

논문 2009-46SP-5-2

양자화 제한 집합에 기초한 컴프레시브 센싱 복구

(Compressive Sensing Reconstruction Based on the Quantization Constraint Sets)

김 동 식*

(Dong Sik Kim)

요 약

본 논문에서는, 컴프레시브 센싱(compressive sensing, CS)에서 양자화된 측정을 사용하여 CS 복구(reconstruction)를 하는 경우에 일반화된 양자화 제한(generalized quantization constraint, GQC) 집합을 사용하여 convex 최적화를 수행하는 방법을 제안하였다. 제안한 GQC에서는 기존의 양자화 제한 집합의 크기를 조정할 수 있도록 하였으며, 균일 스칼라 양자기를 사용한 CS 복구의 모의실험을 통하여 $m/k \log n > 2$ 인 CS 문제에서, 기존의 QC 방법에 비하여 CS 복구의 에러에서 3.4-3.6dB의 성능 개선을 얻을 수 있었다.

Abstract

In this paper, a convex optimization technique, which is based on the generalized quantization constraint (GQC), is proposed in the compressive sensing reconstruction using quantized measures. The set size of the proposed GQC can be controlled, and through extensive numerical simulations based on the uniform scalar quantizers, the CS reconstruction errors are improved by 3.4-3.6dB compared to the traditional QC method for the CS problems of $m/k \log n > 2$.

Keywords: compressive sensing, convex optimization, generalized quantization constraint, quantization

I. 서 론

컴프레시브 센싱(compressive sensing, CS)은, 어떠한 개수를 가지는 신호를 그보다 훨씬 적은 개수를 가지는 신호로 변환하여 표본화하는 방법이다. CS 복구(reconstruction)는 원 신호를 찾아내는 것으로, 이는 ill-posed 문제이지만 원 신호가 충분히 sparse하다고 하면 적은 개수의 신호만 사용하여 정확한 복구가 가능하다^[1]. 이러한 CS는 영상의 획득, 복원(restoration) 등에 있어서 광범위한 응용 분야를 가지고 있다. CS에서 관찰하는 적은 개수의 신호는 획득하는 과정에서 디지털 컴퓨터에서의 처리를 위하여 양자화를 수행하게 되

는데, 이때 양자화 에러로 인하여 CS 복구에 영향을 미치게 된다^[2].

Dai 등^[3]은 CS의 측정(measurement) 또는 관찰을 양자화하므로 발생하는 양자화 에러를 점근적(asymptotic)으로 유도하였다. Sun과 Goyal^[4]은 측정의 최적 양자화에 대하여 연구하였는데, high-resolution 양자화 분석과 최적 양자기의 근사화를 위한 homotopy 연속성을 이용하여 기존의 양자화보다 개선된 성능을 얻었다. 또한 Ardentanzadeh 등^[5]은 CS 복구에 있어서 bit-precision의 영향에 대하여 연구하였다. 데이터 압축 및 복호화는 CS 관점에서 적은 개수를 가지는 측정 신호를 양자화하고 이로부터 원 신호를 복구하는 과정이 된다. 이때 측정 신호를 양자화하므로 손실 데이터 압축(lossy data compression)이 된다. Goyal 등^[6]은 이러한 CS 관점에서의 손실 데이터 압축에서의 전송률에 대하여 연구하였다.

* 정회원, 한국외국어대학교 전자정보공학부
(Department of Electronics and Information
Engineering, Hankuk University of Foreign
Studies)

