한국학교수학회논문집 제 12 권, 제 3 호
Journal of the Korean School Mathematics Society
Volume 12, Number 3, 171-188, September 2009

삼각형의 내·외심 지도방법 연구*

강윤수1) · 서은정2)

이 연구는 현행 삼각형의 내·외심 교수-학습 방법의 문제점을 개선한 지도방법을 고안하여 시행함으로써 이러한 대안적 방법이 학생들에게 어떤 영향을 미치는지를 확인하기 위한 의도로 설계되었다. 이를 위해, 이미 삼각형의 내·외심을 학습한 학생들과 수학교사들을 대상으로 설문조사를 실시하여 내·외심에 대한 학생들의 이해와 교사들의 지도방법을 파악하였다. 그런 다음, 설문조사에서 드러난 결과적 접근방식의 문제점을 개선한 분석적 내·외심 지도방법을 고안하여 활용한 후에 그 결과를 분석하였다.

주요용어 : 삼각형의 내심과 외심, 중학생들의 내·외심 이해, 내·외심 지도방법

Ⅰ. 서 론

우리나라 수학과 교육과정(교육부, 2007)에서는 수학과의 성격을 '수학적 개념, 원리, 법칙을 이해하고 논리적으로 사고하며...여러 가지 문제를 수학적인 방법을 사용하여 합리적으로 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과'로 규정하고 있다. 또, 수학의 교수·학습에서는 '구체적인 경험에 근거한 활동, 점진적인 추상화, 수학적 경험을 통한 형식이나 관계 발견 등의 과정을 거쳐 수학적 개념, 원리, 법칙 등을 이해할 수 있도록 한다'고 명시하고 있다.

이를 기하교육에 적용하면, 구체적인 조작활동과 같은 수학적 경험을 통해 여러 가지 도형이나 성질 사이에 성립하는 수학적인 형식이나 관계를 발견하게 하고 이를 점진적으로 추상화하여 획득한 수학적 개념, 원리, 법칙을 활용하여 여러 가지 문제를 해결하도록 하는 것이 기하교육의 목적이 되어야 한다. 여기서 기하교육의 특성을 고려하면, 조작활동, 관계, 추론과 증명 등이 핵심어로 추출될 수 있다. 전통적으로 증명은 고등학교 수학(우리나라의 경우는 중2) 이상의 수준에서 다루어지는 것으로 이해되었으나 최근 들어서는 모든 학생들의 수학적 경험에 '추론과 증명'이 중심이 되어야 한다고 강조하고 있다(Hanna, 2000; NCTM, 2000; Yackel & Hanna, 2003).

문헌들에서는 저학년에서도 추론과 증명을 강조해야 하는 이유로 몇 가지를 들고 있는데 첫째는 '수학을 하는 것(doing mathematics)'에 필수적이라는 것이다. 즉, 추론과 증명이 수

* 이 연구는 2008학년도 순천대학교 사범대학의 연구비 지원에 의한 것임.
1) 순천대학교 수학교육과 (yskang@sunchon.ac.kr)
2) 순천향림중학교 (iroeun@hanmail.net)

학적 이해의 바탕이 되며, 수학적 지식을 개발하고, 확립하고, 의사소통 하는데 필수적인 역할을 한다는 것이다(Ball & Bass, 2003; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

또 다른 이유로는, 결론을 도출해야 하고 결정을 내려야 하는 모든 상황에서 추론과 증명이 관련되기 때문에 추론과 증명에 익숙한 학생들은 수학의 다른 분야에서도 잘 할 수 있게 된다는 것이다. 더구나 학생들이 특정 학년에서 갑자기 증명을 다루게 되면 많은 어려움(Ball et al., 2002; Harel & Sowder, 1998; Marrades & Gutierrez, 2000; Healy & Hoyles, 2000; Knuth, Choppin, Slaughter & Sutherland, 2002)에 직면할 수 있기 때문에 점차적으로 증명에 익숙할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 다시 말해서, 형식적인 증명을 다루는 단계에 도달하기 전이라도 학생들은 여러 가지 조작활동을 통해 대상들 사이의 관계를 추측하고 이를 정당화하는 과정에서 자연스럽게 추론과 증명 학습에 노출되어야 한다는 것이다.

NCTM(2000)에서 제시한 10가지 규준 중의 하나인 '기하' 규준에서도 정의나 이미 확립된 사실로부터 추론하고 증명하는 능력을 개발하는 것이 기하교육의 초점이 되어야 한다고 강조하고 있다. 즉, 기하는 학생들의 추론과 정당화 능력을 개발하는데 중요한 역할을 하며, 기하적 아이디어는 수학의 다른 분야 혹은 실제 상황에서의 표현이나 문제해결에 유용하다는 것이다. 이와 함께, '기하'규준에서는 기하적 대상들의 성질을 분석하고 이들 사이의 관계를 추측하는 것, 문제 해결 과정에 시각화, 공간적 추론, 기하적 모델링을 활용할 것 등을 강조하고 있다. 한마디로 기하는 '단순한 정의들의 나열일 수 없으며 추론하고 (기하적 성질들 사이의) 관계를 묘사하는 것'이라는 것이다.

위의 과정에서 확인할 수 있는 것은, 기하 개념에 대한 형식화된 정의를 제시한 후에 연역적으로 기하적 성질을 이끌어 내는 것에 치중하는 것은 바람직한 기하교육의 모습이 아니며 학생들이 조작활동을 통해 개념을 이해하도록 하고 기하적 대상 사이의 관계를 추측하고 정당화하는 과정을 통해 점진적으로 형식화해 가도록 해야 한다는 것이다. 하지만 현재 진행되고 있는 우리나라 기하교육은 학생들의 사고과정이 충분히 고려되지 못한 채 형식적 수준에서 이루어지는 경우가 많다. 이런 입장에 기초하여, '기하교육은 어떻게 이루어져야 하는가?'에 대한 많은 대안적 접근들이 시도되었다. 그 중에서도, 기하영역의 교수-학습 개선방안과 관련하여, 분석-종합적 활동에 관한 증명학습 연구(고수철, 2002; 유소영, 2005; 이용민, 2000), 탐구형 기하소프트웨어 환경에서의 기하학습 연구(남선주, 2006; 연제철, 2001; 정수진, 2007), 조작적 활동을 통한 학습 지도방법에 관한 연구(권은정, 2006; 한인기 · 신현용, 2002) 등이 있다.

