논문 2009-46SC-5-4

다중 상태 시간지연을 가지는 연속시간 특이시스템의 지연종속 H_∞ 필터링

(Delay-dependent H_∞ filtering for continuous-time singular systems with multiple state-delays)

김 종 해*

(Jong Hae Kim)

요 약

본 논문에서는 다중 상태 시변 시간지연을 가지는 연속시간 특이시스템의 H_∞ 필터링 문제를 다룬다. 제안하는 필터의 목적은 필터링 오차 특이시스템(filtering error singular system)이 정규성, 임펄스 프리, 점근적 안정성 및 H_∞ 노음 유계(bound)를 만족하는 선형 필터를 설계하는 것이다. 먼저, 다중 상태 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 새로운 지연종속 유계실수정리(bounded real lemma)를 자승 요소를 기초로 하는 유한 합 부등식(finite sum inequality)을 이용하여 제안하고, 이로부터 H_∞ 필터가 존재할 조건과 필터의 설계기법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식(linear matrix inequality)으로 제시한다. 마지막으로 예제를 통하여 제안한 필터 설계 알고리듬의 타당성을 확인한다.

Abstract

In this paper, we consider the problem of H_∞ filtering for continuous-time singular systems with multiple state-delays. The aim of designed filter is to guarantee regularity, impulse-free, asymptotic stability and H_∞ norm bound of filtering error singular system. By establishing a finite sum inequality based on quadratic terms, a new delay-dependent BRL (bounded real lemma) for singular systems with multiple state-delays is derived. Based on the result, the existence condition of H_∞ filter and filter design method are proposed in terms of LMI (linear matrix inequality). Finally, a numerical example is provided to show the validity of the design methods.

Keywords: H_∞ filtering, continuous-time singular systems, multiple state-delays, LMI

I. 서 론

상태 추정(state estimation)은 최근까지 많은 응용분야에 사용되어져 왔으며 최근까지도 연구결과들이 나오고 있다. 특히 입력신호가 유계되었다는 가정하에서 1989년에 H_∞ 필터링[1]이 소개되진 이후에 더욱 활발한 연구가 진행되고 있으며, 대부분의 H_∞ 필터링 문제의 목적은 필터링 오차 시스템의 H_∞ 노옴을 최소화하는 것이다. 칼만 필터링과 비교해 보면 H_∞ 필터링은 외부 잡음 신호의 정확한 통계 정보가 필요 없고 불확실성에 둔감하다는 장점을 가지고 있다[2]. 측정이나 전송 및 계산적 지연에 의하여 공학 시스템에서 발생하는 시간지연항은 시스템의 불안정한 요소가 되고 성능을 저하시킨다. 따라서 시간지연을 가지는 시스템에 대한 H_∞ 필터링 문제에 대하여 많은 관심을 가지고 연구들이 진행되었다. 시간지연을 가지는 H_∞ 필터링 문제는 지연 종속적인 방법[3~5]과 지연 독립적인 방법[6~7]의 두 가지로 구분한다. 일반적으로 지연 종속적인 방법이 지연 독립적인 방법에 비하여 덜 보수적(less conservative)이다. 최근 Gao와 Wang[4]은 비선형 시간지연항을 가지는 불

* 정회원, 선문대학교 전자공학과

(Department of Electronic Eng., Sun Moon Univ.)

접수일자: 2009년1월9일, 수정완료일: 2009년9월4일

확실 시스템에 대하여 모델변형을 통한 지연종속 강인 H_∞ 필터 설계방법을 다루었다. 하지만, 모델변형기법을 사용하여 시스템의 차원을 증가시켜 계산량을 증가하는 보수적인 면이 존재한다. 이러한 단점을 해결하기 위하여 Zhang과 Han[5]은 시변 시간지연을 가지는 시스템에 대한 지연종속 H_∞ 필터링 문제를 다루었다. 하지만 다루는 시스템이 비특이시스템(non-singular system)이여서 특이시스템(singular system)에 대한 H_∞ 필터링 문제에 대해서는 직접 적용할 수 없다.

특이시스템을 위한 제어기 설계에 관한 연구는 최근 많은 관심사가 되고 있다[8]. 특이시스템은 실제 시스템의 동특성을 자연스럽게 표현할 수 있기 때문에 제약적 제어문제, 전기회로, 경제 시스템, 로봇 시스템, 전력 시스템과 특이 섭동이론 등 다양한 분야에서 사용되고 있다[9~10]. 하지만, 상태 시변 시간지연을 가지는 특이시스템에 대한 연구 결과는 없는 실정이다. 따라서 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템도 포함하는 일반적인 지연종속 H_∞ 필터링 문제를 다루고자 한다.

