$  값이 1.83으로 250일 윈도우에서의 9.95에 비해 크게 줄어들어 10% 유의수준에서도 기각되지 않는 것으로 나타났다.

<표 5> 동일비중 포트폴리오에 대한 VaR 예측성과분석

6개국 주식시장에 동일한 비중으로 투자한 포트폴리오의 일별수익률을 대상으로 포트폴리오 VaR을 추정하였다 1997년 7월 3일부터 250개의 일별 주식수익률을 추정윈도우로 1거래일씩 이동하면서 2008년 12월 30일까지 2105회의 포트폴리오 VaR을 추정하여 예측성과를 분석한 다음, 추정윈도우를 500거래일로 늘려 동일한 예측성과분석을 시도하였다. 단일변량모형은 포트폴리오 수익률을 이용하여 VaR을 측정하였고 다변량모형은 포트폴리오의 6개 구성자산 수익률들간의 상호의존관계를 고려하여 측정하였다.

VaR 추정방법		표본외 예측실패율	$LR_{UC}(p\text{-value})$	$LR_{IND}(p\text{-value})$	
추정윈도우 = 250	단일변량 모형	HS 모형	0.0086	0.47 (0.4933)	0.33 (0.5669)
		Riskmetrics	0.0195	14.96 (0.0001)	3.67 (0.0553)
		GARCH 모형	0.0157	5.84 (0.0156)	9.95 (0.0016)
	다변량모형	정규분포모형	0.0223	23.93 (0.0000)	2.48 (0.1150)
		수정 VaR	0.0090	0.21 (0.6480)	1.86 (0.1731)
추정윈도우 = 500	단일변량 모형	HS 모형	0.0162	6.02 (0.0142)	0.40 (0.5269)
		Riskmetrics	0.0210	17.29 (0.0000)	6.69 (0.0097)
		GARCH 모형	0.0162	6.02 (0.0142)	2.69 (0.1009)
	다변량모형	정규분포모형	0.0259	32.85 (0.0000)	1.83 (0.1757)
		수정 VaR	0.0075	1.23 (0.2671)	0.23 (0.6329)

## 2) Component VaR 측정과 해석

이제 6개국 주가지수로 구성된 포트폴리오에 대한 VaR을 측정하고 이를 구성자산별로 분할해보기로 한다. 먼저 <표 6>은 전체 표본을 이용하여 추정한 각국의 VaR을 정리한 것인데, 표준편차가 가장 큰 우리나라에서 VaR이 가장 높게 나타났고 표준편차

가 작은 미국과 영국에서는 VaR이 낮게 측정되었다. 이는 정규분포 VaR이나 수정 VaR 모두 표준편차가 가장 중요한 결정요인이라는 사실을 반영한 것이다. 왜도와 첨도는 수정 VaR에만 반영되므로 왜도와 첨도 모두 큰 값을 갖는 인도시장에서 수정 VaR과 정규분포 VaR의 차이가 가장 크게 나타난 반면, 왜도와 첨도가 낮은 상해시장에서는 두 모형의 차이가 작게 나타났다.

<표 6> 전체 표본자료를 이용한 VaR추정결과

1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지의 전체 표본기간을 이용하여 6개국 각각에 대한 기초통계량과 VaR을 추정하였다.