하지만, 기하학습의 여러 요소들을 포함하고 있어 매우 중요한 기하교육 소재인 삼각형의 내 · 외심에 대한 교수학적 연구가 아직도 심층적으로 진행되지 못하고 있다. 예를 들어, 삼각형의 '외심'을 결과적 정의로 도입하면 너무 간단하게 설명할 수 있지만 '주어진 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원'을 분석적으로 탐구해 가는 과정에서는 선분, 선분의 중점, 수직이등분, 원의 성질, 삼각형의 합동조건, 추론과 증명 등 중학교 기하교육에서 추구하는 많은 요소들이 고려되어야 한다. 특히, 이러한 분석적 탐구과정은 여러 요소들이 서로 연계되어 학습되므로 개념들 사이의 연결성 교육에 크게 기여할 수 있다.

이런 입장을 바탕으로, 본 연구에서는 삼각형의 내 · 외심 지도의 실태를 파악, 분석한 후에 그 대안적 방법으로 분석활동을 강조한 지도를 시도하고 그 결과를 분석하고자 한다. 이를 위해, 중소도시인 S시 소재 H중학교 3학년 4개반(보충반1, 기본반2, 심화반1) 131명의 학생들과 S, G시 소재 중학교 31명의 수학교사들을 대상으로 설문조사를 실시하여, 삼각형의 내 · 외심 교수-학습 과정에서 학생들이 겪는 어려움과 수학교사들이 선호하는 지도방법을

조사한다. 이를 바탕으로, 분석활동을 강조한 삼각형의 내·외심 교수-학습 과정을 설계하고 중학교 2학년 학생들에게 투입하여 그들의 기하학습에 어떤 영향을 미치는지를 탐구해 보고자 한다.

Ⅱ. 중학생들의 삼각형 내·외심 개념 이해

삼각형의 내·외심에 대한 중학생들의 이해 정도를 조사하기 위해 이미 삼각형의 내·외심을 학습한 131명의 중학교 3학년 학생들을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 설문조사는 삼각형의 내·외심 관련 교육과정 내용을 고려하여, 용어에 대한 이미지, 구성 요소에 대한 이해도, 관련 성질에 대한 증명 읽기 능력, 삼각형의 내·외심에 대한 개념 이미지, 삼각형의 내·외심 구성 과정 추론 능력 등을 확인하기 위한 문항으로 구성하였다. 이들 각 영역에 포함된 문항 예시는 다음과 같으며, 결과분석은 응답결과에 대한 빈도수 분석과 학생들의 주관적 서술 결과에 대한 텍스트 분석을 병행하였다.

<표 1> 학생 설문조사 문항 예시

문제1. 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원을 무엇이라 하는가?

① 내접원　② 외접원　③ 동심원　④ 삼심원

문제2. 『 삼각형의 내심은 (　　　　)의 교점이다.』 에서 (　)안에 들어갈 내용은 무엇인가?

① 세 각의 이등분선
② 세 변의 수직 이등분선
③ 각 변에 평행한 세직선
④ 꼭지점과 그 대변의 중점을 연결한 선분들

문제3. 명제 『 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.』를 증명하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 내용은?

가정 : $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}, \overline{AC}$의 수직이등분선의 교점을 O라 하고, 점 O에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 E라고 한다.

결론 : $\overline{BE} = \overline{CE}$

증명) $\triangle ABC$에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 수직이등분선의 교점이 O이므로 수직이등분선의 성질에 의하여,

$\overline{OA} = \overline{OB}$, $\overline{OA} = \overline{OC}$ 이므로 $\overline{OB} = \overline{OC}$

$\triangle OBE$와 $\triangle OCE$에서

$\angle OEB = \angle OEC = 90$

$\overline{OE}$는 공통인 변

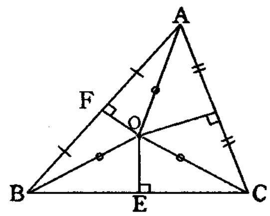
$\overline{OB} =$ (가)

$\triangle OBE \equiv \triangle OCE$((나) 합동)

$\therefore \overline{BE} =$ (다)

그러므로 $\overline{OE}$는 $\overline{BC}$의 수직이등분선에 포함된다.

따라서, 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.



문제4. 삼각형의 내심에 대해 아는 대로 설명해 보시오. 문제5. 삼각형의 외심이나 외접원을 이야기할 때, (선분의 수직이등분선, 각의 이등분선, 중선 중 선택)을 생각한다. 이 선을 생각하는 이유를 쓰시오.

1. 내 · 외접원 형태에 대한 이해

내접원과 외접원의 형태를 묻는 문항에 대해서는 80% 이상의 높은 정답률[3)]을 나타내었다. 보충반(35명) 학생들도 82.9%의 높은 정답률을 나타내 각각 93.9%와 86.7%의 정답률을 보인 기본반(66명), 심화반(30명) 학생들과 큰 차이가 없었다. 특히, 심화반 학생들에 비해 기본반 학생들의 정답률이 높은 특이한 현상이 나타나기도 했다.

2. 내 · 외심 구성요소에 대한 이해

삼각형의 내 · 외심을 분석적으로 추론하고자 할 때, 핵심적인 고려 대상이 되는 구성요소인 보조선에 대한 이해 정도를 묻는 문항에 대해서는 내심(20.0%, 31.8%, 63.3%)[4)]과 외심(22.9%, 30.3%, 53.3%) 정답률이 현저히 낮아져 용어의 형태에 대한 이해도와 큰 차이를 나타내었다. 이 두 문항에 대한 오답자의 응답결과를 분석한 결과, 보충반 학생의 5.7%, 기본 · 심화반 학생의 33.3%가 정답을 서로 바꿔 쓴 것으로 나타났다. 이는 외심과 내심의 정의와 의미를 혼동하고 있음을 보여주는 것으로 내심이나 외심의 발생적 구성원리를 이해하지 못한 채, 암기 학습에 의존한 결과로 판단된다.

3. 내 · 외심 관련 성질 증명 읽기 이해

내심과 외심 관련 성질의 증명 과정을 제시하고, 빈 칸을 채우는 증명 읽기 문제(외심의 경우: 문제3)에서 보충반 학생들과 심화반 학생들의 정답률에 큰 차이가 나타났다. '문제3'의 경우 합동을 보이기 위한 대응변(가), 합동조건(나), 결론(다) 찾기 등의 문제에 대한 정답률이 각각 (11.4%, 71.2%, 83.3%), (0.0%, 3.0%, 50.0%), (48.6%, 87.9%, 93.3%)로 나타났다. '문제3'은 증명이 주어진 상황에서 빈 칸을 채우는 문제지만 이미 정답이 제시된 (가), (다)의 경우에도 보충반 학생들은 매우 낮은 정답률을 나타내어 증명의 전,후 관계를 전혀 파악하지 못하고 있음을 보여주었다. 특히, 문제에서 결론으로 주어진 부분을 확인하는 과정인 (다)의 경우 보충반 학생들은 정답률이 50%에도 미치지 못해 증명이 무엇을 목표로 하는지를 전혀 이해하지 못하고 있는 것으로 파악되었다. 한편, '직각삼각형에서 빗변의 길이와 다른 한 변의 길이가 같다'를 기호(RHS)로 표현해야 하는 문항(나)에 대해 거의 모든 보충반과 기본반 학생들이 바른 답을 적지 못했으며, 심화반 학생들의 정답률도 50% 정도로 현저히 낮게 나타났다. 이 문항(나)에 대한 오답을 분석한 결과, 많은 학생들이 SAS라고 써 놓아 삼각형의 합동조건과 직각삼각형의 합동조건을 구분하는데 많은 어려움을 느끼는 것으로 조사되었다.

