Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering
Vol. 32, No. 3, pp.71－77, September 2009.

조정가능한 M/G/1 대기모형에 Min(N, D)와 Max(N, D) 운용방침이 적용될 때 busy period 기대값의 상한과 하한 유도

이한교† · 오현승

한남대학교 산업경영공학과

Derivations of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for the Min(N, D) and Max(N, D) Operating Policies in a Controllable M/G/1 Queueing Model

Hahn-kyou Rhee† · Hyun-seung Oh

Department of Industrial and Management Engineering Hannam University

Using the results of the expected busy periods for the dyadic Min(N, D) and Max(N, D) operating policies in a controllable M/G/1 queueing model, an important relation between them is derived. The derived relation represents the complementary property between two operating policies. This implies that it could be possible to obtained desired system characteristics for one of the two operating policies from the corresponding known system characteristics for the other policy. Then, upper and lower bounds of expected busy periods for both dyadic operating policies are also derived.

Keywords : Defense R&D Programs, Performance Evaluation, Self Evaluation, Meta evaluation

1. 서 론

삶의 중요한 부분인 기다림을 과학적인 방법으로 분석하여 유용한 정보를 도출할 수 있는 대기이론 영역에서 활용되고 있는 모형들은 일반적인 대기모형(ordinary queueing model)과 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)으로 분류된다. 두 모형의 큰 차이점은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 경우 서비스를 제공하는 사람, 즉 서비스인(server)이 어떠한 상태를 유지하고 있는가이다. 일반적인 대기모형에서는 서비스인은 서비스를 기다리는 고객이 없어도 서비스를 제공하는 창구에서 항상 대기상태를 유지해야만 한다. 다시 말해, 서비스를 기다리는 고객이 없어도 앞으로 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 서비스인은 항상 준비상태에 있어야 한다. 이러한 규칙은 서비스인의 업무활용도가 낮아지게 만들 수 있다. 일반적인 대기모형에서 나타나는 문제점, 즉 서비스인의 업무활용도를 향상시키기 위해 제안된 방법이 조정 가능한 대기모형이라고 할 수 있다. 조정 가능한 대기모형에서는 서비스를 받기위해 기다리는 고객이 없으면 서비스를 제공하는 서비스 창구를 폐쇄해야 한다. 이러한 규칙으로 인해 서비스 창구를 폐쇄한 서비스인은 즉시 다른 업무를 수행할 수 있기 때문에 서비스인의 업무활용도를 향상시킬 수 있다. 그러나 일단 폐쇄된 서비스 창구는 미리 정해진 조건이 만족되

논문접수일 : 2009년 05월 14일　　논문수정일 : 2009년 06월 28일　　게재확정일 : 2009년 07월 01일
† 교신저자 hkrhee@hnu.kr
※ 이 논문은 2009년 한남대학교 학술조성연구비 지원에 의하여 연구되었음.

어야만 서비스를 기다리는 고객들에게 서비스를 제공하기 위하여 재개할 수 있다. 다시 말해 서비스 창구 폐쇄 후 서비스를 기다리는 고객이 있어도 미리 정해진 조건을 만족하지 않을 경우 서비스 제공을 위한 서비스창구의 재개는 허용되지 않는다. 이러한 미리 정해진 서비스 창구의 재개조건을 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 부른다. 따라서 조정가능한 대기모형의 운용방침은 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 위한 조건을 포함한 시스템 상태를 명확히 규정하기 때문에 시스템 운용에 매우 중요하다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있지만(Teghem[14]) 일반적으로 이러한 운용방침들은 시스템상태를 표현하는 입력변수가 한 개인 경우를 단순운용방침(simple operating policy), 두 개인 경우를 이변수운용방침(dyadic operating policy)으로 분류한다. 지금까지 제안되어 활용중인 가장 대표적인 단순운용방침에는 아래와 같은 N, T 그리고 D 운용방침이 있다.