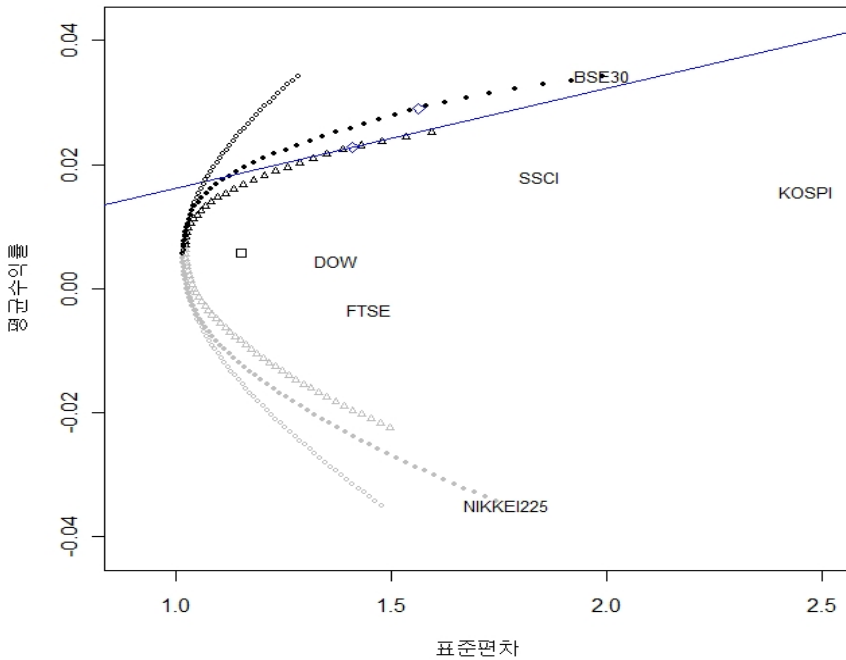
	평균	표준편차	왜도	첨도	정규분포 VaR	수정 VaR
한국 KOSPI	0.016	2.46	-0.26	5.43	5.71	9.25
미국 Dow Jones	0.005	1.37	-0.28	8.17	3.19	6.06
영국 FTSE	-0.003	1.45	0.04	7.68	3.38	5.94
일본 Nikkei225	-0.035	1.77	-0.54	6.70	4.15	7.43
상해 SSEI	0.018	1.85	-0.06	4.45	4.28	6.28
인도 BSE 30	0.034	1.99	-0.45	7.43	4.60	8.56

포트폴리오 위험에 대한 분석을 위해 동일투자비중(equal-weight) 포트폴리오와 평균-분산 최적화 포트폴리오를 구성하였다. 일반적으로 샤프비율을 최대화하는 최적 투자비중을 구할 경우 일부 자산에 투자가 집중되는 구석해(corner solution)문제가 자주 발생한다. 이러한 문제를 해소하기 위해 본 연구에서는 최저 투자비중을 5%로 설정하는 제약된 최적화(constrained optimization)를 통해 최적투자비중을 계산하였다. [그림 2]는 최적화방법에 따라 다르게 계산된 평균-분산 프론티어들을 그린 것이다. 최저 투자비중 5%의 제약을 설정한 프론티어는 가장 내부에 위치하고, 최적 투자비중을 설정하지 않고 롱포지션 제약(long-only constraint)만을 설정한 프론티어는 중간에 위치하고, 가장 바깥에 위치한 프론티어는 롱포지션 제약도 없는 경우의 프론티어를 그린 것이다. 본 연구에서 분석한 최적화 포트폴리오는 가장 안쪽에 위치한 프론티어와 자본시장선(CML)의 접점에 해당하는 투자비중으로 결정되며, 동일투자비중 포트폴리오는 프론티어 안쪽에 위치한 네모점으로 나타난다.

<표 7>와 <표 8>은 각각 동일가중 포트폴리오와 평균-분산 최적화 포트폴리오에 대한 위험측정값과 개별 자산의 위험기여도를 정리한 것이다. 포트폴리오 전체의 성과를 보면, 평균-분산 최적화포트폴리오는 동일가중 포트폴리오에 비해 표준편차와 VaR

[그림 2] 최적포트폴리오 Frontier

1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지의 6개국 주가지수를 이용한 전체 표본에 대한 평균-분산 최적화를 통해 계산된 최적 평균수익률-표준편차 프론티어를 그렸다. △로 나타낸 가장 안쪽의 프론티어는 최저투자비중 5%의 제약하에 최적화된 포트폴리오의 평균-표준편차 궤적을 나타내고, ●로 그린 중간에 위치한 프론티어는 long-only 제약하에 최적화된 포트폴리오에 대한 궤적을 나타낸다. ○로 그려진 가장 바깥에 위치한 프론티어는 아무런 제약을 가하지 않은 채 최적화된 포트폴리오의 평균-표준편차 궤적을 나타낸다. 본 연구에서 이용한 최적포트폴리오는 가장 안쪽에 위치한 프론티어와 직선으로 그려진 자본시장선이 접하는 점에서 결정된다. 3개의 프론티어 안쪽에 그려진 □는 동일가중 포트폴리오의 평균수익률과 표준편차를 나타낸다.