본 논문에서는 다중 상태 시변 시간지연을 가지는 연속시간 특이시스템에 대하여 지연종속 H_∞ 필터가 존재할 조건과 설계방법을 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제안한다. 마지막으로 예제를 통하여 타당성을 확인한다.

Ⅱ. 문제 설정

다중 상태 시변 시간지연을 가지는 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= A_0x(t)+\sum_{j=1}^{q}A_jx(t-d_j(t))+Bw(t) \\ y(t) &= C_0x(t)+\sum_{j=1}^{q}C_jx(t-d_j(t))+Dw(t) \\ z(t) &= L_0x(t)+\sum_{j=1}^{q}L_jx(t-d_j(t))+Gw(t) \\ x(t) &= \phi(t),\ t\in[-\max(d_j),0] \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(t)\in R^n$는 상태변수, $y(t)\in R^m$는 측정변수, $z(t)\in R^p$는 측정되는 신호, $w(t)\in R^l$는 잡음신호, $\phi(t)$는 초기함수, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬(singular matrix)이고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시변 시간지연은

$$0\le d_j(t)\le d_j<\infty,\quad \dot{d}_j(t)\le\mu_j\le 1<\infty \tag{2}$$

를 만족한다. 시간지연 특이시스템 (1)을 위한 H_∞ 필터의 상태공간 표현은

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f\hat{x}(t)+B_fy(t),\ \hat{x}(0)=0 \\ \hat{z}(t) &= C_f\hat{x}(t)+D_fy(t) \end{aligned} \tag{3}$$

이고, $A_f\in R^{n\times n}$, $B_f\in R^{n\times m}$, $C_f\in R^{p\times n}$ 및 $D_f\in R^{p\times m}$는 결정할 필터의 변수이다. 보조 상태변수와 측정오차를

$$\bar{x}(t)=\left[x(t)^T\ \hat{x}(t)^T\right]^T,\quad \bar{z}(t)=z(t)-\hat{z}(t) \tag{4}$$

라고 정의하면, 필터링 오차 특이시스템은

$$\begin{aligned} \overline{E}\dot{\bar{x}}(t) &= \overline{A_0}\bar{x}(t)+\sum_{j=1}^{q}\overline{A_j}\Phi\bar{x}(t-d_j(t))+\overline{B}w(t) \\ \bar{z}(t) &= \overline{L_0}\bar{x}(t)+\sum_{j=1}^{q}\overline{L_j}\Phi\bar{x}(t-d_j(t))+\overline{G}w(t) \\ \bar{x}(t) &= \left[\phi(t)^T\,0\right]^T,\ t\in[-\max(d_j),0] \end{aligned} \tag{5}$$

와 같고, 변수는 다음과 같다.

$$\Phi=[I\quad 0],\ \overline{E}=\begin{bmatrix}E & 0\\ 0 & I\end{bmatrix},\ \overline{A_0}=\begin{bmatrix}A_0 & 0\\ B_fC_0 & A_f\end{bmatrix}$$

$$\overline{A_j}=\begin{bmatrix}A_j\\ B_fC_j\end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix}B\\ B_fD\end{bmatrix},\ \overline{L_0}=[L_0-D_fC_0\ \ -C_f]$$

$$\overline{L}_j=L_j-D_fC_j,\ \overline{G}=G-D_fD.$$

정의 1[11]. $E\dot{x}(t)=Ax(t)$의 시스템에 대한 성질을 정의한다.

(i) $\det(sE-A)$이 항등적으로 영(identically zero)이 아니면, (E,A)는 정규적(regular)이다.

(ii) $rank(E)=\deg(\det(sE-A))$이면, (E,A)는 임펄스프리(impulse-free)이다.

(iii) $\det(sE-A)=0$을 만족하는 근의 실수부분이 음이면 점근적으로 안정(asymptotically stable)하다.

정의 2[12]. 주어진 시간지연 $d>0$에 대하여, (E,A)와 $(E,A+A_d)$가 정규적이고 임펄스프리이면 시간지연을 가지는 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정규적이고 임펄스프리이다.