(i) N 운용방침 : Yadin과 Naor[15]가 제안한 것으로, 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 $N(N \geq 1)$명이 되는 순간 재개되어 미리 정해진 순서대로 서비스를 제공하기 시작하여 또다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 서비스를 제공이 계속된다.

(ii) T 운용방침 : Heyman[5]등이 제안한 운용방침으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 재개하여 서비스의 제공이 시작된 후 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 그러나 T 단위시간이 경과된 후 서비스를 기다리는 고객이 없을 경우 또 다시 T 단위시간 혹은 또 다른 T 단위시간 등 서비스를 기다리는 고객이 최소한 한 명 이상이 있을 때까지 서비스 창구가 폐쇄된다.

(iii) D 운용방침 : Balachandran과 Tijms[1]이 제안한 것으로 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 재개하여 다시 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다.

서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 없을 경우 서비스창구가 폐쇄되는 단순운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 고객이 없어도 서비스인이 항상 대기상태에 있는 일반적인 대기모형보다 서비스인을 효과적으로 활용할 수 장점이 있다. 그러나 다양한 시스템의 상태를 나타내는 많은 조건들 중에서 단순히 한 가지 시스템 상태에 의해 폐쇄된 서비스 창구가 재개되기 때문에 시스템 운용에 유연성이 부족하여 실제 상황에 적용하기에는 미흡한 점이 있을 수 있다. 이러한 문제점을 보완하기 위한 방법으로 현재 적용되고 있는 단순운용방침에 또 다른 시스템 내부의 조건을 나타내는 단순운용방침을 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis, Rhee and Sivazlian[4]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스 창구가 재개될 수 있는 조건에 유연성이 추가된 이변수 운용방침은 선정된 두 개의 단순 운용방침들이 특이한 형태로 결합된 것으로 여기에는 $Min(N, T)$, $Max(N, T)$, $Min(N, D)$, $Max(N, D)$, $Min(T, D)$ 그리고 $Max(T, D)$ 운용방침이 있다. $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침은 다음과 같은 의미로 정의되며 다른 운용방침도 유사한 의미로 정의된다(Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9, 10]).

(i) $Min(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 서비스를 기다리는 고객의 수가 N명이 되거나 혹은 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간을 초과하는 순간, 즉 다시 말해서 N 혹은 D 운용방침에 따른 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되면 즉시 폐쇄된 서비스 창구는 서비스 제공이 재개되어 다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to \infty$이면 $Min(N, D)$운용방침은 D 운용방침과 동일함을 쉽게 확인 할 수 있다.

(ii) $Max(N, D)$ 운용방침 : 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어서 폐쇄된 서비스 창구는 그 후 처음으로 서비스를 기다리는 고객의 수가 N 명 이상이 되고 또한 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스시간의 합이 D 단위시간을 처음으로 초과하는 순간, 즉 다시 말해서 N 운용방침과 D 운용방침 두 조건 모두가 처음으로 만족되면 폐쇄된 서비스 창구에서 서비스 제공이 재개되어 다시 시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없을 때까지 계속된다. 만약 $D \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 N 운용방침과 동일하며, 또한 만약 $N \to 0$이면 $Max(N, D)$운용방침은 D 운용방침과 동일하게 됨을 알 수 있다.

이변수 운용방침과 유사한 형태는 설비 교체 관리 분야의 Sivazlian과 Iyer[13]의 이변수 설비교체 운용정책 그리고 대기이론 분야의 Rhee와 Sivazlian[12], Kella[7], Brill과 Harris[2], Kella와 Yachiali[6] 등을 예로 들 수 있다. 그러나 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 고객 혹은 서비스인에게 어느 정도의 유연성이 부여된 것은 장점으로 평가될 수 있지만 입력변수의 수가 증가함에 따라 필요한 특성치를 유도하기 위해서는 많은 어려움이 수반되는 단점이 있다.