등으로 측정한 위험수준은 높지만 평균수익률이 더욱 큰 폭으로 증가한 것을 확인할 수 있다. 두 포트폴리오 모두에서 정규분포 VaR에 대한 개별자산의 위험기여도는 표준편차에 대한 기여도와 거의 일치하고 있는데, 이는 정규분포 VaR이 표준편차에만 의존하여 결정된다는 점에서 당연한 결과라고 할 수 있다.

<표 7>의 동일가중포트폴리오에 대한 위험추정치를 보면, 개별자산의 위험기여도가 투자비중 16.7%와 상당한 차이를 보이고 있는데, 특히 수정 VaR에 대한 기여도가 개별 자산마다 뚜렷한 차이를 보인다. 정규분포 VaR에서 한국이 가장 위험기여도가 높게 나타난 것은 한국 주식수익률의 표준편차가 가장 높기 때문이다. 수정 VaR에서는 일본과 인도가 가장 위험기여도가 높게 나타났는데, 이는 두 국가가 음의 왜도가 가장

높은 데다 첨도도 높은 편이기 때문이다. 식 (10)  $C - VaR_i = -w_i E(r_i | r_p = -VaR)$ 에서 모든 구성자산에 대한 투자비중이 동일할 경우 Component VaR은 한계 VaR( $= -E(r_i | r_p = -VaR)$ )에 의해 결정된다. 따라서 모든 구성자산의 수익률이 VaR 수준으로 하락할 때 수익률 하락폭이 더욱 크게 나타나는 자산이 높은 component VaR을 갖게 될 것이다. 그러므로 극단적인 하락이 자주 발생하는, 다시 말해 음의 방향으로 꼬리부분이 굵은 분포를 갖는 일본과 인도가 높은 위험기여도를 갖게 되는 것이다. 반면 상해시장의 경우 표준편차로 측정된 변동성은 매우 높은 편이나 왜도가 0에 가깝고 첨도도 낮아 위험기여도가 낮게 나타났다.

<표 7>의 동일가중 포트폴리오에 대한 VaR 분석은 위험관리에 대한 중요한 시사점을 주고 있는데, 우선 분산화된 포트폴리오의 정규분포 VaR이 2.673으로 개별국가의 VaR의 평균인 4.218( $= (5.71 + 3.19 + 3.38 + 4.15 + 4.28 + 4.60) \div 6$ , <표 6>참조)에 비해 축소되었고 수정 VaR도 5.890으로 개별국가의 수정 VaR 평균인 7.253에 비해 낮아져 분산화를 통한 위험감소효과를 확인할 수 있다. 다음으로 동일가중 포트폴리오에 대한 VaR 분할은 포트폴리오 운용자가 자산을 재배분하는 데에도 다음과 같이 활용될 수 있다. 미국, 영국과 일본시장의 경우 VaR에 대한 기여도에 비해 투자수익에 대한 기여도가 매우 낮기 때문에 투자비중을 낮출 필요가 있다. 한국의 경우에는 투자수익에 대한 기여도가 선진국 시장에 비해 높기는 하나 VaR 기여도가 26.3%로 가장 높아 포트폴리오 최적화를 위해서는 투자비중을 줄여야 한다. 이들 시장에 반해, 상해시장은 위험기여도는 투자비중에 비해 낮은 반면 투자수익 기여도는 매우 높고, 인도시장은 위험기여도는 높지만 수익기여도가 가장 높다. 따라서 상해시장과 인도시장에 대한 투자비중을 높여야 위험대비 수익률을 최대화할 수 있음을 알 수 있다.

이상과 같이 구성자산의 위험기여도를 이용한 포트폴리오 재조정전략은 <표 8>의 최적화된 포트폴리오에서 확인할 수 있다. 한국을 포함한 미국, 영국, 일본에 대한 투자비중은 최저 비중인 5%로 정해지고, 상해시장과 인도시장에 대한 최적 투자비중은 각각 23%와 57%로 계산되어 위에서 설명한 동일가중포트폴리오 위험분할을 이용한 자산재배분 전략이 합리적임을 확인해주고 있다. 최적 포트폴리오의 VaR에 대한 component VaR을 살펴보면, 인도를 제외한 5개국 시장의 기여도는 투자비중에 비해 낮게 나타난 반면 인도시장의 기여도는 정규분포 VaR의 75.3%, 수정 VaR의 72.9%를 차지하고 있다. 이는 VaR이 높은 한국시장의 비중이 동일가중 포트폴리오에 비해 낮아진 반면 VaR이 낮은 상해시장의 투자비중이 높아졌기 때문에 인도의 위험기여도가 상대적으로 더 높아진 것으로 해석할 수 있다.



