한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 3, 291-305, September 2009

메타인지적 활동의 훈련을 통한 문제해결 과정에서의 사고 과정 분석 사례 연구

이봉주[1] · 고호경[2]

본 고에서는 학교 현장에서 보다 쉽게 학생들의 메타인지적 접근이 가능할 수 있도록 선행 연구와 문헌 검토를 통하여 메타인지적 발문을 고안하고 이에 따라 학생들에게 훈련을 실시하였다. 이러한 목적은 메타인지가 수학적 사고 과정에 중요한 역할을 하는 도구임을 제안하고, 학생들의 메타인지 능력을 향상시킴으로써 수학적 사고력을 신장시킬 수 있다는 근거를 마련하는 것이다. 두 가지 사례를 들어, 문제해결 과정에서 메타인지적 활동의 훈련을 통하여 학생들의 수학적 사고 과정에서 나타나는 메타인지를 분석함으로서 자신의 문제 해결 과정에서 필요한 전략과 절차를 의식적으로 모니터링하며 조정하고 통제하려는 모습을 구체적인 사례와 함께 제시하였다.

주요용어 : 메타인지, 문제해결 과정, 메타인지적 발문

Ⅰ. 서론

21세기의 소위 지식기반 사회에서 성공적인 삶의 영위를 위해서는 개인에게 부딪혀오는 복잡 다양한 문제들을 스스로 해결할 수 있는 능력을 필요로 한다. 특히, 요즘 사회에서 등장하는 문제들은 수학을 비롯한 여러 분야의 지식이 복합적으로 작용하고 있어 학생들로 하여금 이런 실제적인 문제해결 능력을 습득케 하기 위해서는 학교수학의 성격도 문제해결의 본래 의미에 충실한 문제해결 교육을 추구하고자 하는 움직임이 활발하다. 이를 위해서는 수학적 문제해결력 증진을 위한 구체적이고 실천적인 개선책의 마련이 필요할 것이다. 제7차 수학과 교육과정이나 2007년 개정 수학과 교육과정에서 보더라도 '수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러 문제해결을 할 수 있게 함'을 강조하고 있다. 수학적 사고를 한다는 것은 자신이나 다른 사람의 수학적 활동을 의식적으로 반성하는 것이라고 할 수 있다. 이러한 수학적 사고 태도를 길러주기 위해서는 학생들에게 수학 학습 과정을 반성할 수 있는 기회와 수학과 수학적 활동에 대하여 이야기하고 토론할 수 기회를 제공하여야 한다. '상보적 가르침'이나 '교수적 대화', '교사언어의 기술들'을 탐색하는 접근들은 특정 개념의 형성을 위한 언어적 소통의 전형과 그 안에서 이루어지는 학습자의 메타인지적 기능들을 보여주고 있다. 이것들은 특정한 개념의 형성뿐만 아니라, 이러한 개념을 형성하기 위한 언어적

1) 한국교육과정평가원 (yibongju@kice.re.kr)
2) 원광대학교 (koho@wku.ac.kr)

소통의 과정 자체를 효과적으로 개선하고자 하는 메타 언어적인 접근이다. 그것은 수학에서의 탐색기술이라는 고등정신기능에 초점을 맞춘 것으로서, 문제해결의 과정에 대한 능동적인 참여를 더욱 강조하고 융통성 있는 진행이 특징으로 수학적 활동에 참여함으로써 수학적 개념들을 발전시키려 하였다. Cobb 외(1991) 그리고 Cobb, Wood, 와 Yackel(1993)에 의하여 이루어진 수학에 대해 활동하기와 이야기하기(doing and talking about mathematics)와 수학에 대해 이야기한 것에 대해 이야기하기(talking about talking about math)의 연구에서 보면, 수학이 성인에 의해 강요된 체제이거나 개별적인 문제해결활동이 아니라 공동체적인 활동이라는 견해를 강조하고 학생들에게 상호작용 자체에 대한 이해를 개선하고자 하는 노력을 보였다. 이러한 수학적 탐색 프로그램에서 이루어지는 언어적 소통 가운데 두드러지는 것은 정답 중심적 교육방식이나 교사 중심 문제풀이 방법 등과 같은 기존의 방식들이 변화시키고자 한다는 것이다. 또한 '수학에 관해 이야기한 것을 이야기하기'는 추측하고, 논증하고, 정당화하는 수학과 관련된 정신기능의 형성뿐만 아니라 이러한 일을 가능하게 정신기능의 형성에 참여하는 교사 언어의 역할 또한 보여주고 있다.

수학적 사고는 보통 정신적인 대상을 사용하여 수행되고(Harel & Kaput, 1991), 수학이 갖고 있는 기호 언어와 형식적 언어라는 특성 때문에 충분하게 이해되기 어렵다. 그러나 사고한 내용을 발표하고 다른 사람의 생각에 귀를 기울이고 토론하는 기회를 통해서 수학적 지식은 명확하게 되고, 그러한 과정을 거친 다음 도입되는 수학적 용어와 기호는 의미 있게 될 것이다. 수학과 수학적 활동에 대해서 많이 생각하고 생각한 것을 말하는 기회를 충분히 가지면서 수학을 배우는 학생들은 수학을 소중히 여기게 되고 수학적으로 사고하는 능력과 태도를 갖게 될 것이다.