특히 최근에는 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순운용방침이 모두 결합된 $Min(N, T, D)$ 운용방침과 $Max(N, T, D)$ 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee와 Oh[11, 12]에 의해 제안되었지만 장점인 새로이 추가되는 유연성과 이로 인한 분석의 복잡성 증가라는 단점이 상충되기 때문에 장단점 사이의 효용분석이 더 필요하다고 생각되어 여기에서는 고려대상에서 제외한다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 활용하기 위해서는 필요한 운용방침이 적용되었을 때 예상되는 총비용을 가장 적게 하는 입력변수의 최적해에 따라 운용되어야 한다. 최적해를 유도하기 위한 과정에는 아래와 같은 여러 가지 시스템 특성치가 필요하다.

(i) $E[C]$: 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값,
(ii) $E[C]$: 고객에게 서비스를 제공하고 있는 서비스인 수의 기대값,
(iii) $E[B]$: 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기대값,
(iv) $E[I]$: 대기모형이 운용될 때의 idle period의 기대값.

여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스 창구를 폐쇄할 때까지 소요되는 시간간격을 말한다, 또한 idle period는 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스 창구가 폐쇄되는 순간부터 다시 서비스 창구가 재개되어 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간까지의 시간간격을 말한다.

이러한 시스템 특성치는 다음과 같은 비용요소와 결합되어 시스템 운용에 필요한 단위시간당 총비용을 유도할 수 있다.

(i) α : 한사람의 고객이 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 필요한 비용,
(ii) β : 한사람의 서비스인이 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용,
(iii) δ : 서비스 창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용의 합계.

즉, $E[TC]$를 대기모형의 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용으로 정의하면 아래와 같이 표현된다.

$$E[TC] = \alpha E[C] + \beta E[O] + \delta\left(\frac{1}{E[B]+E[I]}\right)$$

위의 단위 시간당 기대되는 총비용함수를 구성하기 위해서는 다양한 시스템 특성치가 필요함을 알 수 있다. 또한 주어진 대기모형에 새로운 운용방침이 적용될 때마다 위에서 언급된 특성치들을 다시 유도해야 한다. 특히 운용방침에 입력변수의 수가 증가하면 증가할수록 유도과정에서 발생되는 어려움과 복잡한 정도가 매우 커지는 특성이 있다. 다시 말해 이변수 운용방침이 적용될 때와 단순 운용방침이 적용될 때의 경우를 살펴보면 쉽게 확인할 수 있다(Rhee와 Oh[11]). 이러한 문제점을 해결하기 위한 하나의 방편으로 상호 보완관계에 있는 두 운용방침 즉, $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침이 적용되는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대 값을 활용하여 단순운용방침의 특성치를 통하여 이변수 운용방침의 특성치를 간접적으로 유도할 수 있는 관계식 구축을 본 연구의 목적으로 설정한다. 여기에서 구축되는 관계식은 시스템 내부에 있는 고객수의 기대값 $E[C]$ 등에도 적용가능하기 때문에 활용가치가 높다고 할 수 있다. 또한 이변수 운용방침에 관련된 특성치는 단순운용방침이 적용될 때보다 매우 복잡한 수식으로 표현되기 때문에 실제 상황에 신속하게 적용하기에 무리함이 따른다. 이러한 문제를 해결에 도움을 줄 수 있도록 $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 이변수 운용방침에 따른 busy period의 기대값의 상한과 하한을 단순운용방침에 따른 busy period의 기대값의 결과로 표현함으로서 실제상황에서 활용 가능성을 향상시킴과 동시에 다른 특성치와 운용방침에도 적용할 수 있는 근거제공을 또 하나의 연구 목적으로 설정한다.