정의 3. 본 논문의 목적은 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 및 H_∞ 성능지수

$$J=\int_0^\infty (\bar{z}(t)^T\bar{z}(t)-\gamma^2 w(t)^T w(t))dt<0 \qquad (6)$$

을 최소화하는 H_∞ 필터를 설계하는 것이다.

수식전개를 위하여 변수를

$$\zeta(t)=\begin{bmatrix}\bar{x}(t)\\ \Phi\bar{x}(t-d_1(t))\\ \vdots \\ \Phi\bar{x}(t-d_q(t))\\ w(t)\end{bmatrix}$$

으로 정의하면

$$\begin{aligned}\bar{E}\dot{\bar{x}}(t)&=\begin{bmatrix}\bar{A}_0 & \bar{A}_1 & \cdots & \bar{A}_q & \bar{B}\end{bmatrix}\zeta(t):=\Gamma_1\zeta(t)\\ \bar{z}(t)&=\begin{bmatrix}\bar{L}_0 & \bar{L}_1 & \cdots & \bar{L}_q & \bar{G}\end{bmatrix}\zeta(t):=\Gamma_2\zeta(t)\end{aligned} \qquad (7)$$

과 같다.

III. H_∞ 필터링

본 절에서는 시간지연 특이시스템에 대한 지연종속 유계실수정리를 제안하고 이를 기반으로 다중 상태 시간지연을 가지는 특이시스템에 대하여 정의 3을 만족하는 H_∞ 필터가 존재할 조건과 필터의 설계방법을 모든 변수의 측면에서 볼록최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제안하다.

정리 1. 다중 상태 시변 시간지연을 가지는 필터링 오차 특이시스템 (5)에 대하여, 선형행렬부등식

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 & d_tM^T & \bar{L}_0^T & d_t\bar{A}_0^T\Phi^TS\\ * & \Lambda_4 & \Lambda_5 & \Lambda_6 & \Lambda_7 & \Lambda_8\\ * & * & -\rho I & d_tW^T & \bar{G}^T & d_t\bar{B}^T\Phi^TS\\ * & * & * & -d_tS & 0 & 0\\ * & * & * & * & -I & 0\\ * & * & * & * & * & -d_tS\end{bmatrix}<0 \qquad (8)$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬(positive-definite matrices) P, S, Q, 양의 상수 ρ 및 행렬 M, M_j $(j=1,\ldots,q)$, W, $\bar{Z}$가 존재하면, 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정의 3을 만족한다. 여기서, $\bar{R}$은 $\bar{E}^T\bar{R}=0$을 만족하는 행렬, $*$는 대칭행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래 놓이는 요소이고, 변수들은 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}\Lambda_1&=\bar{A}_0^T\bar{R}\bar{Z}^T+\bar{Z}\bar{R}^T\bar{A}_0+\bar{A}_0^TP\bar{E}+\bar{E}^TP\bar{A}_0\\ &\quad+q(M^TE\Phi+\Phi^TE^TM+Q)\end{aligned}$$

$$\Lambda_2=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{Z}\bar{R}^T\bar{A}_1\\ +\bar{E}^TP\bar{A}_1\\ -M^TE\\ +q\Phi^TE^TM_1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\bar{Z}\bar{R}^T\bar{A}_2\\ +\bar{E}^TP\bar{A}_2\\ -M^TE\\ +q\Phi^TE^TM_2\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}\bar{Z}\bar{R}^T\bar{A}_q\\ +\bar{E}^TP\bar{A}_q\\ -M^TE\\ +q\Phi^TE^TM_q\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3=\bar{Z}\bar{R}^T\bar{B}+\bar{E}^TP\bar{B}+q\Phi^TE^TW$$

$$\Lambda_4=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}-M_1^TE-E^TM_1\\ -(1-\mu_1)\bar{Q}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-M_1^TE\\ -E^TM_2\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}-M_1^TE\\ -E^TM_q\end{pmatrix}\\ * & \begin{pmatrix}-M_2^TE-E^TM_2\\ -(1-\mu_2)\bar{Q}\end{pmatrix} & \cdots & \begin{pmatrix}-M_2^TE\\ -E^TM_q\end{pmatrix}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ * & * & \cdots & \begin{pmatrix}-M_q^TE-E^TM_q\\ -(1-\mu_q)\bar{Q}\end{pmatrix}\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_5=\begin{bmatrix}-E^TW\\ -E^TW\\ \vdots\\ -E^TW\end{bmatrix},\ \Lambda_6=\begin{bmatrix}d_tM_1^T\\ d_tM_2^T\\ \vdots\\ d_tM_q^T\end{bmatrix},\ \Lambda_7=\begin{bmatrix}\bar{L}_1^T\\ \bar{L}_2^T\\ \vdots\\ \bar{L}_q^T\end{bmatrix}$$