한편, '삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점에서 만난다'는 내심의 성질에 대한 증명을

3) 두 문항의 쌍대적 특성 상 정답률이 같다.
4) 세 집단의 정답률을 (보충반, 기본반, 심화반)과 같이 순서쌍 형식으로 표현한 것이다.

제시하고 대응각, 합동조건, 결론 찾기 등의 빈 칸을 채우는 문제에 대한 정답률은 각각 (25.7%, 66.7%, 90.0%), (0.0%, 0.0%, 40.0%), (28.6%, 78.8%, 96.7%)로 나타나 외심의 경우와 크게 다르지 않았다.

위의 두 문제(빈 칸 채우기)에 대한 정답을 모두 맞춘 학생들은 심화반의 26.7%에 불과했다. 이는 중학생들의 약 73%가 연역적 증명 능력이 전혀 없다는 전영준(2007)의 연구와 비슷한 결과이다.

4. 삼각형의 내·외심에 대한 학생들의 개념 이미지

삼각형의 내·외심이 무엇이라고 생각하는지에 대해 자유롭게 서술하도록 한 문제(문제4)에 대해 기초반 학생들은 한 명도 응답하지 않아 이들 개념에 대해 파지된 내용이 전혀 없거나 자신의 생각을 적절히 표현하지 못한 것으로 드러났다. 기본반과 심화반 학생들의 주요 응답 내용은 다음과 같다[5].

- 내접원의 중심(기본반: 1명, 심화반: 4명)
- 내심은 항상 삼각형 안에 있고, 삼각형의 안에 원을 그린다.(기본반: 9명, 심화반: 3명)
- 내접원은 삼각형의 세변을 지나는 곡선(기본반: 1명, 심화반: 1명)
- 내심은 삼각형의 세 각의 이등분선의 교점이다.(기본반: 4명, 심화반: 5명)
- 내심에서 세 변까지의 길이는 모두 같다(기본반: 1명, 심화반: 2명)
- $x+y+z=90°$(그림)(기본반: 1명, 심화반: 1명) *세 각의 이등분을 나타냄
- 합동인 삼각형이 3쌍 생긴다. (그림)(기본반: 1명, 심화반: 1명)

학생들의 응답 결과는 그들이 결과적 지식에 의존할 뿐, 그 정당성을 보장해 주는 발생적 근거에 관심 갖지 않음을 보여준다. 예를 들어, 삼각형의 내심의 경우 세 변에 접하는 원이 존재하는지, 그 원이 유일한지, 그 원의 중심을 어떻게 찾을 수 있는지 등 내심의 존재성과 관련된 발생적, 분석적 추론 결과로 얻어진 이해라고 평가할 수 있는 응답 결과는 없었다.

각종 수학교과서와 (교사설문지 분석 결과에 의한) 교사들의 내·외심 지도방법에는 종이접기를 이용한 직관적·실험적 단계를 거쳐 이들 개념을 설명하는 경우가 많았는데, 학생들의 응답에는 종이접기를 해서 내·외심의 존재를 확인할 수 있다고 응답한 학생은 한 명도 없었다.

5. 삼각형의 내·외심 구성에 대한 학생들의 추론 능력

삼각형의 내·외심에서 각의 이등분선이나 변의 수직이등분선을 고려해야 하는 이유를 묻는 문항(문제5)에 대해 학생들은 이들 보조선을 고려할 수밖에 없는 당위성을 설명하지 못하고 결과적 관계로 기술하는 경향을 나타내었다. 다음은 외심에 대해 각 변의 수직이등분선을 고려하는 이유로 학생들이 제시한 응답 결과이다[6].

5) 외심의 경우도 주로 결과적으로 나타난 외형적 형태에 관한 응답결과를 나타내 여기서는 내심에 대한 응답결과만 다루기로 한다.

6) 내심에 대해 각의 이등분선을 고려해야 하는 이유도 외심의 경우와 구조적으로 유사하므로 여기서

- 합동인지를 알기위해(기본반: 1명)
- 삼각형의 세 변의 수직이등분선을 그으면 한 점에서 만나는데 각 꼭지점에서 그 점까지 길이가 같고 외심에서 한 선분에 수선을 그으면 그 선분이 이등분되기 때문에(기본반: 1명, 심화반: 1명)
- 삼각형 외심이나 외접원의 성질을 구하기 위해(기본반: 2명, 심화반: 3명)
- 선분의 수직이등분선의 교점이 외심이고 세 꼭지점과 외심의 거리가 외접원의 반지름이므로(심화반: 2명)
- 이런 것 생각 안함(심화반: 1명)

위의 응답 결과와 같이 학생들은 각 변의 수직이등분선을 고려해야 하는 이유를 외심의 존재성을 정당화하는 측면에서 접근하지 않고 결과적으로 나타난 외심의 성질이나 증명에 필요한 여러 요소들 중의 하나로 인식하였다. 각 변의 수직이등분선을 고려하는 이유가 설명되지 않으면 그 교점을 생각하는 이유가 불분명하며 이런 상황에서 외심의 성질을 언급하거나 증명하는 것은 논리적인 정당성을 확보하기 힘들다.

Ⅲ. 수학교사들의 내 · 외심 지도방법

중학교 수학교사들이 삼각형의 내 · 외심을 실제로 어떻게 지도하는지를 알아보기 위해 현직 수학교사 31명(남:7, 여:24)을 대상으로 설문조사를 실시하였다. 이들 중 80%는 중학교에서만 계속 근무한 교사들이며, 교직경력 10년 미만이 14명, 10-20년 미만이 5명, 20-30년 미만이 10명, 30년 이상이 2명 이었다.

설문조사는 6개의 문항과 5개의 하위문항 등 모두 11개 문항으로 구성되어 있으며 질문 목적에 따라 선택형과 서술형을 혼용하였다. 설문조사 문항 내용을 요약하면 다음과 같다.