3. 대기모형의 정의

안정상태 (steady-state)에 있는 $M/G/1$ 대기모형에 다음과 같은 사항을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 고객들은 포아손과정(Poisson

process)에 따라 대기시스템에 도착하며, 연속된 두 고객의 평균 도착시간간격은 $1/\lambda$이다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 $N(t)$라고 하면, $n = 0, 1, 2, \cdots$에 대해 $N(t)$의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[N(t)=n] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

또한 식 (1)을 사용하여 다음을 정의한다.

$$H_n(T) = P[N(t) \geq n] = \sum_{j=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^j}{j!} \tag{2}$$

(ii) i 번째 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수를 S_i 라고 정의하며 S_i는 평균이 $1/\mu$인 상호 독립(independent)이며 동일한 분포(identical distribution)라고 가정한다. S_i의 공통 확률밀도함수를 $f_S(\cdot)$로 표시한다. 또한 다음을 정의한다.

$$G^{(n)}(D) = \int_0^D [f_S(t)]^{*(n)} dt \tag{3}$$

여기에서 $[f_S(t)]^{*(n)}$은 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 뜻한다.

(iii) 기타 언급되지 않은 사항은 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 가정에 따른다.

(iv) B_o : 일반적인 $M/G/1$ 대기모형의 busy period를 나타내는 확률변수로 정의한다. B_o의 기대값을 $E[B_o]$로 나타내면 다음과 같이 주어진다(Kleinrock[8] or Conolly[3]).

$$E[B_o] = \frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} \tag{4}$$

Gakis, Rhee 와 Sivazlian[4]의 결과에 따르면, 만약 단순 N 운용방침과 D 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 B_N와 B_D라 정의하고, 또한 이들의 기대값을 각각 $E[B_N]$과 $E[B_D]$정의하면 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N] = NE[B_o] \tag{5}$$

$$E[B_D] = E[B_o]\sum_{j=0}^{\infty} G^{(n)}(D) \tag{6}$$

또한 이변수 운용방침들 중에서 $Min(N, D)$와$Max(N, D,)$ 운용방침이 $M/G/1$ 대기모형에 적용되었을 때 busy period를 나타내는 확률변수를 각각 $B_{Min(N,D)}$와 $B_{Max(N,D)}$라 하고, 또한 이들의 기대값을 각각 $E[B_{Min(N,D)}]$와 $E[B_{Max(N,D)}]$라고 정의하면 다음과 같이 주어진다(Rhee[9]).

$$E[B_{Min(N,D)}] = E[B_o]\sum_{n=1}^{N} G^{(n-1)}(D) \tag{7}$$

$$E[B_{Max(N,D)}] = E[B_o]\left\{N + \sum_{n=N}^{\infty} G^{(n)}(D)\right\} \tag{8}$$

여기에서 $E[B_o]$는 일반적인 M/G/1 대기모형의 busy period의 기대값을 나타내며 식 (4)에 표현되어 있고 $H_n(T)$와 $G^{(n)}(D)$는 식 (2)과 (3)에 각각 정의되어 있다. D 단순 운용방침과 다양한 이변수 운용방침이 적용되는 조정 가능한 $M/G/1$ 대기모형의 busy period의 기대값 또한 Gakis, Rhee와 Sivazlian[4] 혹은 Rhee[9]의 결과로 확인할 수 있다.

4. *Min(N, D)*와 *Max(N, D)* 운용방침이 적용될 때 busy period 기대 값 사이의 관계식 유도

조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 $Min(N,D)$와 $Max(N, D)$이변수 운용방침이 적용될 때 busy period의 기대값 $E[B_{Min(N,D)}]$와 $E[B_{Max(N,D)}]$ 사이에는 아래의 정리가 성립한다.

정리 : $$E[B_{Min(N,D)}] + E[B_{Max(N,D)}] = E[B_N] + E[B_D] \tag{9}$$

여기에서 $E[B_N]$와 $E[B_D]$는 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 단순운용방침 N과 D 운용방침이 적용될 때의 busy period의 기대값을 나타내며 각각 식 (5)와 (6)과 같이 주어진다..