$$\Lambda_8=\begin{bmatrix}d_t\bar{A}_1^T\Phi^TS\\ d_t\bar{A}_2^T\Phi^TS\\ \vdots\\ d_t\bar{A}_q^T\Phi^TS\end{bmatrix},\ d_t=\sum_{j=1}^q d_j,\ \rho=\gamma^2.$$

증명. 안정성을 위하여 적절한 리아푸노프 함수를

$$V(\bar{x}(t))=V_1+V_2+V_3 \qquad (9)$$

와 같이 설정한다. 여기에서 각 함수들은

$$V_1=\bar{x}(t)^T\bar{E}^TP\bar{E}\bar{x}(t)$$

$$V_2=\sum_{j=1}^q\left\{\int_{-d_j(t)}^0\int_{t+\tau}^t\dot{\bar{x}}(\theta)\bar{E}^T\Phi^TS\Phi\bar{E}\dot{\bar{x}}(\theta)d\theta\right\}$$

$$V_3=\sum_{j=1}^q\left\{\int_{t-d_j(t)}^t\bar{x}(\theta)^TQ\bar{x}(\theta)d\theta\right\}$$

으로 정의한다. 식 (9)를 시간에 따라 미분을 하면

$$\begin{aligned}\dot{V}_1&=\dot{\bar{x}}(t)^T\overline{E^T}P\bar{E}\bar{x}(t)+\bar{x}(t)^T\overline{E^T}P\bar{E}\dot{\bar{x}}(t)\\ &=\zeta(t)^T\{\Psi\Gamma_1+\Gamma_1^T\Psi^T\}\zeta(t)\end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\le&\ \sum_{j=1}^q\{d_j\zeta(t)^T\Gamma_1^T\Phi^TS\Phi\Gamma_1\zeta(t)\}\\ &-\sum_{j=1}^q\left\{\int_{t-d_j(t)}^t\dot{\bar{x}}(\theta)^T\overline{E^T}\Phi^TS\Phi\bar{E}\dot{\bar{x}}(\theta)d\theta\right\}\end{aligned} \qquad (11)$$

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3 \le & \sum_{j=1}^{q}\{\bar{x}(t)^T Q\bar{x}(t) \\
& -(1-\mu_j)\bar{x}(t-d_j(t))^T Q\bar{x}(t-d_j(t))\} \\
\le & \sum_{j=1}^{q}\{\bar{x}(t)^T Q\bar{x}(t) \\
& -(1-\mu_j)\bar{x}(t-d_j(t))^T \Phi^T \overline{Q}\Phi\bar{x}(t-d_j(t))\} \\
= & \zeta(t)^T \Gamma_3 \zeta(t)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

와 같고 여기에서 변수들은

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_3 = Diag\{qQ, -(1-\mu_1)\overline{Q}, \ldots, -(1-\mu_q)\overline{Q}, 0\} \\
&Q = Diag\{\overline{Q}, \overline{Q}\}
\end{aligned}
$$

와 같고, $Diag\{\bullet\}$는 블록 대각행렬이다. 식 (11)의 우변의 마지막 항을 위하여

$$
\sum_{j=1}^{q}\left\{\int_{t-d_j(t)}^{t}\begin{bmatrix}\Phi\overline{E}\dot{\bar{x}}(\theta) \\ \zeta(t)\end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} S & Y \\ Y^T & Y^T S^{-1} Y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi\overline{E}\dot{\bar{x}}(\theta) \\ \zeta(t)\end{bmatrix} d\theta\right\} \ge 0
\tag{13}
$$

을 잡으면,

$$
\begin{aligned}
& 2\sum_{j=1}^{q}\left\{\int_{t-d_j(t)}^{t}\zeta(t)^T Y^T \Phi\overline{E}\dot{\bar{x}}(\theta)d\theta\right\} \\
& = 2\sum_{j=1}^{q}\zeta(t)^T Y^T E\Phi(\bar{x}(t) - \bar{x}(t-d_j(t))) \\
& = 2\zeta(t)^T Y^T [qE\Phi \ \ -E \ -E \cdots -E \quad 0]\zeta(t)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