사실 수학적 상황에서의 여러 가지 경험을 바탕으로 추측을 하는 첫 단계부터 시작하여 분명하게 정의된 공리와 형식적으로 구성된 증명을 갖춘 연역 체계로 수학 이론을 구성하는 마지막 단계에서도 메타인지의 역할은 필수적이다. 메타인지란 자신과 다른 사람의 사고 과정을 반성의 대상으로 하는 정신 활동이고, 수학적 사고는 정신적인 대상을 사용하여 이루어지기 때문이다. Flavell(1976, 1979)과 brown(1987)의 연구와 더불어 많은 인지학자들이 메타인지의 효과와 그 경로를 연구하여 효과성을 입증하려는 노력을 기울이고 있다. 그러나 많은 논문에서 메타인지의 중요성과 효과를 논하고 있으나(예, Cardelle-Elawar, 1992; Kramarski & Mevarech, 2003; Mevarech, 1999; Mevarech, et al., 2002; Schraw, 1994), 우리나라에서는 우리나라 학교 현장에 따른 사고 과정의 분석을 통하여 학생들이 어떻게 정교화하고 구성해 나갔는지는 아직도 충분히 밝혀지지 않고 있다. 다만 개념 학습과 문제해결 학습에서 반성적 사고의 중요성이 강조되면서 메타인지에 대한 관심이 증가하고 있을 뿐이다.

신은주 외(2007)는 문제해결에 도움이 되는 메타인지적 사고를 알아본 결과 학생들의 메타인지적 사고를 활성화하기 위해서 먼저, 교사는 학생으로 하여금 문제를 해결하는데 필요한 전략과 절차를 다양한 문제 상황에서 더 많이 의식하도록 하는 훈련을 할 필요가 있고, 두 번째, 학생은 문제를 해결하는 도안 자신의 행동을 모니터하고 평가하는 메타인지적 사고를 습관화할 필요가 있다는 것이다. 그리고 교사는 학생이 당면한 문제의 상황과 수준을 고려할 뿐만 아니라 각 학생의 독특한 사고의 특성을 이해하고 그에 따라 적절한 지식 및 전략을 조절하고 활용할 수 있는 능력을 길러줄 필요가 있다

따라서 본 고에서는 학교 현장에서 보다 쉽게 학생들의 메타인지적 접근이 가능할 수 있도록 선행 연구와 문헌 검토를 통하여 메타인지적 발문을 고안하고 이에 따라 학생들에게

훈련을 시키고자 한다. 이러한 목적은 메타인지가 수학적 사고 과정에 중요한 역할을 하는 도구임을 제안하고, 학생들의 메타인지 능력을 향상시킴으로써 수학적 사고력을 동시에 신장시킬 수 있다는 근거를 마련하는 것이다. 문제해결 과정에서 메타인지적 활동의 훈련을 통하여 수학적 사고력을 신장시킬 수 있음을 두 가지 사례를 들어 학생들의 수학적 사고 과정에서 나타나는 메타인지를 분석함으로서 학생들이 문제해결과정에서 어떻게 메타인지적 활동을 수행하는지 보이고자 한다.

Ⅱ. 메타인지적 활동 훈련에서의 수학적 사고력 향상

1. 메타인지란?

메타인지(metacognition)는 한 개인의 지식과 인지 영역에 대한 제어를 일컫는 것으로 '인지에 대한 인지(cognition about cognition)' 또는 '사고에 대한 사고(thinking about thinking)'이라고 말한다. 문제를 해결하는 과정에서 자신에게 무슨 정보가 필요한지를 알아내기 위해 전략을 세우거나 자신이 하고 있는 문제 전략과 해결 단계를 의식하는 것이며, 자신의 사고에 의해 얻어진 산출물을 반성해보고 이를 평가해 볼 수 있는 능력을 말한다(Schoenfeld, 1987). 즉, 인지 과정에서 스스로 얼마나 알고 있는 가를 인식하는 것으로 자신이 하고 있는 것을 점검하고 평가하는 행동과 그 평가에 의한 전략의 선택과 사용에 관한 인지적 능력이라 한다. 인지에 대한 지식은 한 개인이 특별한 인지적 과제의 수행과 관련하여 자신의 인지적 능력·과정·정보에 대해 아는 것과 관계가 있으며, 사고하는 사람들이 자신과 다른 사람들의 인지 과정에 대해 가지고 있는 정보를 일컫는다. 이러한 인지에 대한 지식과 더불어 인지의 조절로서의 기능이 있는데, 이는 학습을 조절하고 감독하는 활동으로 이루어진다. 이러한 과정은 문제 이해보다 중요한 활동 계획, 학습 시 활동 감시, 결과 검토 등을 포함한다.

2. 수학적 사고

본고에서는 수학적 사고를 수학적 특정 내용과 관계없이 수학의 방법으로 제한하나 귀납적 사고, 연역적 사고, 유추적 사고를 종합적으로 포함한 것이라 정의한다. 본 연구의 바탕이 되는 수학적 사고는 위의 세 가지 유형별로 구분하지 않으나, 이에 대한 특징을 간략하게 살펴보면 다음과 같다.

(1) 귀납적 사고

귀납적 추론이란 관찰된 특수한 사례의 공통성에 주목하여 그러한 사례 전체에 대해서 성립될 수 있는 숨겨져 있는 일반적인 법칙을 이끌어 내는 추론을 말한다(우정호, 2000). 문제를 해결하는 데 있어 그 해결 방법이 생각나지 않고 연역적으로 해결이 안 되는 상황에서, 먼저 일반적인 규칙·성질을 발견하여 이것을 근거로 문제를 해결하려고 할 때 이용되는 사고 방법이다.

(2) 연역적 사고

연역적 추론이란 전제로 주어진 몇 개의 명제로부터 논리적인 규칙을 사용하여 필연적인 결론을 엄밀하게 도출해 내는 추론을 말한다. 연역적으로 논의할 때는 무엇보다 먼저 전제 조건은 무엇인가 그리고 이용할 근거가 되는 명제는 무엇인가를 명확하게 의식할 필요가 있다(片桐重男, 1988). 문제에서 발견되는 전제 조건, 전제 조건 사이의 관계, 목표에 대한 내적 표상 또는 '정신적 도해'를 만들어내는 데 메타인지가 중요한 역할을 한다(Davidson & Sternberg, 1998).