증명 : 식 (7)과 식 (8)에서 주어진 $E[B_{Min(N,D)}]$와 $E[B_{Max(N,D)}]$를 사용하면

$$E[B_{Min(N,D)}] + E[B_{Max(N,D)}]$$
$$= E[B_o]\sum_{n=1}^{N} G^{(n-1)}(D) + E[B_o]\left\{N + \sum_{n=N}^{\infty} G^{(n)}(D)\right\}$$

$$= E[B_o]\sum_{n=1}^{N} G^{(n-1)}(D) + NE[B_o]$$

$$+\ E[B_o]\sum_{n=N}^{\infty}G^{(n)}(D)$$

$$=\ NE[B_o]\ +\ E[B_o]\sum_{n=0}^{\infty}G^{(n)}(D)$$

식 (5)와 (6)에 있는 $E[B_N]$와 $E[B_D]$의 결과를 사용하면 다음과 관계식이 성립함을 쉽게 확인할 수 있다.

$$E[B_{Min(N,D)}]+E[B_{Max(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D]$$

식 (9)에 기술된 관계식에 따르면 $Min(N,D)$ 혹은 $Max(N,D)$ 이변수 운용방침 중 하나의 운용방침의 적용되었을 때의 busy period 기댓값을 유도하면 또 다른 하나의 운용방침의 적용되었을 때의 busy period 기대값을 N과 D 단순운용방침에 따른 busy period의 기대값을 활용하여 쉽게 구할 수 있음이 확인되었다. 이는 다른 특성치에도 유사한 상호보완관계(complementary relation)를 적용하여 필요한 특성치를 보다 수월하게 구 할 수 있다.

5. *Min(N, D)*와 *Max(N, D)* 운용방침이

적용될 때 **busy period** 기대값의 상한과 하한 설정 조정가능한 $M/G/1$ 대기모형에 $Min(N,D)$와 $Max(N,D)$ 이변수 운용방침이 적용될 때 busy period의 기대 값 $E[B_{Min(N,D)}]$와 $E[B_{Max(N,D)}]$ 사이에는 아래와 같은 관계식이 성립한다.

$$E[B_{Min(N,D)}]\ \le E[B_{Max(N,D)}] \tag{10}$$

또한 식 (9)로부터 $E[B_{Min(N,D)}]$는 아래와 같이 주어진다.

$$E[B_{Min(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Max(N,D)}] \tag{11}$$

식 (11)의 $E[B_{Min(N,D)}]$를 부등식 (10)에 대입하면 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_{Max(N,D)}]\ge E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Max(N,D)}]$$

따라서 $E[B_{Max(N,D)}]$아래의 부등식을 만족한다.

$$E[B_{Max(N,D)}]\ge\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{12}$$

동일한 방법으로 $E[B_{Min(N,D)}]$에 관한 부등식을 다음과 같이 유도할 수 있다. 식 (9)로부터

$$E[B_{Max(N,D)}]=E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Min(N,D)}]$$

위의 식에 있는 $E[B_{Max(N,D)}]$ 식 (10)에 대입하면

$$E[B_{Min(N,D)}]\le E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Min(N,D)}] \tag{13}$$

따라서 부등식 (13)은 간단히 하면 아래와 같은 부등식이 유도된다.

$$E[B_{Min(N,D)}]\le\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{14}$$

부등식 (12)는 아래와 같은 등식으로 변환할 수 있다.

$$E[B_{Max(N,D)}]=\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}+f(N,D,\lambda,\mu) \tag{15}$$

여기에서 $f(N,D,\lambda,\mu)$는 양의 값을 갖는 임의의 함수로 입력변수 N과 D 그리고 입력상수 λ과 μ로 구성되어 있다. 또한 식 (15)의 $E[B_{Max(N,D)}]$를 식 (9)에 대입하면

$$E[B_{Min(N,D)}]+\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}+f(N,D,\lambda,\mu)$$
$$=\ E[B_N]+E[B_D]$$