가 되고, $Y = [M \ M_1 \ \cdots \ M_q \ W]$로 정의하면, 식 (14)의 항은

$$
\begin{aligned}
&\Pi = \overline{\Pi} + \overline{\Pi}^T \\
&\overline{\Pi} = \begin{bmatrix} M^T \\ M_1^T \\ \vdots \\ M_q^T \\ W^T \end{bmatrix}[qE\Phi \ \ -E \ -E \cdots -E \quad 0]
\end{aligned}
\tag{15}
$$

와 같다. 식 (14)와 (15)를 이용하여 식 (13)을 정리하면

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{q}\left\{\int_{t-d_j(t)}^{t}\dot{\bar{x}}(\theta)^T \overline{E}^T \Phi^T S\Phi\overline{E}\dot{\bar{x}}(\theta)d\theta\right\} \\
& \le \sum_{j=1}^{q}\{d_j\zeta(t)^T Y^T S^{-1} Y\zeta(t)\}
\end{aligned}
\tag{16}
$$

을 얻는다. 따라서 식 (11)은 식 (16)을 이용하면

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_2 \le & \sum_{j=1}^{q}\{d_j\zeta(t)^T \Gamma_1^T \Phi^T S\Phi\Gamma_1\zeta(t)\} \\
& + \zeta(t)^T\left\{\Pi + \sum_{j=1}^{q}\left(d_j Y^T S^{-1} Y\right)\right\}\zeta(t)
\end{aligned}
\tag{17}
$$

이 된다. $\overline{E}^T\overline{R} = 0$이므로 아래의 식

$$
2\dot{\bar{x}}(t)^T \overline{E}^T \overline{R}\,\overline{Z}^T \bar{x}(t) = 0
\tag{18}
$$

이 유도된다. 식 (6), (10), (12) 및 (17)을 이용하면

$$
\begin{aligned}
& \dot{V}(\bar{x}(t)) + \bar{z}(t)^T\bar{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \\
& \le \zeta(t)^T\left\{\Psi\Gamma_1 + \Gamma_1^T\Psi^T + \sum_{j=1}^{q}\left(d_j\Gamma_1^T\Phi^T S\Phi\Gamma_1\right) + \Pi\right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{q}\left(d_j Y^T S^{-1} Y\right) + \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_2^T\Gamma_2\right\}\zeta(t) < 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

이 되고, $\Gamma_4 = Diag\{0, 0, \cdots, 0, -\rho I\}$이다. 초기조건이 영이므로, 식 (18), (19)와 슈어여수(Schur complement) 정리[13]를 이용하면

$$
\begin{aligned}
J = & \int_0^{\infty}\left(\bar{z}(t)^T\bar{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)\right)dt \\
\le & \int_0^{\infty}\left(\bar{z}(t)^T\bar{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) + \dot{V}(\bar{x}(t))\right)dt \\
\le & \int_0^{\infty}\zeta(t)^T \Lambda\zeta(t)dt.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

과 같다. 따라서 $\Lambda < 0$이면, 식 (8)은 $J < 0$을 의미한다. 즉, $\|\bar{z}(t)\|_2^2 < \gamma^2\|w(t)\|_2^2$을 만족한다. 또한, 식 (12)는 식 (9)의 미분방정식의 시간에 따른 미분으로부터 점근적 안정성을 만족한다. $w(t) = 0$인 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정의 1-2로부터 정규성과 임펄스프리임을 보일 수 있으므로 정리 1은 정의 3을 만족한다. ■

정리 1은 다중 상태 시간지연을 가지는 특이시스템 (5)에 대한 새로운 유계실수정리를 제안하였다. 제안한 정리 1로부터 정리 2에서는 H_∞ 필터가 존재할 조건과 설계방법을 제안한다.