(3) 유추적 사고

유비추론 즉, 유추란 유사성을 바탕으로 어떤 대상에 대하여 성립하는 성질로부터 그와 유사한 대상의 성질을 추측하는 것이다(우정호, 2000). 이것은 개체에서 개체를 이끌어 내려는 전도추리의 일종으로 논리적으로는 불완전하다고 할 수 있다(片桐重男, 1988). 즉, 유추는 항상 옳은 것만을 유추한다고는 볼 수 없으므로 유추하고 나면 반드시 확인하여야 한다. "방금 유추한 사실이 옳을까?"라는 의문을 가지고 자신의 문제로 여겨 합리적으로 반성하려는 메타인지적 태도가 중요하다.

3. 수학적 사고 과정에서의 메타인지

Schoenfeld(1987)는 메타인지에 대한 정확한 용어정의를 내리기는 어려우나 다음과 같은 지적 활동에 대한 초점을 두어야 한다고 하였다.

1. 자신의 사고에 대하여 묘사하는 '사고 과정에 대한 지식'.
2. 자신이 하고 있는 것에 대해 주의를 기울이고 관찰로부터 얻은 정보를 활용해 나아가기 위한 자기 조절.
3. 자신이 하고 있는 수학 활동에 영향을 미치거나 수학을 해 나아가는 방식을 결정할 수 있는 신념과 직관.

이러한 메타인지의 연구분야는 학생들로 하여금 바람직한 학습 기술을 획득하도록 하는 것을 도울 수 있으며, 흥미를 가질 수 있도록 이끌 수 있다 하였다. 그는 또한 복잡한 과제를 수행할 때 자신의 시간과 노력을 잘 운영할 수 있도록 하기 위한 메타인지 운영 측면에서 다음과 같이 제안하였다.

1. 문제에 대해 이해하였음을 분명히 하기
2. 계획 세우기
3. 모니터하기 또는 풀이 도중 그 과정을 되짚어 보기
4. 문제 해결에 필요한 자료를 배당하거나 무엇을 할 것인가와 얼마나 시간을 배당할 것인가를 결정하기.

Moynihan(1994)은 메타인지란 자신의 인지과정이자 그것과 관련된 지식으로 어떤 구체적인 목표를 위해 인지 대상이나 자료에 관한 것들을 통합하고 활동적으로 모니터하고 패턴을 찾는 것으로써, 수학학습에 발전적인 역할을 하는 메타인지를 증진시키기 위하여 의사소통

을 활발히 하여야 한다고 하였다. 말하고, 듣고, 쓰고 읽으며 학생들이 무엇을 어떻게 생각하고 있는지 어떻게 왜 행동하는지 어떤 것을 이해하며 느끼는지를 알 수 있는 것이 의사소통의 힘이며, 활발한 의사소통을 요구하고 격려하고 증진시키는 것을 수학적 사고의 발전과 성취에 도움이 된다고 하였다. 또한 정의적 관점에서도 그는 학생들이 자신의 신념을 표현하기를 원하고, 자신의 감정을 드러내고 의사소통하기를 바란다면 의사소통은 학생들의 심리적인 성장과 발전에 도움을 주어 교실에서의 메타인지를 증가시키기 위한 담화는 수학 학습의 정의적인 측면에서 볼 때 도움이 될 수 있다고 하였다.

또한 메타인지는 수학적 사고를 안내하는 안내력으로서 중요한 역할을 하며 학습자가 학습 내용을 습득하는 단계에 머무르게 하지 않고 자신의 학습 과정을 총체적인 관점에서 효과적으로 관리해 나갈 수 있도록 돕는다(김희수, 2000). 또한 메타인지를 활용한 학습은 수학적 추론 능력과 표현 능력을 향상시키는 학습방법으로서 긍적적인 효과가 나타나는데, 이는 메타인지 전략을 활용한 학습의 단계인 문제확인, 예언, 계획, 실행, 자기 평가를 통하여 보다 능동적인 사고활동을 촉진하고 자신의 표현을 적극적으로 표현함으로써 수학적 표현 능력 향상에 기여하였기 때문이다(최은희 · 김민경, 2006).

이와 같이 메타인지가 수학적 사고와 직접적인 관계가 있다고 생각되어, 이 장에서는 수학적 사고 과정에서 나타나는 메타인지를 분석함으로써 메타인지가 수학적인 사고 과정을 뒷받침하고 발동시키는 것임을 보이고자 한다.

4. 메타인지적 활동 훈련에서의 수학적 사고력 향상

수학적 사고는 구체적으로 '수학적 문제 상황을 해결하기 위한 사고'라고 할 수 있다(강완 · 백석윤, 1998). 片桐重男(1988)은 선행 연구를 바탕으로 수학적인 사고의 구체적인 내용을 방법에 관련된 사고와 내용에 관련된 사고로 나누어 고찰 · 연구하였다. 수학 내용에 관련된 사고 방법에는 어떤 특정한 수학적 내용에만 이용되는 것과 어떤 내용이나 영역에만 제한되지 않고 여러 가지 영역에서 공통으로 필요로 하는 사고가 있다. 수학 내용과 관련한 사고 방법은 그 가지 수가 매우 많음을 지적할 수 있다. 수학적 사고력은 학습자가 수학과 관련하여 이미 습득한 지식과 기능을 종합적으로 사용하는 과정으로, 그 유형에 따라 연역적 사고, 귀납적 사고, 유추적 사고 등과 같이 다양하다. 하지만 강완과 백석윤(1998)은 수학이 갖는 추상성, 일반성, 논리성, 계통성 등과 같은 복잡한 성향을 파악하기 위한 수단이 수학적 사고력이기 때문에 이러한 사고의 유형을 명확하게 구분하는 것이 어렵다고 하였다. 그리고 수학적 사고력의 평가는 학습자의 문제해결 과정에 대한 관찰과 분석으로 이루어진다고 하였다.