- 삼각형의 내 · 외심 개념을 어떻게 도입하는가?(선택형) 사용하는 교구와 활동은?
- 삼각형의 내 · 외심 지도 시 각의 이등분선이나 변의 수직이등분선을 생각하는 이유를 설명할 필요가 있는가? 어떻게 설명하는가?(서술형) 설명하지 않은 이유는 무엇인가?(선택형)
- 삼각형의 내 · 외심 성질 증명 지도 과정에서 가장 강조하는 것은 무엇인가?(복수선택형)

삼각형의 외심을 도입할 때, 교사들은 '삼각형의 세 변에서 각각 수직이등분선을 작도하여 이들 교점이 외심'이라고 설명하는 방법을 가장 선호(35.5%)하였으며, 종이접기를 활용하여 수직이등분선을 접어서 외심 개념을 도입하는 방법이 29%의 응답률을 나타내었다. 이에 반해, 수직이등분선의 성질과 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원의 존재성을 연관지어 생각해보는 분석적 방식으로 외심을 설명하는 교사는 12.9%에 불과하였다. 교사들이 주로 활용하는 교구나 활동은 컴퍼스와 자, 종이접기, 외심측정기, GSP, 플래시 자료 등으로 나타났다. 한편, 77.4%의 교사들이 수직이등분선을 생각해야 하는 이유를 '설명할 필요가 있다'고

는 외심에 대한 응답 결과만 다루기로 한다.

답했으나 설명방법으로 '외심의 정의가 수직이등분선의 교점이니까'를 가장 많이(16.7%)선택하였다. 더구나 '설명할 필요가 없다'고 응답한 7명 중 4명이 그 이유로 '외심의 정의가 수직이등분선의 교점이니까'를 선택하여 교사들이 외심을 결과적 정의로 받아들일 뿐, 발생적 과정으로 분석하지 않은 경향성을 나타내었다. 수학교사들의 이러한 지도 성향은 현재 활용되고 있는 중학교 수학교과서 중 6종에서 '종이 삼각형의 두 꼭지점이 서로 포개어지게 각각 접은 후 세 선이 한 점에서 만나는지 확인하고, 그 점을 중심으로 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원을 그린다'와 같은 방식으로 외심을 도입하는 것과도 큰 차이가 있다.

이러한 수학교사들의 경향성은 내심을 도입하는 과정에도 그대로 나타나, '세 각의 이등분선을 작도하면 한 점에서 만나는데 이를 내심이라고 한다'와 '종이접기를 활용한 각의 이등분선 작도' 방법이 각각 32.3%로 가장 높은 응답 비율을 나타내었다. 또한, 수학교사들의 74.2%가 '내심을 찾을 때 각의 이등분선을 생각하는 이유를 학생들에게 설명해야 한다'고 응답했으며 설명방법으로는 '내심의 정의가 각의 이등분선의 교점이니까'라고 응답한 교사가 가장 많게(20.8%) 나타났다. 외심의 경우와 비슷하게, 각의 이등분선을 고려할 필요가 없다고 응답한 8명 중 4명이 그 이유로 '세 각의 이등분선의 교점을 내심이라 하므로 굳이 따로 설명할 필요가 없다'고 응답하였다.

'삼각형의 내 · 외심 성질 증명 지도 과정에서 가장 강조하는 것은 무엇인가?'라는 복수응답을 허용한 질문에 54.8%의 교사들이 '용어의 정의를 명확히 알도록 한다'고 응답하고 '증명에 필요한 도형의 성질이나 정리의 내용을 알도록 한다'에 35.5%의 응답율을 나타내었다. 이에 반해, '증명해야 할 결론이 성립하기 위해 무엇을 해야 하는가를 탐색하는 분석적 방법을 강조한다'고 응답한 교사 비율은 25.8%에 그쳤다. 이러한 결과는 많은 교사들이 결과적 지식인 증명을 학생들에게 설명하기 위해 필요한 요소들을 강조하고 있음을 보여주는 것이며, 학생들로 하여금 자연스러운 탐구과정을 통해 논리적 관계를 추측하고 정당화하면서 추론과정을 학습할 기회를 보장하지 않는다는 것을 의미한다.

Ⅳ. 분석활동을 활용한 내 · 외심 지도

중학생들과 수학교사들을 대상으로 실시한 설문조사 결과를 한 마디로 요약하면, 학교수학에서 가르치는 삼각형의 내 · 외심은 대개 결과적 지식으로 가르쳐지고 있다는 것이다.

제7차 수학과 교육과정에 의한 중학교 수학교과서에서도 외심을 대개 다음 두 가지 중 하나로 정의하고 있다.

정의1. 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점
정의2. 삼각형의 외접원의 중심

'정의1' 은 어떤 삼각형에 대해서도 세 변의 수직이등분선을 작도하면 한 점에서 만나게 된다는 가정이 포함되어 있다. '정의2'에도 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원이 반드시 존재하고 그 원은 하나라는 가정이 포함되어 있다. 물론, '삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다'는 외심의 성질은 수학적으로 증명되므로 위에서와 같이 정의하는 것은 적어도 수학적으로는 문제가 없다.

하지만, 학생들에게 외심을 지도할 때 이들 중 어느 하나를 정의로 받아들여 기정사실화

하는 것은 여러 가지 기하학적 요소들, 그들 사이의 관계를 학습할 기회를 놓치는 결과를 가져올 수 있다.

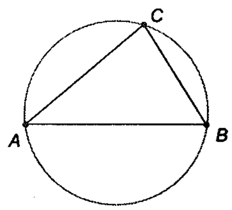
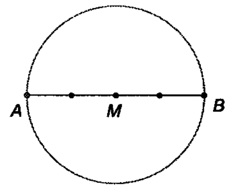
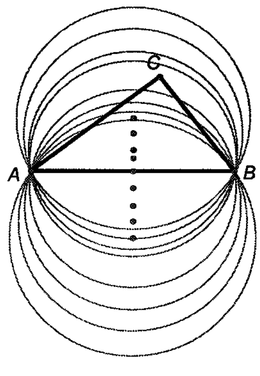
반대로, 이 정의를 의문의 여지가 없는 결과적 지식으로 받아들이지 않고 '어떻게 이러한 정의가 가능한지', 혹은 '이러한 정의가 가능하기 위한 전제조건은 만족하는지' 등을 탐구하는 분석적 활동을 통해 외심을 도입한다면 다음과 같은 의문점들이 학습대상이 될 수 있다.

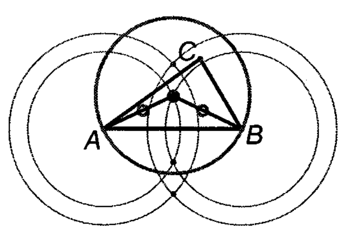
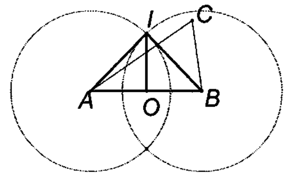
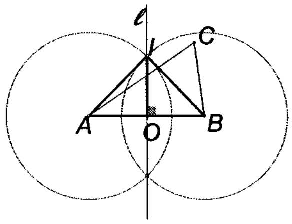
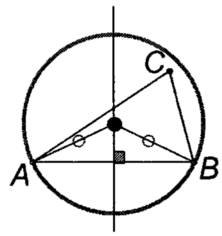
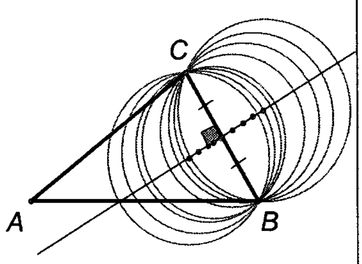
의문점1. 삼각형의 세 꼭지점을 지나는 원은 항상 존재하는가? 존재한다면, 반드시 하나만 존재하는가?