접수일자: 2009년8월17일, 수정완료일: 2009년9월3일

이렇게 관찰을 양자화하므로 CS 복구 시에 에러가 발생하게 되는데, 양자화 잡음에 대해 강인한 CS 복구를 위하여 최적화 알고리즘의 제한 조건을 완화시켜 줄 필요가 있다^[7]. Dai 등^[3]은 양자화 결과로 만들어지는 양자화 영역 안에 양자화된 관찰치가 항상 포함되어있다는 사실을 이용하여 이러한 양자화 영역을 최적화 알고리즘의 제한 조건에 부가하였다. 이러한 제한을 양자화 제한(quantization constraint, QC)이라고 하자. 참고 문헌 [3]에서는 일반적인 경우에 비하여 낮은 CS 복구 에러를 구할 수 있음을 보였다. 그런데, 이러한 좋은 결과는, 실험에 의하면 sparsity 비가 작은 경우에 얻을 수 있다는 사실을 본 논문에서는 보였다. 더욱이 sparsity 비가 상대적으로 큰 경우에는 QC를 사용한 최적화의 효과가 없음을 관찰하였다. 또한 본 논문에서는 양자화 에러가 CS 복구 에러에 양자화 에러가 미치는 영향을 실험적으로 관찰해 보았으며, QC의 단점을 보완하기 위한 일반화된 QC(generalized quantization constraint, GQC)를 제안하여 넓은 범위의 sparsity 비에 대하여 CS 복구 에러를 줄일 수 있는 방법을 연구하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제 II장에서는 CS에 대한 수식 전개를 하였으며, 제 III장에서는 CS 측정의 양자화에 대하여 논하고, QC에 대한 정의 및 제안하는 GQC의 일반화에 대해 논하였다. 제 IV장에서는 양자화에 의한 영향을 실험을 통하여 고찰해 보고, 제안한 GQC에 대하여 성능 향상을 비교 실험을 통하여 보였다. 마지막 장에 결론을 정리하였다.

II. 컴프레시브 센싱

어떠한 신호를 n 개의 원소를 가지는 벡터 $u \in R^n$ 로 나타내자. 이 신호의 원소 중에서 k 개만 0이 아니라고 가정하자. 이러한 신호 u 를 k -sparse라고 부르며, 0이 아닌 원소의 위치를 sparsity pattern, k/n 를 sparsity 비라고 한다. 이러한 sparse 신호를 sparsity pattern을 모르는 상태에서 표본화한다고 하면, n 번의 표본을 모두 취해야 한다. 만일 신호 u 의 sparsity가 심하다고 하고, 이러한 신호를 표본화할 때 표본의 개수가 매우 적으면, 아마도 대부분의 경우 표본치가 0이 되어 적절한 표본화가 매우 힘들다. 이러한 sparse 신호를 가능한 적은 표본을 사용하여 알아 낼 수가 있는데, 이러한 방법을 CS라고 한다.

Ψ 를 $n \times n$ orthogonal 행렬이라고 하고 변환 $x = \Psi u$ 을 생각해 보자. 이러한 Ψ 는 wavelet 변환이 될 수도 있고 $n \times n$ 단위행렬일 수도 있다. 이러한 신호 x 를 $m \times n$ 행렬 Φ 로 측정(measurement)해 보자. 여기서 Φ 는 센싱 또는 측정 행렬로 $\Phi := (\phi_1, \dots, \phi_m)$ 로 정의되며, ϕ_i ($i = 1, \dots, m$)는 n 개의 원소를 가지는 row 벡터로 i 번째의 관찰 y_i 는 $y_i = \langle x, \phi_i \rangle$ 이 되고 $m \leq n$ 이다. 즉 전체 m 개의 관찰은 벡터 $y = \Phi x$ 가 된다. 이러한 관찰 y 를 사용하여 x 를 추정하는 CS 복구는 다음과 같은 convex 최적화 문제를 푸는 것이 된다.

$$\min_{x'} \|\Psi^{-1}x'\|_1 \text{ subject to } \Phi x' = y \quad (1)$$

식 (1)에서 찾는 x' 는 변환 Ψ 에 대하여 sparse하므로, ℓ_1 -norm에 의하여 $\Psi^{-1}x'$ 의 원소들의 크기를 모두 합한 것을 최소화하는 x' 를 찾는데, 기본적으로 $\Phi x' = y$ 관계를 만족해야 한다. 식 (1)의 최적화를 통하여 찾은 결과를 x° 라고 하자. x 의 완전한 복구를 위해서, 즉 $\|x - x^\circ\|_2 = 0$ 이 되기 위해선 관찰의 개수 m 이 최소한 관계식 $m \geq k \log n$ 을 만족해야 한다. 비율 λ 를 $\lambda := m/k \log n$ 로 정의하면, 최소한 성공적인 CS 복구를 위해선 $\lambda \geq 1$ 관계를 만족해야 한다. 식 (1)의 선형 프로그램이나 이와 유사한 문제를 통하여 성공적으로 x 를 복구할 수 있는 표본의 개수 m 에 대한 많은 연구들이 수행되고 있다^[1, 8].