<표 7> 동일가중포트폴리오의 Component VaR 추정

1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지의 전체 표본을 이용하여 6개국 주가지수에 동일한 비중으로 투자한 포트폴리오에 대한 평균, 표준편차와 VaR 값을 포트폴리오 열에 정리하였다. 국가명 아래의 수치들은 각 국이 포트폴리오의 수익률, 표준편차와 VaR에 차지하는 비중을 나타낸다.

	포트폴리오	한국	미국	영국	일본	상해	인도
가중치		0.167	0.167	0.167	0.167	0.167	0.167
평균	0.006	0.459	0.132	-0.098	-1.024	0.527	1.003
표준편차	1.151	0.263	0.107	0.136	0.189	0.112	0.192
정규분포 VaR	2.673	0.263	0.107	0.137	0.191	0.112	0.191
수정 VaR	5.890	0.172	0.173	0.150	0.209	0.064	0.231

<표 8> Mean-Variance 최적화포트폴리오의 Component VaR 추정

1997년 7월 3일부터 2008년 12월 30일까지의 6개국 주가지수를 대상으로 최저 투자비중 5% 제약하의 평균-분산최적화를 통해 국가별 투자비중을 결정하였다. 포트폴리오 열에는 최적화된 포트폴리오의 평균 수익률과 표준편차, VaR을 정리하였다. 국가명 아래의 수치들은 각 국이 포트폴리오의 수익률, 표준편차와 VaR에 차지하는 비중을 나타낸다.

	포트폴리오	한국	미국	영국	일본	상해	인도
가중치		0.05	0.05	0.05	0.05	0.23	0.57
평균	0.023	0.034	0.010	-0.007	-0.077	0.182	0.858
표준편차	1.411	0.042	0.015	0.020	0.032	0.139	0.754
정규분포 VaR	3.261	0.042	0.015	0.020	0.032	0.139	0.753
수정 VaR	6.706	0.056	0.031	0.022	0.047	0.115	0.729

## V. 결 론

본 연구는 국내에서는 처음으로 수정 VaR을 소개하면서 수정 VaR의 예측성과를 HS 모형이나 Riskmetrics 등 업계에서 이용하고 있는 추정모형들과 비교하였다. 수정 VaR은 6개국의 주가지수 수익률을 이용한 표본외 예측성과검증에서 다른 모형들에 비해 가장 우수한 것으로 나타났고 skew t 분포를 이용한 시뮬레이션분석에서도 HS 모형과 함께 매우 양호한 예측성과를 보였다. 수정 VaR은 공분산뿐 아니라 공왜도와 공첨도까지 VaR 계산에 반영함으로써 포트폴리오 구성자산간의 비선형 상관관계를 고려할 수 있는 장점이 있는데, 본 연구는 6개국 주가지수로 구성된 포트폴리오 위험에 대한 표본외 예측성과에 대한 검증을 통해 이러한 장점을 확인하였다. 또한 본 연구에서는 국내에서는 처음으로 “component VaR” 개념을 이용하여 포트폴리오의 정규분포 VaR

과 수정 VaR을 구성자산별로 분할하였고, 동 방법을 이용한 자산 재배분전략에 대한 시사점도 제시하였다.

본 논문이 수정 VaR을 소개한 이유는 첫째 금융자료 분포의 비대칭성과 꼬리가 굵은 성질을 반영하면서도 계산하기 편리하고 둘째 다른 VaR 모형과는 달리 포트폴리오에 대해 측정된 수정 VaR을 구성자산별로 분할하는 대수적인 수식이 가능하기 때문이다. 그러나 이러한 장점과 함께 양의 왜도를 갖는 시뮬레이션 표본 중 일부 표본에서는 수정 VaR이 지나치게 작게 측정되는 문제도 나타났다. 향후 수정 VaR의 유용성을 확인하기 위한 추가적인 연구에서는 신용포트폴리오나 파생상품 등에 대한 위험측정성과를 분석할 필요가 있다. 이들 상품들은 본 연구에서 분석한 주가지수에 비해 비대칭성이 뚜렷하고 꼬리도 더 굵기 때문에 왜도와 첨도를 반영하는 수정 VaR의 예측성 결과가 더 우수하게 나타날 것으로 기대된다.