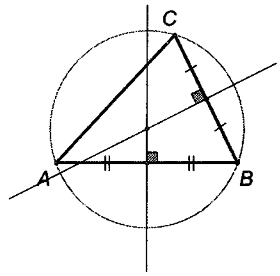
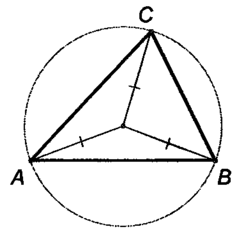
의문점2. 외심을 찾으려고 하는데 왜 수직이등분선을 생각해야 하는가?

위의 의문점들을 탐구대상으로 하는 교수-학습 과정을 탐구주제(발문)와 그에 대한 교수학습 활동(학습목표)을 중심으로 구성하면 다음과 같다.

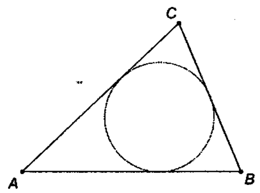
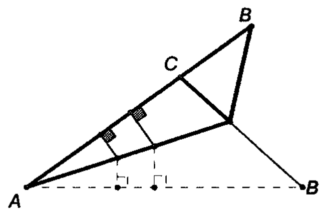
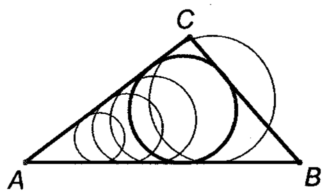
1. 분석활동을 활용한 외심 지도의 예

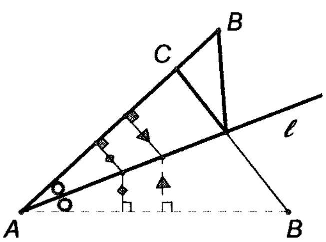
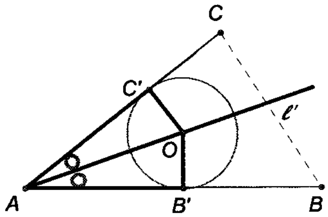
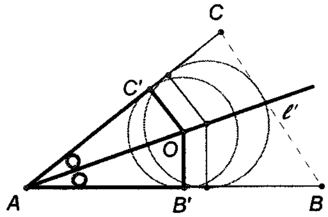
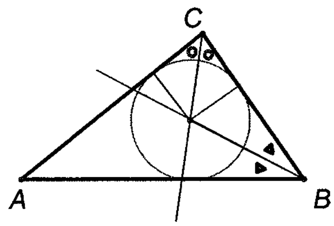
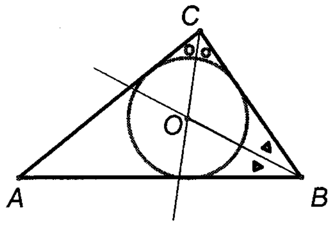
발문(분석적 탐구)	교수-학습 활동(학습목표)	
$\triangle ABC$ 의 세 꼭지점을 지나는 원은 두 꼭지점을 지나는 원과 어떤 관계인가?	세 꼭지점을 지나는 원은 반드시 두 꼭지점을 지난다.	
$\triangle ABC$의 두 꼭지점(A,B)을 지나는 원은 존재하는가?	$\overline{AB}$의 중점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{AB}$인 원이 존재한다.	
$\triangle ABC$의 두 꼭지점(A,B)을 지나는 원은 하나만 존재하는가? 이 원들의 중심은 A,B와 어떤 관계가 있는가?	$\overline{AB}$를 지름으로 갖는 원 외에도 $\overline{AB}$를 현으로 갖는 원이 존재할 수 있으며 원의 중심은 두 꼭지점에서 같은 거리에 있다.	

두 꼭지점(A,B)을 지나는 원의 중심은 어떻게 찾을 수 있는가?	찾고자 하는 원의 중심은 두 꼭지점에서 같은 거리에 있어야 하므로 두 꼭지점을 중심으로 하는 원을 작도하여 교점을 구하면 된다.	
두 꼭지점(A,B)을 지나는 원들의 중심은 $\overline{AB}$ 와 어떤 관계인가?	두 꼭지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}\overline{AB}$보다 큰 동심원의 교점(I)과 $\overline{AB}$의 중점(O)을 연결하는 선분에 의해 만들어진 두 삼각형 $\triangle AIO$와 $\triangle BIO$는 SSS합동이다. 이때 $\angle AOI = \angle BOI$이므로 두 각은 직각이고, $\overline{IO}$를 포함한 직선(l)은 $\overline{AB}$를 수직이등분한다. 따라서, 두 꼭지점을 지나는 원의 중심은 반드시 $\overline{AB}$의 수직이등분선(l) 위에 놓이게 된다. 역으로 수직이등분선(l) 위의 임의의 점은 두 꼭지점(A,B)을 지나는 원의 중심이 될 수 있다.	
두 꼭지점(B,C)를 지나는 원들의 중심은 $\overline{BC}$와 어떤 관계인가?	두 꼭지점(B,C)를 지나는 원들의 중심은 $\overline{BC}$의 수직이등분선 위에 놓이며, 그 역도 성립한다.	

세 꼭지점(A,B,C)을 모두 지나는 원이 존재하는가?	$\overline{AB}$의 수직이등분선과 $\overline{BC}$의 수직이등분선은 평행할 수 없으므로 한 점에서 만난다. 이 교점을 중심으로 하고 한 꼭지점까지의 거리를 반지름으로 하는 원을 그리면 세 꼭지점을 모두 지나게 된다.	
세 꼭지점(A,B,C)을 모두 지나는 원은 하나밖에 없는가?	세 꼭지점(A,B,C)을 모두 지나는 원은 그 중심이 $\overline{AB}$와 $\overline{BC}$의 수직이등분선에 동시에 포함되어야 하므로 하나밖에 없다. 이 원을 $\triangle ABC$의 외접원이라고 하고 그 중심을 **외심**이라고 한다.	