정리 2. 다중 상태 시간지연을 가지는 특이시스템 (1)과 시간지연 (2)에 대하여, 아래의 선형행렬부등식

$$
F - P_1 < 0
\tag{21}
$$

$$\Omega=\begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 & \Omega_3 & \Omega_4 & d_t\overline{M_1^T} & \Omega_5 & d_tA_0^TS \\ * & \Omega_6 & \Omega_7 & \Omega_8 & d_t\widetilde{M_2^T} & -C_f^T & 0 \\ * & * & \Omega_9 & \Omega_{10} & \Omega_{11} & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ * & * & * & -\rho I & d_tW^T & \Omega_{14} & d_tB^TS \\ * & * & * & * & -d_tS & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -d_tS \end{bmatrix}<0 \tag{22}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 F, P_1, S, $\overline{Q}$, $\widetilde{Q}$, 양의 상수 ρ 및 행렬 $\overline{M}_1$, $\widetilde{M}_2$, $M_j(j=1,\ldots,q)$, W, Z, $\overline{A}_f$, $\overline{B}_f$, $\overline{C}_f$, $\overline{D}_f$가 존재하면, 식 (3)의 형태를 가지는 H_∞ 필터가 존재한다. 여기서, R은 $E^TR=0$을 만족하는 행렬이고, 변수들은

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= A_0^TRZ^T+ZR^TA_0+A_0^TP_1E+E^TP_1A_0 \\ &\quad +E^T\overline{B_f}C_0+C_0^T\overline{B_f^T}E+q\overline{M_1^T}E+qE^T\overline{M_1}+q\overline{Q}\end{aligned}$$

$$\Omega_2 = A_0^TF+C_0^T\overline{B}_f^T+E^T\overline{A}_f+E^T\widetilde{M}_2$$

$$\Omega_3 = [\psi_{31}\ \psi_{32}\ \cdots\ \psi_{3q}],\ j=1,\ldots,q$$

$$\psi_{3j}=ZR^TA_j+E^TP_1A_j+E^T\overline{B}_fC_j-\overline{M_1^T}E+qE^TM_1$$

$$\Omega_4 = ZR^TB+E^TP_1B+E^T\overline{B}_fD+E^TW$$

$$\Omega_5 = L_0^T-C_0^T\overline{D}_f^T$$

$$\Omega_6 = \overline{A}_f+\overline{A}_f^T+q\widetilde{Q}$$

$$\Omega_7 = [\psi_{71}\ \psi_{72}\ \cdots\ \psi_{7q}]$$

$$\psi_{7j} = FA_j+\overline{B}_fC_j-\widetilde{M}_2^TE$$

$$\Omega_8 = FB+\overline{B}_fD$$

$$\Omega_9 = \begin{bmatrix} \psi_{91} & -M_1^TE-E^TM_2 & \cdots & -M_1^TE-E^TM_q \\ * & \psi_{92} & \cdots & -M_2^TE-E^TM_q \\ * & * & \cdots & \psi_{9q} \end{bmatrix}$$

$$\psi_{9j} =-M_j^TE-E^TM_j-(1-\mu_j)\overline{Q}$$

$$\Omega_{10} = \Lambda_5,\ \Omega_{11}=\Lambda_6$$

$$\Omega_{12} = \begin{bmatrix} L_1^T-C_1^T\overline{D}_f^T \\ L_2^T-C_2^T\overline{D}_f^T \\ \vdots \\ L_q^T-C_q^T\overline{D}_f^T \end{bmatrix},\ \Omega_{13}=\begin{bmatrix} d_tA_1^TS \\ d_tA_2^TS \\ \vdots \\ d_tA_q^TS \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{14} = G^T-D^T\overline{D}_f^T,\ F=P_2P_3^{-1}P_2^T$$

$$P=\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ * & P_3 \end{bmatrix},\ M=[\overline{M}_1\ \overline{M}_2]$$

$$\widetilde{M}_2=\overline{M}_2P_3^{-1}P_2^T,\ \widetilde{Q}=P_2P_3^{-1}\overline{Q}P_3^{-1}P_2^T$$

으로 정의한다. 또한 필터링 오차 특이시스템 (5)에 대하여 정의 3을 만족하는 H_∞ 필터는

$$A_f=\overline{A}_fF^{-1},\ B_f=\overline{B}_f,\ C_f=\overline{C}_fF^{-1},\ D_f=\overline{D}_f \tag{23}$$

으로부터 구할 수 있다.