수정 VaR의 예측성과분석에 관한 또 다른 연구과제로 본 논문에서 비교대상으로 이용한 전통적인 VaR 모형이외에 Copula-EVT 모형, 다변량 GARCH 모형이나 분위수 회귀모형 등 최근에 소개된 VaR 모형과도 예측성과를 비교해 볼 필요가 있다. 본문에서 설명한 바와 같이 이들 모형들은 적절한 추정방법에 대해 여전히 학술적으로 논란이 되고 있고 실무자들이 계산과정을 이해하기 어려운 문제가 있기는 하다. 그러나 이렇게 복잡한 과정을 거쳐 계산된 VaR 예측결과가 계산하기 쉬운 수정 VaR에 비해 우월한지를 검증하는 작업은 중요한 학술적 의의를 가질 것으로 생각된다.

포트폴리오위험을 구성자산별로 분할하는 방법도 적극적인 위험관리(active risk management)를 위한 실무적인 중요성을 고려할 때 앞으로 많은 연구가 필요하다. 업계와 학계는 주로 위험수준을 정확하게 측정하는 방법론에 중점을 두고 개발노력을 집중하여 왔고, 측정된 VaR을 이해하고 이를 이용하여 위험을 관리하는 활용방안에 대해서는 충분한 연구가 이루어지지 못한 실정이다. 금융기관이 노출되어 있는 총위험을 측정된 VaR은 위험관리를 위한 가이드라인에 대해 아무런 정보도 주지 못한다. 즉, 금융기관이나 포트폴리오의 전체적인 위험수준을 측정된 VaR로는 동학적인 포지션 조정을 통해 위험을 적극적으로 관리하는 데에는 아무런 정보도 제공하지 못하고 단순히 전체 위험수준을 줄이는 소극적인 대응에만 이용될 수 있다. 따라서 VaR을 포지션별로 세분하고 세분화된 VaR을 이용하여 포지션을 조절함으로써 위험을 적극적으로 관리하는 방법에 대한 추가적인 연구는 학술적으로나 실무적으로 중요한 의미를 갖는다.

## 참 고 문 헌

- 김규형, 이준행, “극단치이론을 이용한 VaR 추정치의 유동성과 한계-우리나라 주식시장을 중심으로-”, 재무관리연구, 제22권 제1호, 2005, 119-146.
- 문성주, 이덕창, 김대호, 오세경, “극단치이론을 이용한 VaR의 추정 및 성과”, 증권학회지, 제32권 제3호, 2003, 223-268.
- 오세경, 문성주, “금융위기하에서 포트폴리오 위험척도의 비교 : EVT-Copula 접근방법을 중심으로”, 증권학회지, 제35권 제3호, 2006, 175-205.
- 이근영, “VaR 모형의 예측성과 비교”, 금융학회지, 제11권 제4호, 2006, 127-168.
- 이상진, 빈기범, “단일변량모형과 다변량모형의 포트폴리오 VaR 측정성과”, 증권학회지, 제37권 5호, 2008, 877-912.
- 조담, “주식의 변동성추정방법이 VaR에 미치는 영향”, 선물연구, 제12권 제2호, 2004, 1-24.
- 한상범 “극치분포를 이용한 VaR의 추정 및 성과분석”, 금융연구, 제13권 제2호, 1999, 319-341.
- Amenc, N., L. Martellini, and M. Vaisse, “Benefits and risks of alternative investment strategies,” *Journal of Asset Management*, 4(2), (2003), 96-118.
- Azzalini, A. and A. Capitanio, “Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution,” *Journal of Royal Statistics Society, series B*, 65, (2003), 367-389.
- Bauwens, L. and S. Laurent, “A new class of multivariate skew densities, with application to GARCH models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 23(3), (2005), 346-354.
- Brooks, C. and G. Persaud, “The Effect of Asymmetries on Stock Index Return Value at Risk Estimates,” *Journal of Risk Finance*, 4(2), (2003), 29-42.
- Chow, G. and M. Kritzman, “Risk Budgets,” *Journal of Portfolio Management*, 27(2) (2001), 56-60.
- Christoffersen, P., “Evaluating Interval Forecasts,” *International Economic Review*, 39(4), (1998), 841-862.
- Favre, L. and A. Galeano, “Mean-Modified Value at Risk Optimization with Hedge Funds,” *Journal of Alternative Investments*, 5, (2002), 21-25.
- Garman, Mark B., “Taking VAR to Pieces,” *RISK*, 10, (Oct. 1997), 70-71.

