韓國數學教育學會誌 시리즈 A <數學教育>
2009. 08. 제 48권, 제 3호, 353-358.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2009, Vol. 48, No. 3, 353-358.

확률에서 독립성 개념의 의미 분석

유 윤 재 (경북대학교)

Ⅰ. 서론과 문제 제기

사건 $A\cap B$의 확률 $P(A\cap B)$를 계산할 때, $P(A)$와 $P(B)$를 알고 동시에 사건 A와 사건 B가 독립이라는 것을 안다면 독립성에 대한 공식

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

를 사용함으로써 $P(A\cap B)$를 용이하게 계산할 수 있다. 그러므로 사건 $A\cap B$의 확률을 알기위한 하나의 방법으로서 A와 B의 독립성에 주목하게 된다. 그러나 실제 상황에서 이 전략이 쉽게 절차화 되는 것은 아닌 것 같다. 이와 관련지어 다음 글 상자 안의 두 상황과 관련된 문제를 보자.

가) 주사위를 2회 던질 때 첫 번째 주사위가 짝수 눈이 나오는 사건을 A, 두 번째 주사위가 소수의 눈이 나올 사건을 B라고 하자.

나) 하나의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나올 사건을 A, 5 이상의 수의 눈이 나올 사건을 B라고 하자.

이 두 상황에 대하여 다음과 같은 문제가 공통적으로 제시된다.

두 사건이 동시에 일어날 확률을 구하라.

상황 가)의 경우에는 두 주사위가 '독립적으로' 작동한다는 것을 물리적 경험에 의거하여 알고 이어 곱의 확률 공식을 적용함으로써 사건 $A\cap B$의 확률을 계산하는데 이 방식은 대개 초등 확률론적 접근이다. 교수 학습 상황에서 교사들은 대개 '하나의 주사위가 다른 주사위에 영향을 주지 않는다'는 사실을 강조하거나 '주사위는 기억력이 없다' 과 같은 비유 전략을 통하여 독립성을 이해시키려고 노력하고 있다(조차미·이종률, 2008). 이에 대하여 상황 나)는 두 사건의 독립성에 대한 물리-경험적 접근이 용이하지 않다는 것을 감지하고 직접 $P(A\cap B)$를 계산하는 전략을 취한다. 실제로 상황 나)의 경우, A와 B의 독립성을 경험적 판단에 의거하는 것은 불가능하다. 예를 들면 하나의 주사위를 던질 때 짝수의 눈이 나올 사건을 A라고 하고 홀수의 눈이 나올 사건을 B라고 하면 A와 B는 독립같이 느껴지지만 실은 독립이 아니다. 심지어 전체 사건을 Ω라고 할 때, Ω는 Ω와 독립이다. 반면에 $P(A)\neq 1$이면 A는 A와 독립이 아니다. Kolmogorov의 공리적 확률론에서 두 사건의 독립성은 형식적이며 이 독립성 개념이 경험적으로 수용될 수 있기 위해서는 적절한 경험 맥락이 주어져야 한다. 예를 들면 상황 가)에서 주어진 사건이 그렇다. 그런데 상황 나)의 경우, A와 B가 독립이 되기 위한 $A\cap B$의 크기에 대한 경험적 판단 기준은 존재하지 않기 때문에 사건의 독립성을 직관적으로 판단한다는 것 실제로 불가능하게 된다. 그 결과 교실 상황에서는 사건 A와 사건 B의 독립성에 의거하여 $P(A\cap B)$를 구하는 것이 아니라 오히려

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$

를 알고 이로부터 A와 B가 독립이라는 결론을 내리게 되는 이른바 교수학적 전도 현상도 나타난다.

독립성 개념에 대한 상황 가)와 상황 나)의 통합적 설명의 실패에 대한 대안으로서 독립성 개념을 '사건의 독립성' 개념과 '시행의 독립성' 개념으로 구분하는 입장을 택할 수 있다. 이러한 구분은 일견 그럴듯한 대안이다. 그러나 이 구분은 표층적이며 두 개념 간 차이를 분명하게 구분할 수 있는 보다 근원적 개념이 제시되어야 한다고 본다. 이에 본 연구는 사건 개념과 시행 개념을 구분하는 것에 동조하면서도 그 개념적 구분은 오히려

* 접수일(2009년 6월 8일), 수정일(1차 : 2009년 7월 9일, 2차 : 8월 22일, 3차 : 8월 26일), 게재확정일(2009년 8월 27일)
* ZDM분류 : K54
* MSC2000분류 : 97C90
* 주제어 : 확률, 조건부 확률, 독립, 곱셈정리, 물리-경험적 독립, 논리-수학적 독립

독립성 개념을 구성하고 있는 하위 개념인 '사건' 개념과 '영향성' 개념들에 의존하다고 있다는 것을 발견하고 상황 가)와 상황 나)에서 주어진 두 사건 개념의 차이점을 사건 개념과 영향성 개념으로 들추어내려는 전략을 취한다.