따라서 $E[B_{Min(N,D)}]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_{Min(N,D)}]\ =\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}-f(N,D,\lambda,\mu) \tag{16}$$

$E[B_{Min(N,D)}]\ge 0$이기 때문에 식 (16)로부터

$$\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}\ge f(N,D,\lambda,\mu) \tag{17}$$

$$E[B_{Min(N,D)}]\ \le\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{18}$$

식 (15)에 부등식 (17)과 (18)을 결합하면

$$E[B_{Max(N,D)}]=\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}+f(N,D,\lambda,\mu)$$
$$\le E[B_{Min(N,D)}]+\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{19}$$

식 (9)와 (19)을 더하면 아래의 결과를 얻을 수 있다.

$$E[B_{Max(N,\ D)}]+E[B_{Min(N,\ D)}]+E[B_{Max(N,\ D)}] \le E[B_N]+E[B_D]+E[B_{Min(N,\ D)}] + \frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}$$

따라서 위 부등식을 간단히 하면

$$E[B_{Max(N,\ D)}] \le \frac{3\{E[B_N]+E[B_D]\}}{4} \tag{20}$$

부등식 (12)와 (20)를 결합하면 $E[B_{Max(N,D)}]$의 상한과 하한이 아래와 같이 주어진다.

$$\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \le E[B_{Max(N,\ D)}] \le \frac{3\{E[B_N]+E[B_D]\}}{4} \tag{21}$$

유사한 방법을 $E[B_{Min(N,D)}]$ 적용하기 위해 부등식 (19)의 좌우변에 (-1)을 곱하면

$$-E[B_{Max(N,\ D)}] \ge -E[B_{Min(N,\ D)}] - \frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{22}$$

식 (9)와 부등식 (22)을 합하면

$$E[B_{Max(N,D)}] + E[B_{Min(N,\ D)}] - E[B_{Max(N,\ D)}] \ge E[B_N]+E[B_D]-E[B_{Min(N,\ D)}]-\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}$$

따라서 위 부등식을 간단히 하면

$$E[B_{Min(N,\ D)}] \ge \frac{E[B_N]+E[B_D]}{4} \tag{23}$$

마지막으로 식 (14)과 (23)를 결합하면 아래와 같은 $E[B_{Min(N,\ D)}]$의 상한과 하한이 구해진다.

$$\frac{E[B_N]+E[B_D]}{4} \le E[B_{Min(N,\ D)}] \le \frac{E[B_N]+E[B_D]}{2} \tag{24}$$

식 (7) 과 (8)에서 주어된 $E[B_{Min(N,\ D)}]$와 $E[B_{Max(N,\ D)}]$에는 입력변수 N과 D가 서로 결합되어 있기 때문에 계산의 어려움과 신속한 활용의 걸림돌이 되어 왔다. 그러나 식 (21) 과 (24)에서 유도된 $E[B_{Min(N,\ D)}]$와 $E[B_{Max(N,\ D)}]$의 상한과 하한에는 두 입력변수 N과 D이 결합된 항이 없이 단순 운용방침에 따른 $E[B_N]$과 $E[B_D]$ 결과만으로 표현되어 있기 때문에 기존의 문제점들을 충분히 보완할 수 있음을 확인하였다.