- Gourieroux, C., P. Laurent, and O. Scaillet, "Sensitivity analysis of Value at Risk," *Journal of Empirical Finance*, 7(3-4), (2000), 225-245.
- Gueyie, P. and P. Amvella, "Optimal portfolio allocation using funds of hedge funds," *Journal of Wealth Management*, 9(2), (2006), 85-95.
- Hallerbach, G., "Decomposing Portfolio Value-at-Risk : A General Analysis," *Journal of Risk*, 5(2), (2002), 1-18.
- Hansen, B., "Autoregressive conditional density estimation," *International Economic Review*, 35, (1994), 705-30.
- Inui, K., M. Kijima, and A. Kitano, "VaR is subject to a significant positive bias," *Statistics and Probability Letters*, 72, (2005), 299-311.
- Kuester, Keith, S. Mittnik and M.C. Paoella, "Value-at-Risk Prediction : A Comparison of Alternative Strategies," *Journal of Financial Econometrics*, 4(1), (2006), 53-89.
- Litterman, R., "Hot Spots and Hedges," *Journal of Portfolio Management*, Special Issue Tribute, 23(1), (1996), 52-75.
- Mausser, H. and D. Rosen, "Beyond VaR : From Measuring Risk to Managing Risk," *Algo Research Quarterly*, 1(2), 1998.
- Peterson B. and K. Boudt., "Component VaR for a non-normal world," *RISK Magazine*, (November 2008), 78-81.
- Peterson B. and C. Croux, "Estimation and decomposition of downside risk for portfolios with non-normal returns," *Journal of Risk*, 11(2), (2008), 79-103.
- Qian, E., "On the nancial interpretation of risk contribution : risk budgets do add up," *Journal of Investment Management*, 4(4), (2006), 1-11.
- Sharpe, W., "Budgeting and monitoring pension fund risk," *Financial Analysts Journal*, 58(5), (2002), 74-86.
- Yu, K.W., Q. Yang, and H. Wong, "Asset allocation by using the Sharpe rule : How to improve an existing portfolio by adding some new assets?," *Journal of Asset Management*, 8(2), (2007). 133-145.
- Yamai Y. and Y. Yoshiba, "Comparative analyses of Expected Shortfall and Value-at-risk : Their Estimation Error, Decomposition and Optimization," *Monetary and Economic Studies*, Bank of Japan 20, (2002), 87-122.
- Zangari, P., "A VaR methodology for portfolios that include options," *Riskmetrics Monitor*, JP Morgan-Reuters, (1996) First Quarter, 4-12.

## <부 록>

VaR 예측성과에 대한 검증은 Christoffersen(1998)의 검증방법을 주로 이용하는데, 실제 손실실현치  $L_{t+1}$ 가 VaR 예측치  $VaR_{t+1}$ 보다 크면 1, 아니면 0의 값을 갖는 지표함수(indicator function)  $I_{t+1}$ 를 예측기간( $t = 0, 1, \dots, 2104$ )에 대해 측정한 수열을 이용한다.

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & L_{t+1} > -VaR_{t+1} \\ 0, & L_{t+1} \leq -VaR_{t+1} \end{cases}, t = 0, 1, \dots, 2104$$

Christoffersen(1998) 검증은 무조건부 실패율에 대한 검증과 예측실패의 독립성에 대한 검증으로 이루어진다. 무조건부 실패율(unconditional coverage)에 대한 검증은 특정 VaR 모형의 예측치보다 더 큰 손실이 발생한 비율이 해당 모형의 유의수준  $\alpha$ 와 일치하는가를 검증한다. 유의수준을  $\alpha = 0.05$ 로 설정한 경우 총 2105번의 VaR 예측횟수 중 VaR 예측치보다 더 큰 손실이 발생한 횟수(즉, 위식의 지표함수 수열의 합)의 비율인 실패율이 유의수준 0.05와 일치하는가를 검증하는 것이다. 두 번째 검증인 독립성검증은 VaR 예측치 이상의 손실이 발생하는 실패사건이 무작위적으로(randomly) 발생하는가를 검증한다. 실패사건이 무작위적으로 발생하는지 아니면 특정한 기간 동안에 집중적으로 발생하는지를 검증하는 이유는 어떤 VaR 모형에 의한 예측이 표본기간 전체적으로는 적절한 실패율을 보인다 하더라도 실패사건이 연이어 발생한다면 해당 모형은 바람직한 모형이라 할 수 없기 때문이다.