2. 분석활동을 활용한 내심 지도의 예

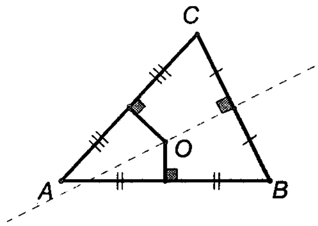
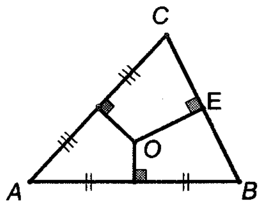
발문(분석적 탐구)	교수-학습 활동(학습목표)	
$\triangle ABC$ 의 세 변에 접하는 원은 두 변에 접하는 원과 어떤 관계인가?	세 변에 접하는 원은 반드시 두 변에 접한다.	
$\triangle ABC$의 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원은 존재하는가?	두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에서 같은 거리에 있는 점들이 존재(종이접기 활동을 통해 확인할 수 있음)하므로 두 변에 접하는 원이 존재한다.	
$\triangle ABC$의 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원은 하나만 존재하는가?	두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에서 같은 거리에 있는 점은 무수히 많으므로 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원은 무수히 많다.	

$\triangle ABC$ 의 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원의 중심은 어떻게 찾을 수 있는가?	찾고자 하는 원의 중심은 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에서 같은 거리에 있어야 한다. 종이삼각형을 만들어 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)을 포개어 같은 거리에 있는 점들이 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)이 이루는 각의 이등분선(l') 위에 놓일 수 있음을 추측한다.	
$\triangle ABC$의 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원들의 중심은 $\angle CAB$와 어떤 관계인가?	두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 접하는 원의 중심을 O라고 하고 이 원과 두 변의 교점을 각각 B', C'이라고 하면, 두 삼각형 $\triangle AOB'$과 $\triangle AOC'$은 직각삼각형의 합동조건(RHS)에 의해 합동이다. 이 때, 대응하는 두 각 $\angle B'AO$와 $\angle C'AO$는 같으므로 원의 중심(O)은 $\angle BAC$의 이등분선(l') 위에 놓인다. 역으로, $\angle BAC$의 이등분선(l') 위의 임의의 점에서 두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)에 내린 수선의 발을 반지름으로 하는 원을 작도할 수 있다.	
세 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$)에 모두 접하는 원이 존재하는가?	$\angle ABC$와 $\angle BCA$의 이등분선은 평행하지 않으므로 한 점에서 만난다. 이 점을 중심으로 하고 $\overline{AB}$에 접하는 원을 작도하면 이 원은 $\overline{BC}$에 접하게 되고 이 원의 중심이 $\angle BCA$의 이등분선 위에 있으므로 $\overline{CA}$에도 접하게 된다.	
세 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$)에 모두 접하는 원은 유일한가?	세 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$)에 모두 접하는 임의의 원을 생각하고 그 중심을 O라고 하자. 이 원이 두 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$)에 접하므로 그 중심 O는 $\angle ABC$의 이등분선에 놓인다. 마찬가지로, 이 원이 두 변($\overline{BC}$, $\overline{CA}$)에도 접하므로 $\angle BCA$의 이등분선에도 포함된다. 따	

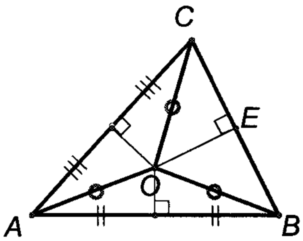
	라서 이 원의 중심 O는 $\angle ABC$와 $\angle BCA$의 이등분선의 교점이 된다. 평행하지 않은 두 직선의 교점은 유일하므로 세 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$)에 모두 접하는 원은 유일하다. 이 원을 $\triangle ABC$의 내접원이라고 하고 그 중심을 **내심**이라고 한다.	

3. 분석 활동을 활용한 내 · 외심 성질 증명 지도의 예

이미 분석 활동을 통해 내 · 외심을 학습한 학생들은 '삼각형의 세 변(각)의 수직이등분선(이등분선)은 한 점에서 만난다.' 는 외심(내심)의 성질을 직관적으로 받아들일 수 있다. 이러한 직관적 이해를 바탕으로 현재 활용되고 있는 교과서에서 다루는 증명을 지도하기 위한 분석적 활동은 다음과 같이 구성될 수 있다[7].

$\triangle ABC$의 세 변($\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$)의 수직이등분선이 한 점에서 만나는 것을 보이기 위해 무엇이 성립해야 하는가?	두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)의 수직이등분선의 교점(O)이 나머지 한 변($\overline{BC}$)의 수직이등분선 위에 있음을 보이면 된다.	
두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)의 수직이등분선의 교점(O)이 나머지 한 변($\overline{BC}$)의 수직이등분선 위에 있음을 보이려면 무엇을 보여야 할까?	두 변($\overline{AB}$, $\overline{AC}$)의 수직이등분선의 교점(O)에서 나머지 한 변($\overline{BC}$)으로 수선의 발을 내려 그 교점을 E라고 할 때, E가 $\overline{BC}$의 중점이 되는 것을 보이면 된다. 즉, $\overline{BE}=\overline{EC}$임을 보이면 된다.	
$\overline{BE}=\overline{EC}$임을 보이기 위해서 어떤 조건이 충족되어야 하는가?	두 변이 같다는 것을 보이기 위해서는 두 변이 합동인 삼각형의 대응변이라는 것을 보이면 된다.	
두 변($\overline{BE}$, $\overline{EC}$)을 포함한 두 삼각형은 각	$\overline{BE}$와 $\overline{EC}$를 포함한 두 삼각형은 $\triangle OBE$와 $\triangle OCE$이므로 이 두	

7) 내심의 성질도 외심의 경우와 비슷하게 분석적 활동을 구성하여 지도과정에 활용하였으나 여기서는 외심의 성질에 대한 분석적 활동만을 다룬다.

각 무엇인가?	삼각형이 합동이라는 것을 보이면 된다.	
$\triangle OBE \equiv \triangle OCE$를 보이기 위해 어떤 조건이 충족되어야 하는가?	두 삼각형은 직각삼각형이고 $\overline{OE}$가 공통인 변이므로 직각삼각형의 합동조건(RHS)에 의해 $\overline{OB}=\overline{OC}$임을 보이면 충분하다.	
$\overline{OB}=\overline{OC}$가 성립하는가?	$\overline{AB}$, $\overline{AC}$의 수직이등분선 성질에 의해 $\overline{OA}=\overline{OB}$, $\overline{OA}=\overline{OC}$이다. 그러므로 $\overline{OB}=\overline{OC}$가 성립한다.	

물론, 위의 과정을 거슬러 올라가면 대부분의 교과서에서 다루는 증명이 완성된다.

4. 분석 활동을 강조한 내·외심 교수-학습 결과 분석

삼각형의 내·외심을 분석적 활동을 강조한 방식으로 지도한 결과를 확인하기 위해 실험반(34명)과 비교반(32명)[8]을 선정하여 실험반에서는 새로운 방식을 적용한 삼각형의 내·외심 지도를, 비교반은 전통적인 방식으로 수업을 진행하였다. 수업을 마친 3주 후에 설문조사[9]를 실시하였는데, 주요 결과는 다음과 같다.