만일 관찰 y 를 얻을 때 잡음이 추가 된다고 하면, 관찰은 $y = \Phi x + e$ 형태의 모델로 나타낼 수 있다. 여기서 e 는 잡음 항이 된다. 이때 식 (1)의 최적화는 잡음에 대한 영향을 고려하여, 식 (1)에서의 제약 조건을 작은 상수 ϵ 과 ℓ_2 -norm에 대하여 $\|\Phi x - y\|_2 \leq \epsilon$ 로 바꿀 수 있다. 이때 복구된 신호 x° 에 대한 에러 $\|x - x^\circ\|_2$ 는 다음과 같은 관계식을 만족한다^[2].

$$\|x - x^\circ\|_2 \leq c_0 k^{-1/2} + c_1 \epsilon \quad (2)$$

식 (2)에서 $c_0 k^{-1/2}$ 는 잡음 e 가 없을 때의 에러이며, 두 번째 항 $c_1 \epsilon$ 은 잡음의 크기와 비례하는 에러가 된다 ($\|e\|_2 \leq \epsilon$). 이러한 결과는 관찰에 잡음이 존재한다고 해도 주어진 에러 한도 내에서 복원이 가능한, 즉 강인한 CS 복구가 가능하다는 것을 의미한다^[7].

센싱 또는 관찰을 위한 행렬 Φ 는 입력되는 신호의 에너지를 전체에 균일하게 퍼지게 해야 하는데, 이산 푸

리에 변환(discrete Fourier transform, DFT), 또는 이산 여현 변환(discrete cosine transform, DCT)의 orthogonal 벡터 중에서 임의로 취하여 구성할 수 있다^[9-10]. 적용분야에 따라서 이 함수가 알려져 있지 않으므로 추정할 필요도 있다. 예를 들어 영상 센서의 경우 적절한 Φ 에 대한 모델에 기초하여, sensing한 m 개의 데이터로부터 n 개의 고해상도 영상의 복구가 가능하다.

III. 측정 신호의 양자화 및 양자화 제한 집합

CS의 실질적인 적용에서는 측정 y 의 양자화는 필수적이다. 따라서 양자화 에러의 정도에 따라서 그로 인한 CS 복구에 에러가 발생한다. 양자화된 관찰을 \hat{y} 라고 하면 이러한 \hat{y} 를 사용한 CS 복구를 위하여, 양자화 에러를 고려하여 식 (1)의 최적화 문제를 작은 양의 상수 ϵ 에 대하여 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\min_{x'} \|\Psi^{-1}x'\|_1 \text{ subject to } \|\Phi x' - \hat{y}\|_2 \leq \epsilon \quad (3)$$

이때 적절한 상수 ϵ 의 선정은 양자화 에러의 정도에 따라 결정을 하면 될 것이다. 식 (3)과 같은 형태의 최적화 문제는 통계에서 lasso(least absolute shrinkage and selection operator) 형태가 된다^[11].

1. 양자화 제한 집합

측정 y 의 m 개의 원소를 양자화하기 위하여 모두 같은, 균일 스칼라 양자기(uniform scalar quantizer)를 사용한다고 하자. 이때 양자기의 전송률을 R 이라고 하자, 그러면 양자기의 총 레벨의 개수는 $L := 2^R$ 이 된다. 이론적 분석을 위하여 양자화하려고 하는 y 를 불규칙변수 모델로 보고 y 의 pdf(probability density function)가 compact support를 가진다고 하자. 그러면 모든 양자화 영역은 bound되어 있으며, 양자기의 i 번째 레벨 \hat{v}_i 에 대한 disjoint한 양자화 영역은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$S_i = \{v \mid \hat{v}_i - \Delta_i^L < v \leq \hat{v}_i + \Delta_i^U\} \quad (i=1, \dots, L) \quad (4)$$

여기서 상수 Δ_i^L 과 Δ_i^U 는 $0 < \Delta_i^L, \Delta_i^U < \infty$ 이고 $\hat{v}_{i-1} + \Delta_{i-1}^U = \hat{v}_i - \Delta_i^L$ ($i=2, \dots, L$) 이 성립한다. 그러면 식 (4)를 사용하여 양자화 함수 $q(\cdot)$ 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$q(v) := \sum_{i=1}^L \hat{v}_i I_S(v)$$

이 식에서, $I_S(\cdot)$ 는 indicator 함수로, 만일 $x \in S$ ($S \subset \mathbb{R}$)이면 $I_S(v) = 1$ 이고 그렇지 않으면 $I_S(v) = 0$ 이다. 또한 양자화 인덱스 함수는 다음과 같다.