Ⅲ. 연구 내용

본고에서는 수학적 사고력을 유형별로 구분하지 않고 실제로 수업을 통해서 실시하였던 메타인지 활동 과정 이후 학생들이 보이는 특징을 보이고자 하였다. 따라서 수업에 참여한 학생들 중 두 명의 고등학생이 메타인지적 활동의 훈련에 중점을 둔 문제해결 과정에서 보여주는 활동을 관찰한 것과 학생들의 자기 보고서를 토대로 어떠한 인지적 과정을 거쳐 수학적 사고력을 신장시킬 수 있는지를 보이고자 한다.

1. 문제해결 과정에서 메타인지적 활동 훈련 프로그램

(1) 메타인지적 활동 훈련 내용

본 연구 대상자는 고등학교 2학년 학생들로 정규 수학 시간 중 주당 두 번씩 모두 12~14 차시에 걸친 문제해결 과정을 통하여 메타인지적 활동 훈련을 실시하였다. 매 차시 학생들로 하여금 먼저 메타인지적 활동 안내 자료에 따라 문제를 해결하도록 안내되었다. 문제해결 시간은 특별히 제한하지 않았고, 해결의 종료에 대해서도 학생들의 의지에 맡겼으며, 학생들이 어려움을 겪는 과정에서 연구자는 학생들이 직면한 어려움과 부합된 메타인지 전략 중 일부를 상기시키며 학생들의 사고를 독려하였다. 그러나 이러한 과정에서 교사는 어떠한 풀이나 힌트를 제공한 바 없으며, 단지 학생들이 자신의 사고를 점검하고 이에 대한 실천을 강화할 수 있도록 안내한 바다.

(2) 메타인지적 활동 안내 자료

Brown(1987)은 문제해결과정에서의 메타인지를 해결과정에서 필요한 우리가 소유하는 지식에 관계된 '인지에 대한 지식'과 문제해결과정에서 필요한 전략적 행동과 자기조절, 모니터링, 행동 조절, 계획, 검토 등의 '인지에 대한 조절'로 나누었다. 본고에서는 메타인지적 활동 안내 자료를 Brown(1987)이 제시한 문제해결과정에서의 필요한 전략을 바탕으로 Fortunato 등(1991)이 Schoenfeld, Corno와 Mandinach의 논문에 기초하여 만든 메타인지 질문을 기반으로 실제 학교 수업에 적용 가능한 용어와 상황으로 내용을 변환하여 사용하였다. 안내 자료에서 문제해결과 직접적으로 관련된 메타인지적 활동을 네 부분으로 분류하였다. 첫 번째 부분에서는 문제 이해와 해석, 두 번째 부분에서는 문제를 푸는 구체적인 방법과 전략, 세 번째 부분에서는 풀이 과정의 감시, 네 번째 부분에서는 문제 실행에 대한 평가에 각각 중점을 두었다. 문제를 풀기 전, 푸는 동안, 다 푼 후에 행한 자신들의 활동을 인식할 수 있도록 네 부분으로 구성하였다. 이 프로그램에 사용된 메타인지적 활동 안내 자료는 다음 [표 Ⅲ-1]과 같다.

[표 Ⅲ-1] 메타인지적 활동 안내 자료

문제이해	**Ⅰ. 문제를 풀기 시작하기 전에** 1. 문제를 찬찬히 한 번 이상 읽는다. 2. 문제가 무엇을 요구하는지를 생각해 본다. 3. 자신의 말로 문제를 설명해 본다. 4. 이전에 이러한 문제를 풀어본 적이 있는지를 생각해 본다. 5. 문제를 푸는 데 필요한 정보에 대하여 생각해 본다. 6. 필요 없는 정보가 있는지를 생각해 본다. 7. 풀 수 있으면 왜 풀 수 있는지를 생각해 본다. 8. 풀 수 없다고 생각이 들면 왜 풀 수 없는지를 생각해본다.

풀이계획	**Ⅱ. 문제를 해결하기 위한 전략** 1. 그림을 그린다. 2. 추측하고 점검한다. 3. 표를 만들어 이용한다. 4. 문제에 필요한 연산을 선택한다. 5. 규칙을 발견한다. 6. 구체물을 이용한다. 7. 단순화한다. 8. 문제의 순서대로 해 본다. 9. 방정식을 세운다. 10. 거꾸로 풀어본다. 11. 체계적인 계획을 세운다. 12. 문제와 관련된 내용을 하나씩 단계적으로 생각해본다.
계획실행	**Ⅲ. 문제를 푸는 도중에** 1. 문제를 푸는 중에 모든 단계를 생각해 본다. 2. 한 단계를 마칠 때마다 문제로 되돌아가 본다. 3. 일단 중단하고 이미 실시한 단계를 다시 생각해 본다. 4. 문제를 풀면서 단계별로 자신의 활동을 점검해 본다. 5. 너무 한 부분에만 빠져들고 있지는 않은지 점검해본다. 6. 문제를 푸는데 필요한 정보가 모두 들어갔는지 확인해 본다. 7. 문제에 제시된 조건이나 성질 관계가 바르게 적용되었는지 확인해 본다. 8. 계산은 바른지 확인해 본다.
점검활동	**Ⅳ. 문제를 다 풀고 난 후에** 1. 풀이 절차가 정확하게 이루어졌는지를 확인해 본다. 2. 계산이 맞는지를 알아보기 위해 점검해 본다. 3. 처음부터 다시 자신의 활동을 점검해 본다. 4. 답이 옳은지를 확인하기 위해 문제를 다시 본다. 5. 문제를 푸는 또 다른 방법을 생각해 본다. 6. 중요한 정보를 기록한다. 7. 문제 속에 어떤 원칙이 들어 있는지 다시 생각해 본다. 8. 여러 가지 생각해 낸 사실 중에 가장 효율적인 것과 새로운 것은 무엇인지 생각해 본다. 9. 나는 잘 할 수 있다는 자신감을 갖는다.