내·외접원 용어에 대한 문항에서 높은 정답률(90.6%, 100%)[10]로 거의 모든 학생들이 용어를 정확히 구분하였다. 하지만 내·외접원의 설명에 대한 정답률은 각각 (68.8%, 73.5%), (65.6%, 70.6%)로 낮아져 외형적으로는 구분하나 성질로 구분하는데는 어려움을 느끼는 것으로 조사되었다. 특히, 비교반의 15.6%, 실험반의 20.6%가 '원의 중심은 삼각형 세 변의 수직이등분선위에 놓인다'를 내접원의 성질로, 비교반의 15.6%, 실험반의 8.8%가 '원의 중심은 삼각형의 세 각의 이등분선 위에 놓인다'를 외접원에 대한 설명으로 응답하여 학습경험에 의존한 의미적 접근보다 결과를 기억하려는 학습성향을 나타내었다.

여섯 개의 보기 중에 외심과 내심에 대한 바른 설명을 모두 고르도록 한 문항에 대해서는 각각 50.0%의 정답률을 나타내 두 반의 차이가 없었으나, '선분의 수직이등분선'과 '각의 이등분선'을 바꿔 응답한 학생이 비교반 29.4%와 실험반 15.6%에 달해 여전히 두 개념을

8) 여기서 언급한 실험반과 비교반은 H중학교에서 실시한 수학시험에서 평균성적이 가장 비슷한 두 반을 선정하였으나, 삼각형의 내·외심 지도 효과를 통계적으로 검증하는데 필요한 동질집단의 요건을 갖췄는지를 확인하진 않았다. 이 연구에서 주장하는 지도방법의 효과를 통계적으로 검증하는 것은 이 연구의 목적도 아니거니와 삼각형의 내·외심과 관련된 선행학습 요소가 너무 많아 통계적 타당성을 갖는 동질집단을 구성하기도 매우 어렵다. 여기서는 단지 새로운 방법으로 인해 학생들에게 어떤 변화가 생기는지를 확인하기 위해 두 가지 방법으로 수업을 진행한 후에 설문조사를 실시하여 그 결과를 단순 비교하였다.

9) 용어, 내·외접원 설명, 내·외심 설명, 수직이등분선(각의 이등분선) 작도 이유, 내·외심 성질 증명 아이디어(서술형), 수직이등분선(각의 이등분선)의 교점에서 세 변(각)에 이르는 거리가 같은 이유, 분석적 활동 경험이 본인에게 미친 영향(서술형) 등 11문항(실험반은 13문항)으로 구성되었다.

10) 정답률(비교반 정답률, 실험반 정답률)

혼동하고 있는 것으로 나타났다. 뿐만 아니라, 외심이나 내심을 찾기 위해 '선분의 수직이등분선'이나 '각의 이등분선'을 작도해야 한다고 응답한 학생들의 비율이 각각 (79.4%, 78.1%), (73.5%, 78.1%)에 달했지만, 그 이유를 묻는 문항에 대해서는 정답률이 각각 (21.9%, 29.4%), (25.0%, 23.5%)로 매우 낮게 나타나 분석적 활동에도 불구하고 이유를 생각하기 보다는 결과를 기억하려는 학생들의 경향이 강하게 나타났다. 특히, 실험반 학생들은 외심을 도입하기 전에 수직이등분선을 찾아가는 분석활동을 경험했음에도 불구하고 44%(내심의 경우는 41.2%)학생들이 수직이등분선을 작도하는 이유로 '선분의 양 끝점에서 같은 거리에 있는 점들을 작도하기 위해서'보다는 '외심을 찾을 수 있으므로'라고 응답하였다. 학생들이 원인을 생각하는 분석활동과 배치되는 결과적 접근 경향을 나타내는 것은 사교육을 통한 선행학습 영향이라고 분석된다. 조사 결과, 이들의 50% 이상은 선행학습을 통해 이미 삼각형의 내 · 외심 개념을 학습한 것으로 확인되었다.

삼각형의 내 · 외심 성질 증명에 필요한 아이디어를 묻는 질문에 대부분 학생들은 '점 O가 외심이므로', '점 I가 내심이므로'와 같이 응답하였으며, 부족하나마 아이디어를 기술한 학생은 두 명에 불과하여 증명 학습 내용이 전혀 파지되지 않았음을 보여주었다.

위의 각 문항에서는 비교반과 실험반 학생들의 정답률에 큰 차이가 없었지만, '두 변의 수직이등분선(각의 이등분선)의 교점에서 세 꼭지점(변)에 이르는 거리가 같은 이유'를 묻는 두 문항에 대한 정답률은 각각 (68.8%, 91.2%), (75.0%, 94.1%)로 두 집단 사이에 큰 차이를 나타내었다. 이는 외접원(내접원)이 단 하나만 존재하는 이유를 분석적으로 탐구한 실험수업의 효과로 분석된다.

한편, 분석적 활동을 강조한 수업에 참여한 학생들은 대체로 이런 활동이 자신의 학습에 긍정적인 영향을 미칠 것으로 평가하였다. 주요한 응답결과를 발췌하면 다음과 같다.

· 백문이 불여일견이듯이 실제로 체험함으로써 더 이해가 잘됐다.
· 좋은 것 같다. 직접 비교해 볼 수도 있고, 이런 활동을 통해 좀 더 쉽게 이해할 수 있어서 좋은 것 같다.
· 작도에 대해 더 자세히 알게 되었다.
· 원리를 알게 되어 더 쉽게 알고 이해할 수 있게 되었다.
· 외심과 내심의 특성을 잘 알게 됨.
· 모든 것에 원인과 결과가 있듯이 명제와 같은 사건이 주어지고 그것에 대해 사건을 풀어나가는 것은 매우 흥미롭다.
· 훌륭하다 생각한다. 논리적이고 이해하기 쉬울 것 같아서 더 간단할 것 같다.
· 결론을 성립시키기 위한 조건을 찾는 것이 더 좋다. 왜냐하면 막연하게 조건을 찾아 그것으로 결론을 내는 것은 힘들기 때문이다.
· 그 명제가 참인지 거짓인지 구별하기 위해선 거꾸로 생각해보아야 한다.

대부분의 학생들이 새로운 방법에 대해 긍정적인 반응을 보였지만 다음과 같은 부정적인 평가도 있었다.

· 어렵다.
· 자와 각도기 같은 편리한 도구가 나오는데 그런 짓은 시간낭비다.
· 같이 할 때에는 그저 함께 풀어주니까 쉬웠는데 혼자서 하려하니 힘들고 하나도 모르

겠다.