$$i_q(v) := \sum_{i=1}^L i I_S(v)$$

따라서 CS의 측정 $y = (y_1, \dots, y_m)$ 를 양자화한 결과는 $\hat{y} := (q(y_1), \dots, q(y_m))$ 가 되며, 이때의 양자화 제한, 즉 QC를 위한 집합 $C(\cdot)$ 는 다음과 같은 cartesian product 형태로 쓸 수 있다.

$$C(y) = S_{i_q(y_1)} \times \dots \times S_{i_q(y_m)} \quad (5)$$

실질적인 경우 식 (5)의 $C(y)$ 는 CS 과정에서 알 수 있으며 m 차원에서 각 변의 길이가 $(\Delta_{i_q(y_1)}^L + \Delta_{i_q(y_1)}^U)$ 인 hypercube가 된다. Dai 등^[3]은 주어진 y 의 양자화 결과에 의해 결정되는 양자화 영역 $C(y)$ 를 사용하여 식 (3)의 최적화 문제를 다음과 같이 수정하였다.

$$\min_{x'} \|\Psi^{-1}x'\|_1 \text{ subject to } \Phi x' \in C(y) \quad (6)$$

이러한 CS 복구 알고리즘의 수정을 통하여 양자기로 인한 CS 복구 에러를 상당히 줄일 수 있다^[3].

2. 양자화 제한 집합의 일반화

이제 식 (4)의 양자화 영역을 기반으로, 어떤 상수 $\mu (\geq 0)$ 에 대하여 다음과 같은 영역을 정의하자^[12].

$$B_i(\mu) := \{v \mid \hat{v}_i - \mu \Delta_i^L < v \leq \hat{v}_i + \mu \Delta_i^U\} \quad (i=1, \dots, L) \quad (7)$$

그러면 측정 $y = (y_1, \dots, y_m)$ 에 대하여 일반화된 양자화 제한, 즉 GQC를 위한 집합, $C(\cdot, \mu)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$C(y, \mu) := B_{i_q(y_1)}(\mu) \times \dots \times B_{i_q(y_m)}(\mu) \quad (8)$$

식 (5)의 집합은 $C(y, 1) = C(y)$ 를 만족한다. $C(y, \mu)$ 는 $0 \leq \mu < 1$ 일 때는 $C(y, \mu) \subset C(y)$ 이 성립되어 $C(y)$ 보다 작은 집합이 되는데, 이러한 경우의 GQC를 NGQC(narrow generalized quantization constraint)라고 부르자. 반면에 $\mu > 1$ 인 경우에는 일반화된 QC가

$C(y)$ 보다 크다. 이러한 GQC를 사용하여 CS 복구의 식 (6)을 주어진 상수 μ 에 대하여 다음과 같이 수정할 수 있다.

$$\min_{x'} \|\Psi^{-1}x'\|_1 \text{ subject to } \Phi x' \in C(y, \mu) \quad (9)$$

참고로 기존의 식 (1)의 최적화는 식 (9)의 GQC에서 $\mu=0$ 인 경우에, 식 (6)의 QC는 GQC에서 $\mu=1$ 인 경우에 해당한다. GQC에 기초한 식 (9)의 최적화를 통해 얻는 x 의 추정 $x^o(\mu)$ 에 대하여 다음 식과 같이 CS 복구 에러를 최소화 하는 μ^o 를 생각해 보자.

$$\mu^o = \operatorname{argmin}_{\mu \geq 0} \|x - x^o(\mu)\|_2 \quad (10)$$

만일 어떤 μ^o 에서 $\|x - x^o(\mu^o)\|_2 < \|x - x^o(0)\|_2$ 이고 $\|x - x^o(\mu^o)\|_2 < \|x - x^o(1)\|_2$ 이라고 한다면 제안한 GQC에 의한 CS 복구 기법은 기존의 방법들에 비하여 좋은 성능을 얻을 수 있다.

양자화된 영상 신호의 복원을 위하여 POCS (projection onto convex sets) 이론에 기초한 알고리즘에서도 QC를 사용하는데, 식 (8)과 유사한 집합을 사용하여 성공적으로 JPEG 부호화된 영상의 블록 왜곡 (blocking artifacts)을 완화시킬 수 있다^[12-13]. JPEG에서 사용되는 스칼라 양자화뿐만 아니라 벡터 양자화 (vector quantization)의 경우에 양자화 영역의 형태가 불규칙하더라도 hypercube 형태의 QC 집합을 사용한 POCS 기법을 사용하여 보다 개선된 영상 복원을 수행할 수 있다^[14].