Christoffersen(1998)은 무조건부 실패율을 검증하기 위한 우도비 검증통계량  $LR_{UC}$ 과 지표함수  $I_{t+1}$  수열이 무작위적인 패턴을 보이는가를 검증하는 우도비 검증통계량  $LR_{IND}$ 을 제안하였다. Christoffersen의 우도비검증방법은 Kuester, Mittnik and Paoella (2006), 이상진, 빈기범(2008) 등 국내외의 많은 연구에서 소개된 바 있으므로 검증방법에 대한 구체적인 설명은 생략하고 검증통계량 수식만 제시한다.

$$LR_{UC} = -2 \left[ \ln(1-\alpha)^{T_0} \alpha^{T_1} - \ln \left( \frac{T_0}{T_0 + T_1} \right)^{T_0} \left( \frac{T_1}{T_0 + T_1} \right)^{T_1} \right] \sim^a \chi^2(1)$$

여기에서  $T_1$ 는 실제 손실이 예측 VaR을 초과한 횟수, 즉 실패 횟수를 나타내고  $T_0$ 는 전체 비교횟수  $T$ 에서  $T_1$ 을 뺀 수치를 나타낸다.  $LR_{IND}$ 은 독립성 제약하에서의 우도

$L(\hat{\pi})$ 와 제약이 없을 때의 우도  $L(\hat{\Pi})$ 를 비교한 다음의 수식으로 계산한다.

$$LR_{IND} = -2 [\ln L(\hat{\pi}) - \ln L(\hat{\Pi})] \sim^a \chi^2(1)$$

여기에서  $L(\hat{\pi}) = (T_0/T)^{T_0}(T_1/T)^{T_1}$ 이고  $L(\hat{\Pi}) = (1 - \hat{\pi}_{01})^{T_{00}} \hat{\pi}_0^{T_{01}} (1 - \hat{\pi}_{11})^{T_{10}} \hat{\pi}_{11}^{T_{11}}$ 이며  $T_{ij}$ 는 지표함수값이 전기에  $i$ 이고 현재기에는  $j$ 인 횟수를 나타내며  $\hat{\pi}_{01}$ 와  $\hat{\pi}_{11}$ 는 각각  $\hat{\pi}_{01} = T_{01}/(T_{00} + T_{01})$ ,  $\hat{\pi}_{11} = T_{11}/(T_{10} + T_{11})$ 와 같이 정의된다.

THE KOREAN JOURNAL OF FINANCIAL MANAGEMENT  
Volume 26, Number 3, September 2009

# Estimation and Decomposition of Portfolio Value-at-Risk

Sangwhan Kim\*

〈abstract〉

This paper introduces the modified VaR which takes into account the asymmetry and fat-tails of financial asset distribution, and then compares its out-of-sample forecast performance with traditional VaR model such as historical simulation model and Riskmetrics. The empirical tests using stock indices of 6 countries showed that the modified VaR has the best forecast accuracy. At the test of independence, Riskmetrics and GARCH model showed best performances, but the independence was not rejected for the modified VaR. The Monte Carlo simulation using skew t distribution again proved the best forecast performance of the modified VaR.

One of many advantages of the modified VaR is that it is appropriate for measuring VaR of the portfolio, because it can reflect not only the linear relationship but also the nonlinear relationship between individual assets of the portfolio through coskewness and cokurtosis. The empirical analysis about decomposing VaR of the portfolio of 6 stock indices confirmed that the component VaR is very useful for the re-allocation of component assets to achieve higher Sharpe ratio and the active risk management.

Keywords : Modified VaR, Marginal VaR, Component VaR, Decomposition of Portfolio Risk, Asset Allocation

---

\* Department of Economics, Chungbuk National University