· 지금까지 해오던 방식과 달라서 어렵기도 하고 헷갈리기도 했다. 예전 방식이 좀 더 쉽게 이해가 되는 것 같다. 근데 이론보다 여러 방면으로 접해 좀 더 신선했다.

V. 결 론

삼각형의 내·외심은 평면기하와 관련된 많은 탐구 학습 요소를 포함하고 있음에도 불구하고 이미 결정된 수학적 대상으로 단순하게 지도되는 경우가 많다. 하지만, 완성된 결과로 삼각형의 내·외심을 정의하려면 존재성과 유일성에 대한 보장이 있어야 한다. 예를 들어, 주어진 삼각형의 두 꼭지점을 지나는 원이 최소한 하나(두 꼭지점의 중점을 중심으로 갖는 원) 이상 존재한다는 것은 매우 직관적이며 근거가 분명하다. 이에 반해, 삼각형의 세 꼭지점을 모두 지나는 원이 존재하는지를 판별하는 것은 직관적이지도 않고 그 근거가 명확하지도 않다. 그럼에도 불구하고, 대부분의 교과서에서는 삼각형의 외접원이 반드시 존재하며 유일하다는 것, 혹은 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만난다는 전제 하에 외심을 정의한다. 삼각형의 내접원이나 내심의 경우도 마찬가지여서 학생들은 이 두 개념 사이에서 많은 혼란을 느낀다.

이런 문제의식을 바탕으로 본 연구에서는 발생적 원리에 따른 분석적 활동을 통한 삼각형의 내·외심 지도방법을 고안하고자 하였다. 이를 위해, 우선 삼각형의 내·외심을 학습한 학생들과 중학교 수학교사들을 대상으로 설문조사를 실시하여, 중학생들은 내·외심 학습 결과를 어떻게 파지하고 있으며 수학교사들은 삼각형의 내·외심을 어떻게 지도하고 있는지를 조사하였다.

그 결과, 대부분의 학생들이 삼각형의 내·외심을 결과로 기억하고 있었다. 외접원이나 내접원은 구분하면서도 변의 수직이등분선이나 각의 이등분선을 제대로 연결시키지 못한 결과가 이를 뒷받침한다. 특히, 외심(내심)에서 변의 수직이등분선(각의 이등분선)을 왜 생각해야 하는지에 대해 응답한 대부분의 학생들이 외심(내심)의 성질과 관련된 답변에 국한하여 '왜 수직이등분선의 교점이 외심이 되는지'를 이해하지 못하고 있었다. 이는 외심(내심)에서 변의 수직이등분선(각의 이등분선)을 고려하는 이유를 설명해야 한다고 하면서도 그 이유가 '외심(내심)을 정의하기 위해서'라는 교사들의 응답 결과와 같은 맥락에서 이해된다.

이런 이해를 바탕으로, 본 연구에서는 삼각형의 외접원(내접원)이 유일하게 존재할 수밖에 없는 이유를 분석적으로 탐구하도록 한 교수-학습 과정을 설계하여 중학교 2학년 학생들에게 투입하였다. 그 결과, 실험반 학생들이 비교반 학생들과 큰 차이를 보이지 않고 여전히 결과적 정의에 의존하려는 성향을 나타내었다. 특히, 이들 중 많은 학생들은 선행학습을 통해 학습한 결과를 고수하려는 경향이 매우 강하게 나타났다. 하지만, '두 변의 수직이등분선(각의 이등분선)의 교점에서 세 꼭지점(변)에 이르는 거리가 같은 이유'를 묻는 문항에 대해서는 큰 차이를 나타내었다.

참고문헌

고수철(2002). 중학교 과정에서 분석-종합적 활동을 통한 증명지도 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

교육인적자원부 (2007), 수학과 교육과정, 교육인적자원부 고시 제 2007-79호.
권은정 (2006). 종이접기를 통한 수학학습 지도에 관한 사례연구(중학교 삼각형의 성질을 중심으로), 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.
남선주 (2006). 역동적 기하 환경에서 분석법을 활용한 증명학습에 관한 연구, 한국교원대학교 교육대학원 석사학위 논문.
연제철 (2001). GSP를 활용한 중학교 기하교육에 관한 연구: 중학교 2학년 삼각형의 무게중심과 외심을 중심으로, 충북대학교 교육대학원 석사학위논문.
유소영 (2005). 중학교 기하영역의 분석-종합적 증명 방법을 위한 자료개발, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
이용민 (2000). 중학교 기하영역 증명지도에 있어서 분석-종합적 증명 방법에 관한 연구 - 중학교 2학년을 중심으로, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
전영준 (2007). 중학교 2학년 기하영역에 대한 학습실태 조사, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
정수진 (2007). 역동적 기하 환경에서 중학생을 대상으로 분석법을 이용한 증명학습에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.
한인기 · 신현용 (2002). 삼각형의 접기 활동과 논증의 연계 가능성에 관한 연구, 한국수학교육학회지시리즈 A <수학교육> 제41권, 제1호, 79~90.
Ball, D. L., & Bass, H. (2003). Making mathematics reasonable in school. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), A research companion to principles and standards for school mathematics (pp. 27 - .44). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. In L. I. Tatsien (Ed.), Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vol. III, pp. 907 - .920). Beijing: Higher Education Press.
Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.
Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. Educational Studies in Mathematics, 44, 5 - .23.
Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics education III(pp. 234 - 83). Providence, RI: American Mathematical Society.
Healy, L., & Hoyles, C. (2000). Proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31, 396 - 28.
Knuth, E. J., Choppin, J., Slaughter, M., & Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. In D. S. Mewborn, P. Sztajn, D. Y. White, H. G. Weigel, R. L. Bryant, & K. Nooney (Eds.), Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 1693 - 670). Athens, GA: Clearinghouse for Science, Mathematics, and

Environmental Education.
Marrades, R., & Gutierrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. Educational Studies in Mathematics, 44, 87 - 25.
NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The Author
Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter(Eds.), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics (pp. 22 - .44).

A Study on the Teaching Method of Incenter and Circumcenter of Triangle

Kang, Yun Soo[11] · Seo, Eun Jeong[12]

Abstract

This study was designed for the purpose of identifying the influences of improved teaching method which constructed at the base of results of survey for finding present teaching-learning method of incenter and circumcenter of triangle. For this, we surveyed the students' understanding and math teachers' teaching method of incenter and circumcenter of triangle. Then, we designed alternative teaching method which innovated the problems from the resultic approaches of incenter and circumcenter of triangle. And then, we taught students through new method and analyzed the influences of it to students.

Key Words : Incenter and Circumcenter of Triangle, Students' Understanding or Teaching Method of Incenter and Circumcenter

11) Sunchon National University (yskang@sunchon.ac.kr)
12) Sunchon Hyanglim Middle School (iroeun@hanmail.net)