이렇게 함으로써 현재 학교수학에서 사용하고 있는 두 가지 사건 개념의 차이점은 보다 명료하게 이해되리라고 기대한다. 사실 상황 가)에서 일어나는 독립성 개념과 상황 나)에서 일어나는 독립성 개념의 차이점을 이해한다는 것은 먼저 의미론적 주제로서 흥미가 있다고 본다. 동시에 이 개념에 대한 학생들의 질문에 대하여 통합된 개념으로서 지도를 할 수 없다는 교수학적 고민 이상으로 교사 스스로에게 이 두 개념의 관계를 설명할 수 없다는 고민이 보고되고 있다. 교사에게 이해되지 않는 개념을 학생에게 개념적으로 이해시킬 수 있다는 것은 상상하기 어려운 바 이 문제는 교수학적으로 매우 중요한 주제이다.

본 연구의 동기는 조차미 외(2008)가 다룬 사건의 독립성 개념에 대한 연구가 충분하지 않음에 대한 보완을 염두에 두고 있다. 그들의 연구에 의하면 상황 가)와 상황 나)를 모두 직관적으로 이해될 수 있는가라는 질문에 초점을 맞추고 있는데 이에 대하여 상황 가)는 "원시적 직관"에 의하여 이해 가능하고 상황 나)는 "형식적인 과정을 통해 세우는 직관"으로 간주하여 "논리 형식적 직관"이라고 명명하여 원시적 직관과 논리 형식적 직관으로 대비하였다. 이어 그들은 논리 형식적 직관이란 "형식적이고 논리적인 기초를 바탕으로 한 확신"이라고 설명하고 있다. 그러나 그들이 말하는 '논리 형식적 직관' 개념이 통상적으로 의미하는 직관 개념의 범주에 포함되는 것인지 아니면 원시적 직관 개념과 대비시키기 위하여 의도적으로 병립시킨 것인지는 분명하지 않은데 그 이유는 그들이 말하는 논리 형식적 직관 개념이 사실 직관의 본유 의미와는 거리가 먼 논리성과 형식성을 기반을 두고 있기 때문이다. 이런 혼란은 본 연구에서 다른 개념틀을 사용함으로써 해결된다.

Ⅱ. 독립성과 관련된 개념의 의미 분석

본 연구는 먼저 상황 가)와 상황 나에서 나타나는 '사건'에 대한 개념적 차이점을 명확하게 구별하는데 있다. 먼저 교과서에서 독립성 개념을 어떻게 다루고 있는가를 보자. 우정호 외(2003)의 교과서에서는 독립성 개념을 다음과 같이 정의하고 있다.

> 두 사건 A, B에 대하여 한 사건이 일어나거나 일어나지 않는 것이 다른 사건이 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않을 때, 즉
> $$P(B/A)=P(B/A^c)=P(B)$$
> $$P(A/B)=P(A/B^c)=P(A)$$
> 일 때, 사건 A와 사건 B는 서로 독립이라고 하고 서로 독립인 두 사건을 독립사건이라고 한다.

한편 임재훈 외(2003)에서는 다음과 같이 정의하고 있다.

> 두 사건 A, B에 대하여 어느 한 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어날 확률에 영향을 주지 않을 때, 곧
> $$P(B/A)=P(B)$$
> $$P(A/B)=P(A)$$
> 일 때, 두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 한다.

대부분의 교과서는 독립성을 이와 같은 진술에 의하여 정의하고 있다. 여기서 주목할 점은 독립성 개념에 대한 위의 두 진술이 공통적으로 사례를 통하여 정의하고 있기 때문에 독립성 정의가 실제로 물리-경험에 기초한 것인지 아니면 논리-수학적 정의를 단순히 일상언어로 표현한 것인지 분명하지 않다. 우정호 외(2003)와 임재훈 외(2003)에 의하면 독립사건과 독립시행 모두를 사례로 들고 그것에 기초하여 독립성을 정의하고 있다. 그러나 위의 글상자에서 본 바와 같이 독립성에 대한 정의 자체로만 보면 그 진술들은 동어반복이다.

그러나 위의 두 사례에서도 나타난 바와 같이 독립성 개념은 사건과 시행에 관계없이 다음과 같이 구조화 된다.

i) 먼저 두 개의 사건이 주어진다.
ii) 독립성 개념은 두 사건의 '영향성'란 관계에 의하여 조직된다.