6. 결 론

본 연구 결과의 활용방안 및 기대효과는 다음 관점에서 살펴볼 수 있다. 첫째, 조정 가능한 대기모형에 이변수 $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period의 기대값을 사용하여 두 운용방침사이의 유용한 관계식을 유도하였다. 이는 확률영역에서 사용되는 관계식 $P[A \cup B] + P[A \cap B] = P[A] + P[B]$와 유사함을 알 수 있다. 또한 이 관계식을 활용할 경우 선택된 하나의 이변수 운용방침에 따른 특성치를 구하면 또 다른 운용방침의 대응되는 특성치를 단순운용방침의 결과를 활용하여 수월하게 구할 수 있는 방법론을 제시하였다. 둘째, 이변수 운용방침이 적용될 경우 busy period의 기대값은 매우 복잡한 형태로 표현된다. 따라서 필요한 현장에서 신속하게 활용하는데 문제점을 야기한다. 이러한 점을 해결하기 위해 이변수 $Min(N, D)$와 $Max(N, D)$ 운용방침이 적용되었을 때의 busy period의 기대값의 상한과 하한을 N과 D 단순운용방침이 적용되었을 때의 busy period의 결과인 $E[B_N]$과 $E[B_D]$만으로 표현하였다. 즉, $E[B_{Min(N,\ D)}]$와 $E[B_{Max(N,\ D)}]$의 실질적인 값의 범위는 $\frac{E[B_N]+E[B_D]}{4}$, $\frac{E[B_N]+E[B_D]}{2}$ 그리고 $\frac{3\{E[B_N]+E[B_D]\}}{4}$을 사용하여 간단히 파악할 수 있는 근거를 제시하였다. 마지막으로, 이러한 결과들은 또 다른 형태의 이변수 운용방침인 $Min(T, D)$와 $Max(T, D)$에도 적용할 수 있는 가능성과 더 복잡한 형태인 삼변수 운용방침이 적용되었을 경우 유사한 특성치에 관련된 분석을 위한 기초자료를 제공하였다고 할 수 있다.

참고문헌

[1] Balachandran, K. R. and Tijms, H.; "On the D-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 9 : 1073-1076, 1975.

[2] Brill, P. H. and Harris, C. M.; "Waiting Times for M/G/1 Queues with Service Time or Delay-Dependent Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 39 : 775-787, 1992.

[3] Conolly, B.; Lecture Notes on Queueing Systems, Halsted, NY, 1975.

[4] Gakis, K. G., Rhee, H. K., and Sivazlian, B. D.; "Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with

Simple and Dyadic Policies," *Stochastic Analysis and Applications*, 13(1) : 47-81, 1995.

[5] Heyman, D.; "The T-policy for the M/G/1 Queue," *Management Science*, 23(7) : 775-778, 1977.

[6] Kella, O. and Yechiali, U; "Priorities in M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 35 : 23-34, 1988.

[7] Kella, O.; "The Threshold Policy in the M/G/1 Queue with Server Vacations," *Naval Research Logistics*, 36 : 111-123, 1989.

[8] Kleinrock, L.; Queueing Systems, Vol. 1 : Theory, John Wiley and Sons, New York, NY. 1975.

[9] Rhee, H. K.; "Development of a New Methodology to find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies: Concepts and Application to the Dyadic Policies," 대한산업공학회지, 23(4) : 729-739, 1997.

[10] Rhee, H. K.; "조정가능한 대기모형에 이변수 운용방침 (Dyadic Policy)이 적용될 때 busy period의 기대값의 수리적 분석", 한남대학교 논문집 32 : 141-153, 2002.

[11] Rhee, H. K. and Oh, H. S.; "삼변수 운용방침이 적용되는 M/G/1 대기모형에서 가상확률밀도함수를 이용한 busy period의 기대값 유도", 한국산업경영시스템학회지, 30(2) : 51-57, 2007.

[12] Rhee, H. K. and Sivazlian, B. D.; "Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy," *Journal of Applied Probability*, 27 : 425-432, 1990.

[13] Sivazlian, B. D. and Iyer, S. N.; "A Dyadic Age-Replacement Policy for a Periodically Inspected Equipment Items Subject to Random Deterioration," *European Journal of Operational Research*, 6 : 315-320, 1981.

[14] Teghem, J.; "Control of the Service Process in a Queueing System," European Journal of Operational Research, 23 : 141-158, 1986.

[15] Yadin, M. and Naor, P.; "Queueing System with Removable Service Station," *Operational Research Quarterly*, 14 : 393-405, 1963.