IV. 양자화 제한 집합의 비교 실험

본 장에서는 CS 복구를 위해 사용한 양자화 제한 집합을 비교해 보았다. 분석을 단순화하기 위하여 어떤 양의 상수 Δ 에 대하여 $\Delta_i^U = \Delta_i^L = \Delta$ ($i = 1, \dots, L$)라고 가정하자. 먼저 식 (3)의 경우 $\Phi x'$ 가 가질 수 있는 범위 C_ϵ 는 $C_\epsilon := \{x' \mid \|\Phi x' - \hat{y}\|_2 \leq \epsilon\}$ 인데, 관찰 y 의 각 원소가 양자화된 값과 최대로 가질 수 있는 에러가 Δ 이므로 $\|\Phi x' - \hat{y}\|_2 \leq \sqrt{m}\Delta$ 을 만족한다. 따라서 $\epsilon = \sqrt{m}\Delta$ 로 놓고 식 (3)으로부터 CS 복구를 시도할 수 있다. Dai 등^[3]에 의해 제안된 방법인 식 (6)의 경우는 $C(y) = \{x \mid \Phi x - \hat{y} \in [-\Delta, \Delta]^m\}$ 이므로 이들 집합간에 관계 $C(y) \subset C_{\sqrt{m}\Delta}$ 가 성립한다. 또한 $y \notin C_{\sqrt{m}\Delta} \setminus C(y)$, 즉 여집합 $C_{\sqrt{m}\Delta} \setminus C(y)$ 에는 양자화

하기 전의 관찰 y 가 존재하지 않으므로, $\epsilon = \sqrt{m}\Delta$ 를 사용하는 식 (3)의 경우보다 식 (6)이 보다 정확한 복구의 가능성이 높다. 식 (8)의 GQC 집합은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$C(y, \mu) = \{x \mid \Phi x - \hat{y} \in [-\mu\Delta, \mu\Delta]^m\}$$

이제 제안한 GQC의 비교 실험을 위하여, 다음과 같은 CS 복구 문제를 고려하였다. 벡터 x 의 차수는 $n=256$ 이고 관찰의 수는 $m=48, 96$, 그리고 128을 사용하였으며, $k=6$ 과 24를 사용하였다. 또한 orthogonal 행렬 Ψ 는 $n \times n$ 의 단위행렬이며, 신호 x 는 균일한 확률로 k 개의 위치를 선정하고 각각은 독립인 Gaussian 분포를 가지도록 하였다. 이때 평균은 0, 분산은 1이다. 관찰 행렬 Φ 는 $n \times n$ DFT 행렬의 열중에서 균일하게 임의로 m 개를 선정하였다. CS 복구 결과들의 비교를 위하여, 복구된 신호 x^o 의 에러를 k 로 나누어 정규화시킨 에러 $k^{-1}\|x - x^o\|_2^2$ 를 dB 값으로 환산하여 사용하였다. 참고로 x 를 불규칙 벡터로 가정하면 $E(\|x\|_2^2) = k$ 가 성립한다. 모든 실험은 100번 반복 시행하여 평균을 구하였다.

그림 1은 양자화의 간격(quantizer interval) 2Δ 에 대하여 CS 복구 에러를 도시한 것으로, 'conventional'은 기존의 식 (1)의 최적화를 통하여, 'QC'는 식 (6)의 최적화^[3]를 통하여 얻은 결과이다. $k=6$ 인 경우는 식 (1)의 최적화를 통하여 CS 복구가 잘 안됨을 알 수 있다. 그러나 식 (6)의 최적화를 통하여 $2\Delta=0.01$ 인 경우에는 복구 에러에서 6.27dB의 이득을 얻을 수 있다. 또한 이러한 추세는 전체 실험 구간에서 일정함을 알 수 있다. 그림 1의 실험은 양자화를 하지 않는 경우에는 거의 완벽한 CS 복구가 가능한 경우로, 식 (2)를 다음과 같이 쓸 수 있다^[15].

$$\|x - x^o\|_2 \leq c_1\Delta = c_2 2^{-R}$$

여기서 c_1 과 c_2 는 양의 상수이다. 양자화 에러의 정도, 즉 양자화 간격 2Δ 에 비례하여 CS 복구 에러의 특성 곡선이 증가하는 것을 관찰할 수 있다.