2. 사례를 통한 메타인지 활동 분석

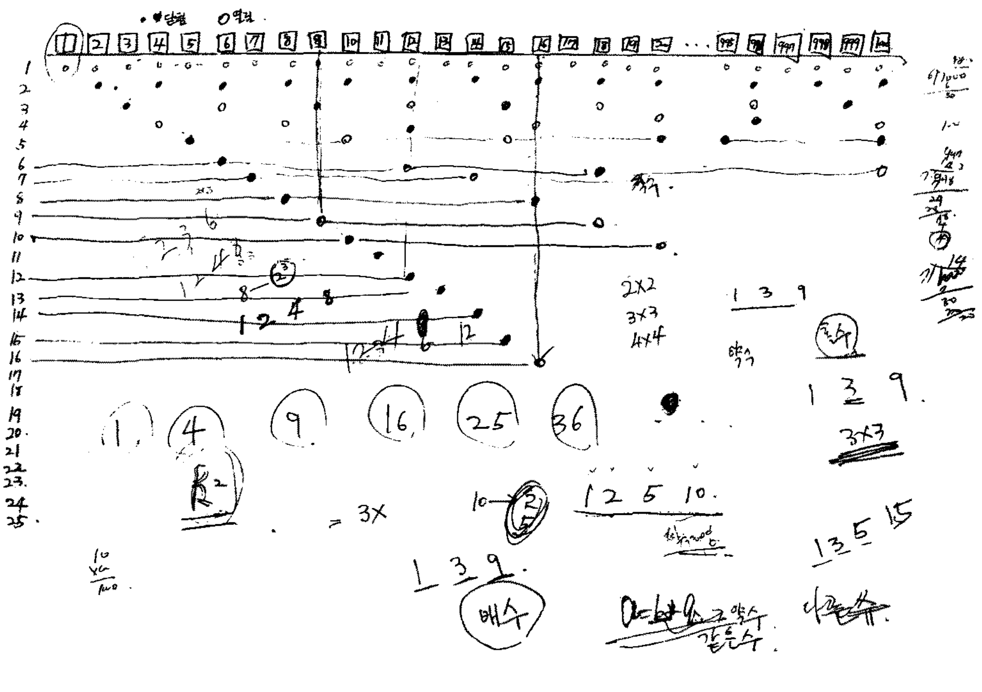
(1) 사례 1

두현이는 인문계 고등학교 남학생이며, 메타인지 활동 훈련을 통한 문제해결 시간을 '생각하는 연습 시간'이라고 말하면서 매 시간 적극적이면서도 즐겁게 참여하였다. 다음은 메타인지적 활동의 훈련을 통한 문제해결과정에서 두현이의 수학적 사고력을 엿볼 수 있는 두 가지 일화이다.

(가) 일화 1

다음은 5차시에 제시한 사물함 문제이다.

> 어떤 고등학교에 1000명의 학생과 1000개의 사물함이 있다. 이 사물함에는 1에서 1000까지의 번호가 붙어 있다. 이 때, 1에서 1000까지의 번호를 가진 학생들이 한 명씩 차례로 자신의 번호의 배수인 사물함의 문만 골라 열린 문은 닫고, 닫힌 문은 열었다. 1000명이 모두 지나갔을 때, 열려있는 문의 번호를 모두 구하여라.



<그림 Ⅲ-1> 두현이의 문제해결 활동(1)

두현이는 처음에는 학생들을 기준으로 1번 학생, 2번 학생, 3번 학생, … 에 대해서 닫히는 사물함의 번호와 열리는 사물함의 번호를 차례로 찾았다. 그러나 이러한 방법으로는 규칙을 찾을 수 없자 "뭔가 다른 방법으로 찾아야 겠다"고 하면서 자신이 하던 방식을 중단하

고 실시한 단계를 다시 되짚어 보았다. 이러한 행동은 좀 더 체계적인 전략으로 바꾸어서 구하려고 하는 것으로써 연구자의 무엇을 하는 것인지에 대한 질문에 "새로운 전략을 사용"하려는 것이라 하였다. 두현이는 곧바로 각 학생에 대해서 닫히는 사물함과 열리는 사물함을 열린 점과 닫힌 점으로 표시하면서 좀 더 체계적으로 찾는 전략으로 바꾸었다.

연구자가 문제를 해결하는 중간에 어떠한 새로운 전략을 세웠는지 물어보았는데, 두현이는 뭔가가 발견될 것처럼 보여 "하나하나 짚어 나가면서 규칙을 발견해 나가는 전략"을 세웠다고 대답하였다. 그리고 이때에 계산이 정확한지를 점검하기 위하여 풀이 과정 중 배수 판정에서의 실수에 주의를 기울이고 있다고 하였다. 다음 <그림 Ⅲ-1>은 두현이의 문제해결 활동 중간 과정이다.

두현이는 이번에 다시 전략을 바꾸어 줄이 그어진 공책을 이용하여 그림을 보다 정교화해서 체계적인 계획하에 문제를 풀어나가기를 원하였다. 추측과 점검을 반복하면서 1, 4, 9, … 로 나간다는 규칙을 발견해 내고, 이러한 규칙을 k^2으로 일반화하였다. 여기서 두현이는 "왜 그럴까?"를 생각하면서 그 이유를 생각하려고 노력하였다고 진술하였다(면담 과정에서 두연이의 진술은 답을 구하는 것을 목표로 하면서도 다른 여러 가지 사실에 대해서 의문점을 가지고 생각을 하면서 문제를 푸는 태도를 갖고 있는 것으로 보임).

결국에는 완전제곱수만이 약수의 개수가 짝수이므로 사물함이 열리게 된다는 것을 발견하고, 구하고자 하는 목표인 열린 사물함의 번호를 답으로 제시하였다. 다음 <그림 Ⅲ-2>는 두현이가 이 문제를 해결한 마지막 과정이다.