증명. 먼저 몇 가지 변수를

$$J=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & P_2P_3^{-1} \end{bmatrix},\ \Xi=Diag\{J,I,I,I,I,I\} \tag{24}$$

$$\overline{R}=\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \overline{Z}=\begin{bmatrix} Z & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

와 같이 정의하고, 필터 변수와 관련하여

$$\begin{aligned}\overline{A}_f &= P_2A_fP_3^{-1}P_2^T,\ \overline{B}_f=P_2B_f \\ \overline{C}_f &= C_fP_3^{-1}P_2^T,\ \overline{D}_f=D_f\end{aligned} \tag{25}$$

로 둔다. 따라서 식 (21)은 양의 정부호 행렬 P로부터 유도되고, 식 (22)는

$$\Xi^T\Lambda\Xi=\Omega \tag{26}$$

이 된다. 또한, 식 (3)에서 $y(t)$에서 $\hat{z}(t)$까지의 전달함수를 $T_{\hat{z}y}$로 정의하면 구하고자 하는 H_∞ 필터의 상태 공간 표현은

$$\begin{aligned}T_{\hat{z}y} &= C_f(sI-A_f)^{-1}B_f+D_f \\ &= \overline{C}_fP_2^{-T}P_3(sI-P_2^{-1}\overline{A}_fP_2^{-T}P_3)^{-1}P_2^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f \\ &= \overline{C}_f(sF-\overline{A}_f)^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f \\ &= \overline{C}_fF^{-1}(sI-\overline{A}_fF^{-1})^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f\end{aligned} \tag{27}$$

에 의하여 식 (23)과 같이 구할 수 있다. ■

참조 1. 정리 2에서 제안한 H_∞ 필터 설계기법은 $E=I$인 비특이시스템에 대해서도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이다. 또한, 변수 불확실성(parameter uncertainty)이나 폴리토픽 불확실성(polytopic uncertainty)을 가지는 불확실 시스템에 대한 강인 H_∞ 필터 설계 알고리듬으로도 확장가능하다.

참조 2. H_∞ 성능지수인 γ의 최소화 값을 구하기 위하여 정리 2는

$$\textit{minimize } \rho \textit{ subject to LMI (21)-(22)} \tag{28}$$

과 같은 최적화문제가 된다. 따라서 H_∞ 노옴의 최소화

값은 $\gamma_{\min} = \sqrt{\rho}$ 로부터 직접 구할 수 있다. 따라서 제안한 H_∞ 필터 설계방법은 구하려는 모든 변수의 견지에서 최적화를 보장한다. 식 (28)의 최적화문제는 LMI 도구상자[14]를 이용하면 모든 해를 구할 수 있다.

Ⅳ. 예 제

제안한 H_∞ 필터 설계방법의 타당성을 보여주기 위하여 2개의 상태 시간지연을 가지는 특이시스템

$$E=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -0.7\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}-0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1\end{bmatrix}$$

$$A_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-0.5\\ 2\end{bmatrix},\ C_0=[0\ 1] \quad (29)$$

$$C_1=[0\ 0.2],\ C_2=[0.1\ 0.1],\ D=1$$

$$L_0=[2\ 1],\ L_1=[0.1\ 0],\ L_2=[0\ 0.1],\ G=0.1$$

를 다룬다. $E^TR=0$을 만족하도록 $R=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$을 선택한다. 기존의 논문들[3-7]은 특이행렬로 인하여 시변 시간지연을 가지는 특이시스템 (29)에 적용할 수 없다. 제안한 H_∞ 필터 설계방법인 정리 2에서, $d_1=0.2$, $d_2=0.4$이고 $\mu_1=0.3$일 때의 μ_2의 변화에 따르는 $\gamma_{\min}$은 표 1에서 주어진다. 특별히 $\gamma_{\min}$이 최소인 $\mu_2=0.7$일 때의 H_∞ 필터는

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t)&=\begin{bmatrix}3.0651 & -0.0204\\ -0.6812 & -1.5226\end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}0.1696\\ -1.3539\end{bmatrix}y(t)\\ \hat{z}(t)&=[1.2304\ -0.0398]\hat{x}(t)-0.1871w(t)\end{aligned} \quad (30)$$

과 같다.