반면에 그림 1에서 $k=24$ 의 경우는 식 (1)의 경우나 QC를 사용한 식 (6)의 경우에 서로 비슷하게 CS 복구를 수행함을 알 수 있다. 반대로 생각하면 sparsity 비가 올라가면 QC를 사용한 효과가 줄어드는 것을 알 수 있다. 그림 1에서, $k=24$ 와 $2\Delta=0.01$ 인 경우를 보면

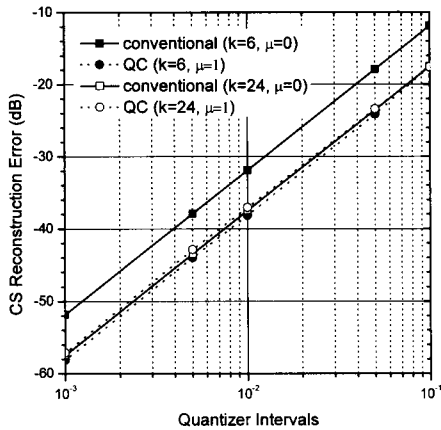


그림 1. 양자화 제한에 기초한 컴프레시브 센싱 복구의 비교(conventional: 식 (1)의 최적화, QC($\mu=1$): 식 (6)의 최적화^[3], $m=128$, $n=256$, 100번 반복수행)

Fig. 1. Comparison of the compressive sensing reconstruction based on the quantization constraint set (conventional: optimization of (1), QC ($\mu=1$): optimization of (6)^[3], $m=128$, $n=256$, 100 realizations).

QC를 사용하므로 오히려 0.4dB 정도의 손실이 발생함을 관찰할 수 있다.

그림 2에는 제안한 GQC를 그림 1의 $2\Delta=0.01$ 경우에 여러 μ 에 대하여 적용한 결과를 나타내고 있다. $k=6$ 인 경우($\lambda \approx 8.858 (> 1)$)는 QC($\mu=1$)일 때 6.27dB의 성능 개선이 있음을 알 수 있다. 그러나 μ 를 1보다 작은 값으로 내리면(narrow GQC 경우) 더 많은 이득을 볼 수 있으며, $\mu=0.8$ 정도일 때 최소 에러 -41.6 dB가 얻어지다가, 계속해서 μ 가 감소하면 CS 복구에러는 다시 증가하게 된다. 따라서 적절한 μ 에 대하여 CS 복구에러를 기존 방법 (1)뿐만 아니라 QC를 사용한 식 (6)보다 더 낮출 수 있다. 이러한 추세는 $k=24$ 경우($\lambda \approx 2.215 (> 1)$)도 마찬가지이다. 식 (6)의 QC가 식 (1)의 방법에 비하여 성능 개선이 없으나, $\mu=0.55$ 일 때 -40.5 dB까지 에러를 낮출 수 있음을 알 수 있다. 그림 2를 보면 이렇게 에러를 최소화하는 μ° 는 k 에 따라서 다름을 알 수 있다. 참고로 기존의 식 (1)은 GQC에서 $\mu=0$ 인 경우이고, 식 (6)의 QC는 GQC에서 $\mu=1$ 인 경우에 해당한다.

이제 양자화가 없어도 어느 정도 CS 복구에러가 존재하는 경우에 대하여 GQC를 적용한 영향을 관찰해보자. 그림 3에서 $k=24$ 인 경우는 $\lambda \approx 0.83 (< 1)$ 인데, 양자화를 하지 않는 경우 CS 복구에러가 -22.3dB

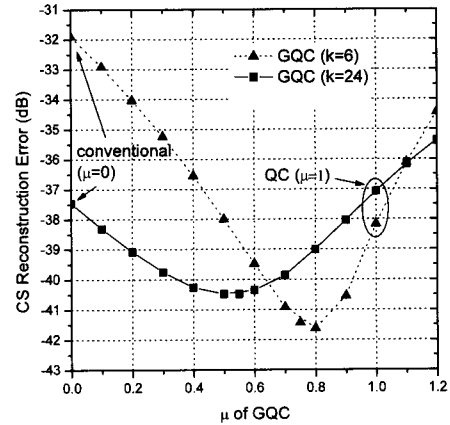


그림 2. 제안한 일반화된 양자화 제한(GQC)에서 μ 에 따른 컴프레시브 센싱 복구에러 비교(식 (9)의 최적화, $2\Delta=0.01$, $m=128$, $n=256$, 100번 반복수행)

Fig. 2. Comparison of the compressive sensing reconstruction errors with respect to the scale μ in the proposed generalized quantization constraint (GQC) (optimization of (9), $2\Delta=0.01$, $m=128$, $n=256$, 100 realizations).