(나) 일화 2

두현이가 메타인지적 활동 안내 자료를 제공하는 문제해결 과정에 참여한 마지막 날이었다. 마지막 세 문제를 빠른 시간 내에 성공적으로 해결하였다. 두현이는 이 날 보고서에 다음과 같이 기술하였다.

> 이번 수학 문제해결과 관련해 느낀 점을 몇 자 적어본다.
> 그 동안에 수학이라는 학문은 나에게 있어 귀찮은 학문 측에 속하는 것이었다. 유형을 일일이 파악하여 외우는 식의 공부를 계속해왔기 때문이었다. 그런데 이번 수학 문제를 해결하면서 이런 나의 인식은 상당히 변화를 이룬 것 같다.
> '이런 문제는 이렇게 푼다.'는 식의 틀에 박힌 생각에서 벗어나 다양하게 생각해 보고 따지는 등의 진짜 수학다운 수학을 하고 있다는 생각이 든다.

보고서 내용 중 '이런 문제는 이렇게 푼다'는 식의 틀에 박힌 생각에서 벗어나 다양하게 생각해 보고 따지는 등의 진짜 수학다운 수학을 하고 있다는 두현이의 진술에서 수학적 사고력의 향상을 엿볼 수 있다. 이 보고서는 두현이의 메타인지적 능력이 향상됨과 동시에 수학적 사고력이 신장되었다는 증거를 제공해 준다.

(2) 사례 2

상수는 자연과정을 공부하고 있으며, 화학과 생물을 특히 좋아하는 고등학교 남학생이다. 메타인지적 활동의 훈련 과정에서 상수의 수학적 사고력을 엿볼 수 있는 두 가지 일화를 소개하고자 한다.

(가) 일화 1

7차시에 다음과 같은 문제를 제시하였다.

> 8×8 바둑판에는 서로 다른 직사각형이 모두 몇 개가 있는가? 단, 위치와 크기가 다른 직사각형은 서로 다른 사각형으로 간주한다. 예를 들면, 2×1 직사각형과 1×2 직사각형은 서로 다르다.

처음에는 일일이 세는 전략을 이용하다가 갑자기 난감해하는 표정을 지었다. 연구자가 왜 그러냐고 물었더니 "이렇게 하면 끝이 없을 것 같아요."라고 하면서 다시 생각하였다. 좀 더 체계적으로 생각하여 규칙을 발견하려고 노력하는 것을 관찰할 수 있었다.

<그림 Ⅲ-3>은 상수가 이 문제를 해결하는 과정 중의 일부인데, 상수는 처음 계획했던 전략으로 해결할 수 없음을 깨닫고 곧장 전략을 바꾸어 수정하는 메타인지적 능력을 보여주었다. 상수는 이 프로그램을 시작하기 전의 면담에서 문제에 대해 생각을 잘 하지 않고 푸는 것을 포기해 버리는 경향이 있었다고 말하였다. 메타인지는 인지를 감시하고 조절하여 수행을 조화롭게 하는 추진력(안내력)이라고 하는 점에서 수학적 사고와 밀접한 관계가 있다. 예를 들면, '문제에 주어진 수가 나에게 지나치게 크다.', '이 문제는 저 문제와 비슷하다.'라고 생각하는 것은 각각 사람 변인과 과제 변인에 해당하는 메타인지적 지식이다. 이러한 이해가 바탕이 되어 '나의 능력에 맞는 문제로 고칠 수 없을까?'하는 조절이 일어나고, 그리하여 '보다 단순화해 보자'라는 생각에 의해 인지적인 행동이 나타나게 되는 것이다. 그리고 문제에 직면했을 때, '조리 있게 체계적으로 생각해보자'는 자기 조절을 하고, '이용할 수 있는 이미 알고 있는 문제가 없을까?' 또는 '이와 유사한 문제와 같은 방법으로 해결할 수 없을까?'하는 활동 계획에 의해 '그 경우와 같은 방법으로 시도해 보자.'라는 생각을 하게 된다. 이러한 사실로 미루어 볼 때, 이 사례는 상수의 메타인지적 능력이 활성화됨과 동시에 수학적 사고력이 신장되었다는 증거를 제공한다고 할 수 있다.