따라서 제안한 식 (30)의 H_∞ 필터는 시간지연을 가지는 특이시스템 (29)를 점근적으로 안정화하고 H_∞ 노옴의 최소화를 보장한다. 참조 1에서처럼 $E=I$인 비특이시스템에 대해서도 정리 2를 적용하면 $d_1=0.2$, $d_2=0.4$이고 $\mu_1=0.3$일 때의 μ_2의 변화에 대한 $\gamma_{\min}$은 표 1에서 주어진다. 또한, $\mu_2=0.7$일 때의 H_∞ 필터는

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t)&=\begin{bmatrix}5.5064 & -3.9187\\ -4.2777 & -2.4211\end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}-0.1929\\ -0.8817\end{bmatrix}y(t)\\ \hat{z}(t)&=[5.3634\ -2.9064]\hat{x}(t)+0.0606w(t)\end{aligned} \quad (31)$$

표 1. μ_2의 변화에 대한 $\gamma_{\min}(d_1=0.2,\ d_2=0.4,\ \mu_1=0.3)$

Table 1. The value of $\gamma_{\min}$ corresponding to different μ_2 when $d_1=0.2$, $d_2=0.4$, and $\mu_1=0.3$.

μ_2	특이시스템	비특이시스템($E=I$)
0	0.4426	0.4159
0.1	0.4685	0.4157
0.2	0.7761	0.4455
0.3	0.4342	0.4263
0.4	0.4373	0.4349
0.5	0.5074	0.4201
0.6	0.5233	0.4212
0.7	0.3831	0.4298
0.8	0.4612	0.5029
0.9	0.5209	0.6806
1	-	5.1277

따라서 제안한 정리 2의 H_∞ 필터 설계방법은 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이다.

Ⅴ. 결 론

본 논문에서는 다중 시변 시간지연을 가지는 연속시간 특이시스템의 H_∞ 필터링 문제를 다루었다. 먼저 시간지연 특이시스템에 대한 새로운 유계실수정리를 제시하고, 구한 정리로부터 지연종속 H_∞ 필터가 존재할 조건과 설계방법을 모든 변수의 최적화가 가능한 선형행렬부등식으로 제안하였다. 제안한 알고리듬은 필터링 오차 특이시스템의 정규성, 임펄스프리, 점근적 안정성 및 H_∞ 노옴을 최적화한다. 뿐만 아니라 제안한 설계 알고리듬은 불확실성을 가지는 특이시스템으로도 쉽게 확장이 가능할 뿐 아니라 다양한 제어분야로의 접목도 가능하다. 예제를 통하여 제안한 알고리듬의 타당성을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] A. Elsayed and M. J. Grimble, "A new approach to H_∞ design of optimal digital linear filters," *IMA J. Math Control Inform.*, vol. 6, pp. 233-251, 1989.

[2] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2003.

[3] E. Fridman, U. Shaked, and L. Xie, "Robust

H_∞ filtering of linear systems with time varying delay," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, pp. 159-165, 2003.

[4] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust H_∞ and L_2-L_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 48, pp. 1661-1666, 2003.

[5] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for a class of uncertain linear systems with time-varying delay," *Automatica*, vol. 44, pp. 157-166, 2008.

[6] A. Pila, U. Shaked, and C. E. de Souza, "H_∞ filtering for continuous-time linear systems with delay," *IEEE Trans. om Automatic Control*, vol. 44, pp. 1412-1417, 1999.

[7] J. H. Kim, S. J. Ahn, and S. Ahn, "Guaranteed cost and H_∞ filtering for discrete-time polytopic uncertain systems with time-delay," *J. Franklin Institute*, vol. 342, pp. 365-378, 2005.

[8] L. Dai, *Singular Control systems*, Springer, Berlin, 1989.

[9] C. L. Lin, "On the stability of uncertain linear descriptor systems," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 336, pp. 549-564, 1999.

[10] D. Yue and J. Lam, "Non-fragile guaranteed cost control for uncertain descriptor systems with time-varying state and input delays," *Optimal Control Applications and Methods*, vol. 26, pp. 85-105, 2005.

[11] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: a matrix inequality approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[12] Z. G. Wu and W. N. Zhou, "Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay," *Acta Automatica Sinica*, vol. 33, pp. 714-718, 2007.

[13] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[14] P. Gahinet, A. Nemi rovski, A. J. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, The Math Works Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해(정회원)
1993년 경북대학교 전자공학과 졸업.
1995년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학석사.
1998년 경북대학교 대학원 전자공학과 공학박사.
1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원.
2000년~2001년 일본 오사카대학 컴퓨터제어기계공학과 객원연구원.
2002년~현재 선문대학교 전자공학과 부교수
<주관심분야 : 강인 제어/필터링, 산업응용제어, 신호처리 등.>