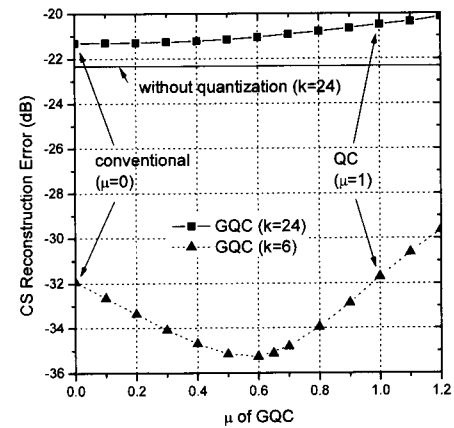


그림 3. 제안한 일반화된 양자화 제한(GQC)에서 μ 에 따른 컴프레시브 센싱 복구에러 비교(식 (9)의 최적화, $2\Delta=0.01$, $m=48$, $n=256$, 100번 반복수행)

Fig. 3. Comparison of the compressive sensing reconstruction errors with respect to the scale μ in the proposed generalized quantization constraint (GQC) (optimization of (9), $2\Delta=0.01$, $m=48$, $n=256$, 100 realizations).

이다. 이때의 식 (10)으로부터 최소화 되는 μ° 는 그림 3에서 보는 바와 같이 $\mu^\circ=0$ 으로 GQC를 사용하여 얻을 수 있는 이득이 없음을 알 수 있다. 또한 이때는 QC의 결과가 가장 나쁨을 알 수 있다. 그림 3의 $k=6$ 인 경우는 $\lambda \approx 3.32 (> 1)$ 로 거의 완벽한 CS 복구가 이뤄지고

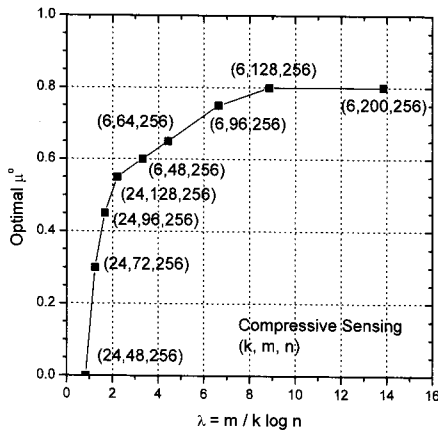


그림 4. 최적 μ^o 와 비 $\lambda (= m / k \log n)$ 과의 관계 ($2\Delta = 0.01$)

Fig. 4. Relationship between the optimal μ^o and ratio $\lambda (= m / k \log n)$ ($2\Delta = 0.01$).

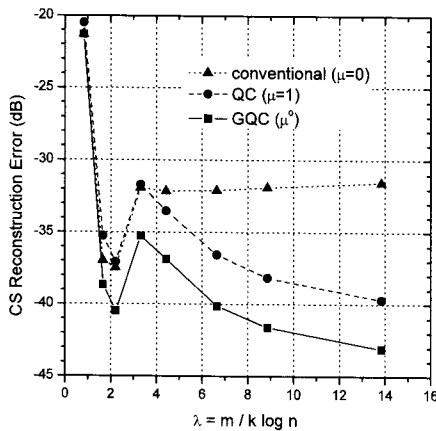


그림 5. 제안한 GQC의 CS 복구 에러 비교

Fig. 5. Comparisons of the proposed compressive sensing reconstruction based on GQC.

있으며, 그림 2의 경우와 비슷한 에러 곡선을 가지는 결과를 얻을 수 있다.

제안한 GQC를 사용하는 경우 식 (10)을 최소화시키는 μ^o 를 찾아야 하는데, 실제적으로는 신호 x 를 모르므로 식 (10)과 같이 직접적으로 구할 수가 없다. 그러나 그림 2와 3의 실험을 통해서 보면, 완전 복구가 가능한 CS 문제의 경우 μ 를 1보다 약간 작게 잡아줘도 (NGQC) 기존의 QC 방법에 비하여 이득을 얻을 수 있음을 알 수 있다. 그림 4에는 식 (10)의 최적 μ^o 값들을 $\lambda (= m / k \log n)$ 에 대하여 도시하여 보았다. 그림 4를 보면, $k \geq 6$ 일 때, λ 가 증가하면 μ^o 도 일정하게 증가함을 알 수 있다. 즉 어떤 CS 문제에서 주어진 k, m, n 으로부터 비 λ 를 구하고, 그림 4와 같은

형태의 특성 곡선으로부터 최적의 μ^o 를 대략적으로 추정해 볼 수 있다.