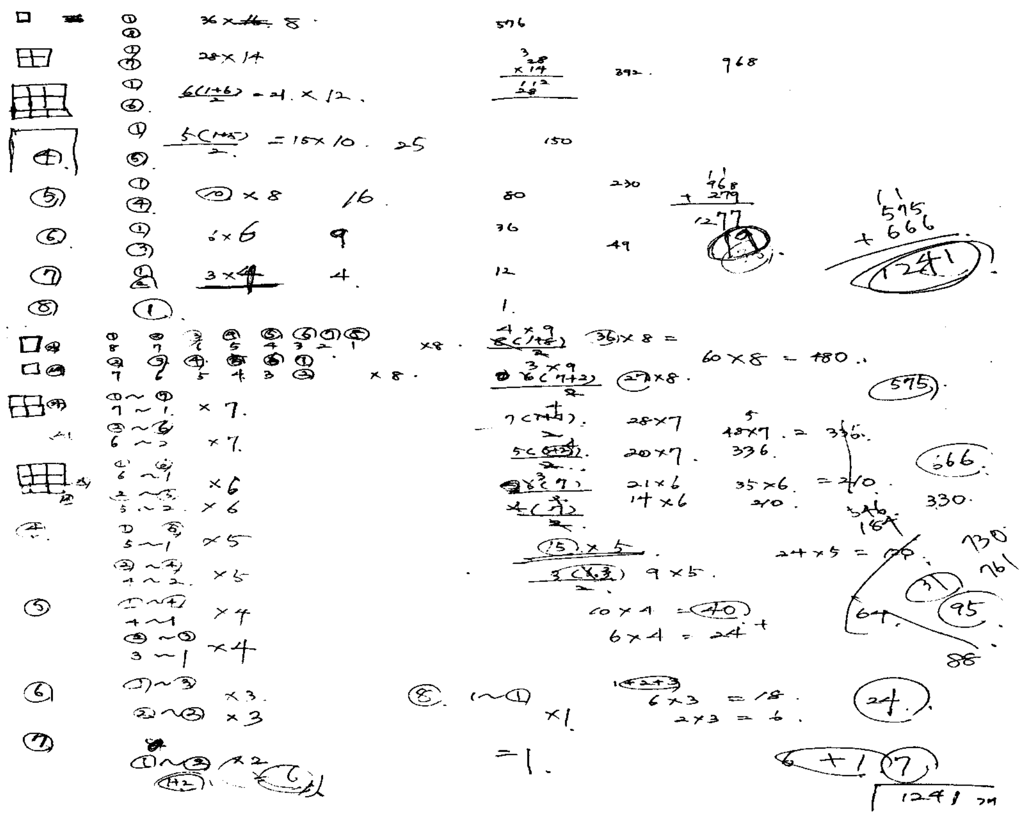
(나) 일화 2

메타인지적 활동 안내 자료를 제공하는 문제해결 과정을 모두 마치고 나서 면담을 실시하였다. 상수는 수학 문제 해결자로서 자신에게 또는 자신의 태도에 생긴 변화에 대한 자유기술에서 다음과 같이 진술하였다.

> … 사고가 발달하고 생각이 넓어졌다.
> 어떤 한 문제를 시간을 두고 따져 보고 생각해 보니까 사고가 발달하고 생각이 넓어졌다는 느낌이 든다. 처음엔 어려워서 포기해버리려고 그랬는데, 내가 풀 수 있도록 바꿔봐야겠다는 생각을 가지고 차분히 따져보자는 생각을 하게 되었다. 그래서 다른 과목의 문제를 풀 때도 차분하게 생각을 많이 하는 버릇이 생겼다. 내가 잘 못 생각을 하고 있지 않나 원리를 가지고 생각을 반복하다 보면 재미있기도 하고, 내가 원하는 답을 발견했을 때 뿌듯하기도 하다.

이러한 면담의 진술에서 보이는 것처럼, 상수는 메타인지적 능력의 활성화에 상당한 진전을 보였음을 기술하였다. 상수가 메타인지적 활동 안내 자료를 제공하는 문제해결 연습을 통하여 문제해결에는 반드시 필요하지만 자신에게는 부족한 여러 가지 메타인지적 능력을

스스로 인식하고 능동적으로 활성화시켰음을 알 수 있다. 또한 이러한 메타인지적 능력을 활성화시킴으로써 수학적 사고력을 신장되었음을 스스로 발견하였다고 진술하고 있다.



<그림 Ⅲ-3> 상수의 문제해결 활동

Ⅳ. 결론

수학이 논리적으로 구성되어 있다는 것은 잘 알려진 사실이다. 따라서 수학교육에서 논리적으로 사고하고 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 것을 목적으로 하는 것은 당연하다. 그러나 논리적으로 구성된 수학을 가르친다고 해서 이와 같은 태도가 길러진다고 기대할 수는 없다. 중요한 것은 행동하고 사고하는 과정을 체계적이게 하여 그러한 사고와 행동을 반성하게 하여 보다 합리적이게 함으로써 이와 같은 태도를 기를 수 있다는 것이다.

본고에서는 메타인지가 수학적 사고 과정에 중요한 역할을 하는 도구임을 제안하여, 학생들의 메타인지 능력을 향상시킴으로써 수학적 사고력을 동시에 신장시킬 수 있다는 근거를 마련하고자 하였다. 이러한 목적을 달성하기 위하여 선행 연구와 문헌 검토를 통하여 학생들의 수학적 사고 과정에서 나타나는 메타인지를 훈련시킬 수 있는 '메타인지 활동 안내자료'를 작성하였고, 이를 수업시간에 적용한 결과를 두 가지 사례를 들어 문제해결 과정에서

메타인지적 활동의 훈련을 통하여 수학적 사고력을 신장시킬 수 있다는 가능성을 살펴보았다.

메타인지적 활동의 훈련을 통해 수학적 사고력을 향상시킬 수 있다는 것은 너무나 당연한 사실일지도 모른다. 이러한 사실은 Nickerson 등(1985)의 주장에서도 그 시사점을 찾을 수 있다. 그들은 사고하는 것은 가르칠 수 있고, 사고 지도에 있어서 특별한 관심을 가져야 할 영역으로 문제해결, 창의성, 메타인지를 들고 있다. 또한 그들은 메타인지에 대한 고려가 '뛰어난 사고'의 한 성분이라고 제안하였다. 문제해결에 대한 논의에서는 특히 문제를 표상하고 계획을 세우는 발견술을 강조하였다. 구체적인 발견술과 지식을 언제 적용하는지에 대해 아는 것, 자신의 수행이 타당한지 확실케 하기 위해 감시하는 것 등과 같은 메타인지적 기술은 문제해결력을 강화시킬 수 있다고 하였다. von Glasersfeld(1995)는 메타인지를 반성적 사고의 일부로 설명하고 있는데, 보다 고차원적인 개념적 수준은 성찰을 통해 이루어지는 것이라 하였고, 성찰을 통해 이용 가능한 도식들을 검토하고 비교하는 수준에서 평형화의 필요 요건인 동요를 만들어 내는 것이라 하였다. 여기서 이러한 이용 가능한 도식에 대한 반성적 작업이 메타인지라 보았다. 그러나 학생들을 도와주기 위해서는 교사가 특정 시점에서 학생을 진보시키기 위한 메타인지에 대한 지식을 갖고 있어야 하나, 교사들에게 철학이나 의미론 전문가적인 내용적 지식보다는 실제적인 접근법이 간절히 필요하다 하였다(von Glasersfeld, 1995). 따라서 본고에서는 어렵고 접근하기 어려운 메타인지의 기술을 현장 접근이 보다 용이해질 수 있도록 문제 해결 각 단계에서의 메타인지적 진술문을 작성하여 이를 수업 시간을 통해 학생들에게 훈련시켜 나가도록 하고 이에 따른 문제 해결과정을 관찰하였다. 그 결과 연구 내용에서 제시 한 바대로 학생들은 자신의 문제 해결 과정에서 필요한 전략과 절차를 의식적으로 모니터링하며 조정하고 통제하려는 모습을 보였으며 특히 문제 해결과정이 성공적이지 못하였을 경우 연습했던 메타인지 전략을 문제 상황이 달라졌음에도 불구하고 적용하는 모습을 보였다.

결론적으로, 수학교육의 중요한 목표 중의 하나인 문제해결력을 향상시키기 위해서 수학적인 지식과 기술을 지탱하고 발동시키는 수학적인 사고력의 신장은 매우 중요한 것이고, 이러한 수학적 사고력을 신장시키기 위해서는 이것을 떠받치고 발동시키는 메타인지적 능력을 향상시키도록 하는 수업 시간에 적절한 발문으로 연습을 시키는 것도 하나의 좋은 방법이라고 할 수 있다.

참고문헌

강완 · 백석윤 (1998). 초등수학교육론. 동명사.

우정호 (2000). 수학 학습-지도 원리와 방법. 서울대학교 출판부

김희수 (2000). 메타인지 전략을 활용한 협동학습이 초등학생 학업 성취와 태도에 미치는 영향. 인천교육대학교 석사학위 논문.

신은주 · 신선희 · 송상헌 (2007) 초등수학영재들의 메타인지적 사고 과정 사례 분석, 수학교육학연구 17(3), 201-220

최은희 · 김민경 (2006). 메타인지 전략을 활용한 수업에서의 초등학생의 수학적 추론과, 표현에 미치는 효과에 관한 연구, 교과교육학연구, 10(1), 191-207.

片桐重男 (1998). 이용률, 성현경, 정동권, 박영배(공역). 구체적인 생각의 구체화. 경문사

片桐重男 (1998). 이용률, 성현경, 정동권, 박영배(공역). 문제해결 과정과 발문 분석. 경문사

Brown, A. N. (1987). Metacognition, executuve control, self-regulation, and other more mysterious mecanism. In F. E. Weinert, & R> H. Kluwe(Eds.), Metacognition, Motivation and Understanding (pp. 65-116). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Cardelle-Elawar, M. (1992). Effects of Teaching Metacognitive Skills to Students with Low Mathematics Ability. Teaching and Teacher Education, 8(2), 109-21

Cobb, P., T. Wood, T., Yackel E., Nicholls, J., Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a Problem-Centered Second-Grade Mathematics Project. Journal for Research in Mathematics Education, 22. 3-29.

Cobb, P., T. Wood, & E. Yackel (1993). Discourse Mathematical Thinking and Classroom Practice. In E. A. Forman, N. Minick, & C. A. Stone, (Eds.), Contexts for learning. New York: Oxford University Press.

Davidson, J. E., & Sternberg, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. In D. J. Hacker, J. Dunlosky, & A. C. Graesser(Eds.), Metacognition in education theory and practice (pp.47-68). Manwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Flavell, J. H. (1976) Metacognitive aspects of problem solving. In L. B. Resnick (Ed.), The nature of intelligence (pp.231-236). Hillsdale, NJ: Erlbaum

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-developmental inquiry. American Psychologist, 34(10), 906-911

Fortunato, I., Hecht, D., Tittle, C. K., & Alvarez, L. (1991, December). Metacognition and problem solving. Arithmetic Teacher, 38-40.

Glasersfeld, E. Von(1995) Radical Constructivism: a way of knowing and learning. London: Taylor & Francis

Harel, G., & Kaput, J. (1991). Advanced mathematical concepts. In D. Tall(Ed.), Advanced mathematical thinking (pp. 82-94). Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers.

Kramarski, B. & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom; The effects of cooperative learning and meta-cognitive training. American Educational Research Journal, 40, 281-310.

Mevarech, Z. R. (1999). Effects of meta-cognitive training embedded in cooperative settings on mathematical problem solving. The Journal of Educational Research, 92, 195-205.

Mevarech, Z.R., Kramarski, B. and Arami, M. (2002). The effects of meta-cognitive training on solving mathematical authentic tasks. Educational Studies in Mathematics, 49, 225-250.

Moynihan, C. M. (1994). A model and study of the role of communication in the mathematics learning process. Unpublished Doctoral dissertation. Boston University.

Nickerson, R. S., Perkins, D. N., & Smith, E. E. (1985). The teaching of thinking.

Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schraw, G. (1994). The effect of metacognitive knowledge on local and global monitoring. Contemporary Educational Psychology, 19, 143-154.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld(Ed.), Cognitive science and mathematics education(pp. 189-215), Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

A Case study of Metacognitive Strategy Training on Mathematical Problem Solving

Lee, Bong Ju[3] · Ko, Ho Kyoung[4]

Abstract

The purpose of this article is to formulate the base that mathematical thinking power can be improved through activating the metacognitive ability of students in the math problem solving process. The guidance material for activating the metacognitive ability was devised based on a body of literature and various studies. Two high school students used it in their math problem solving process. They reported that their own mathematical thinking power was improved in this process. And they showed that the necessary strategies and procedures for math problem solving can be monitored and controled by analyzing their own metacognition in the mathematical thinking process. This result suggests that students' metacognition does piay an important role in the mathematical thinking process.

Key Words : Metacognition, Problem solving process, Metacognitive guidance material

3) Korea Institute for Curriculum & Evaluation (yibongju@kice.re.kr)
4) Wonkwang University (koho@wku.ac.kr)