그림 5에는 제안한 GQC를 사용하여 얻은 CS 복구 에러를 기존의 방법을 사용했을 때와 비교하였다. 비 λ 가 클수록 큰 이득을 얻을 수 있음을 알 수 있다. $\lambda = 13.84$ 인 경우에 GQC를 사용하면 기존의 식 (1)의 경우에 비하여 CS 복구 에러를 11.6dB 정도 줄일 수 있었으며, Dai 등^[3]의 경우인 QC에 비해서는 3.4dB의 성능 개선이 있음을 관찰할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는, 컴프레시브 센싱(compressive sensing, CS)에서 양자화된 측정을 사용하여 CS 복구(reconstruction)를 하는 경우에 일반화된 양자화 제한(generalized quantization constraint) 집합을 사용하여 convex 최적화를 수행하는 방법을 제안하였다. 제안한 GQC에서는 기존의 양자화 제한 집합의 크기를 조절할 수 있도록 하였으며, 이를 통하여 $m/k \log n = 13.84$ 인 CS 문제에서, 기존의 QC 방법에 비하여 약 3.4dB의 성능 개선을 얻을 수 있었다.

참 고 문 헌

- [1] D. L. Donoho, "Compressed sensing," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289-1306, Apr. 2006.
- [2] E. Candes, J. Romberg, and T. Tao, "Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements," *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 59, no. 8, pp. 1207-1223, Aug. 2006.
- [3] W. Dai, H. V. Pham, and O. Milenkovic, "A comparative study of quantized compressive sensing schemes," in *Proc. Int. Symp. Inform. Theory*, June 2009, pp. 6-10.
- [4] J. Z. Sun, and V. K. Goyal, "Optimal quantization of random measurements in compressed sensing," in *Proc. Int. Symposium of Information Theory*, June 2009, pp. 6-10.
- [5] E. Ardestanizadeh, M. Cheraghchi, and A. Shokrollahi, "Bit precision analysis for compressed sensing," in *Proc. Int. Symp. Inform. Theory*, June 2009, pp. 1-5.
- [6] V. K. Goyal, A. K. Fletcher, and S. Rangan, "Compressive sampling and lossy compression," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 25, no. 2,

- pp. 48-56, March 2008.
- [7] E. J. Candes and M. B. Wakin, "An introduction to compressive sampling," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 25, no. 2, pp. 21-30, March 2008.
- [8] E. Candes and T. Tao, "Near optimal signal recovery from random projections: Universal encoding strategies?," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 52, no. 12, pp. 5406-5425, Dec. 2006.
- [9] J. Romberg, "Imaging via compressive sampling," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 25, no. 2, pp. 15-20, March 2008.
- [10] D. L. Donoho and P. B. Stark, "Uncertainty principles and signal recovery," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 49, no. 3, pp. 906-931, June 1989.
- [11] T. Hastie, R. Tibshirani, and J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning*. NY: Springer, 2001.
- [12] S. H. Park and D. S. Kim, "Theory of prediction onto narrow quantization constraint set and its application," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 8, no. 10, pp. 1361-1373, Oct. 1999.
- [13] K. Lee, D. S. Kim, and T. Kim, "Regression-based prediction for blocking artifact reduction in JPEG-compressed images," *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 14, no. 1, pp. 36-48, Jan. 2005.
- [14] D. S. Kim and S. H. Park, "Postprocessing for vector-quantized images based on projection onto hypercubes," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 11, no. 4, pp. 802-814, Jun. 2001.
- [15] N. S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.

 저 자 소 개



김 동 식(평생회원)

1986년 서울대학교 제어계측
공학과 학사 졸업.

1988년 서울대학교 제어계측
공학과 석사 졸업.

1994년 서울대학교 제어계측
공학과 박사 졸업.

1998년~1999년 미국 인디애나 Purdue 대학교
ECE 조교수

2000년~현재 한국외국어대학교 전자정보공학부
교수.

<주관심분야 : 신호처리, 영상처리, 계측 및 RF
회로>