여기서 '사건' 개념과 '영향성'은 확률로 양화되어 그 확률값의 결과에 따라 독립성이 규정된다. 그러므로 '독립성' 개념을 이해하기 위해서는 먼저 그것이 토대되어 있는 '사건' 개념과 '영향성' 개념이 분석되어야 한다.

확률론에서 '사건' 개념은 두 가지로 나타난다. 먼저 확률측도공간 $(\Omega,\mathfrak{I},P)$에서 가측집합족 $\mathfrak{I}$의 원소를 '사건'이라고 부른다. 이 사건 개념은 Kolmogorov가 여러 가지 확률 개념을 통합하여 공리론적으로 건설하는 과정에서 나타난 어떤 집합족의 원소의 이름을 명명한 것에 지나지 않는다. 그러므로 이 '사건' 개념은 그의 공리계가 가진 내적 논리에만 부합되면 충분하며 우리의 경험과 비교될 필요성을 가지지 않는다. 이런 맥락에서 이 사건 개념을 '논리-수학적 사건'이라고 부르겠다. 즉 논리-수학적 사건은 형식적이며 따라서 그 내용을 가지지 않는 것으로서 실제로 무정의 용어에 지나지 않는다. 예를 들면 상황 나)에서 주어진 사건이란 6개의 눈으로 구성된 (Kolmogorov 의미로의) 주사위로 나타날 수 있는 원소의 개수가 2^6인 집합족에 속하는 원소의 통칭이다. 한편 논리-수학적 사건 개념은 모든 형식주의 수학이 그렇듯이 주어진 공리계에 어떤 적절한 맥락이 주어지면 하나의 모형을 만들 수 있게 되는데 이 모형이 우리의 경험 맥락 안에서 구체화되는 경우가 있다. 예를 들면 독립 시행의 사건 개념이 그런 예 중의 하나이다. 이런 사건 개념은 물리적 시공간 내에서 경험 구체성을 가진다는 의미로서 '물리-경험적 사건'이라고 부르겠다. 논리-수학적 사건 개념이 물리-경험적 사건 개념으로 간주되기 위해서는 그 논리-수학적 사건이 동시에 물리-경험적 사건으로 간주되어야 한다.

논리-수학적 사건 개념과 물리-경험적 사건 개념은 확률과 관련된 문제에서 서로 관련되어 있다. 즉 논리-수학적 사건은 물리-경험적 사건의 수학적 모형이 되고 반대로 물리-경험적 사건은 논리-수학적 사건의 물리적 해석이 된다. 이제 이와 같은 준비를 한 후 다시 상황 가)와 상황 나)를 보자.

상황 가)는 하나의 주사위를 던지고 이어 다시 하나의 주사위를 던지는 두 개의 사건이 나타난다. 관찰자는 이 사건들에 이 사건들을 경험적으로 확인할 수 있다. 그러므로 상황 가)에서 주어진 사건 개념은 물리-경험적 사건이라고 간주해도 좋다. 이에 대하여 상황 나)는 하나의 주사위를 던져 두 개의 사건이 생긴 경우이다. 여기서 중요한 점은 하나의 주사위를 던져 두 개의 사건이 생겼다는 점인데 이 두 사건들은 일단 물리-경험적 사건들로 간주될 수도 있고 또 논리-수학적 사건으로 간주될 수도 있다. 그런데 '통상적인' 경험 세계에서 하나의 주사위를 던져서 생긴 사건은 그 사건 그대로 있는 것이지 그것이 상황 나)에서와 같이 서로 다른 두 사건으로 분화될 수는 없는 일이다. 그러므로 상황 나)에서 $A\cap B$는 경험적으로 해석되기 이전에 이미 경험적으로 무의미한 것이 된다. 따라서 상황 나)에서 주어진 사건 개념은 물리-경험적으로 간주되기 어렵다. 반면에 $A\cap B$를 논리-수학적 사건으로 해석하는 것은 항상 가능하다. 결국 상황 나)에서 주어진 사건이란 논리-수학적 사건인데 이것을 친근한 물리-경험적 사건으로 오해한 것이라고 할 수 있고 이것은 용어를 중의적으로 사용할 경우 언제든지 일어날 수 있는 현상이다. 실제로 상황 나)의 진술을 다음 글상자 안에 있는 바와 같이 변형해보면 상황 나)의 진술은 그 자체로서 경험적 맥락을 가지지 않는다는 것을 알 수 있다.

> 한 개의 주사위를 던져서 나타날 수 있는 사건들은 여러 가지 종류가 있다는 것을 알 수 있는데 예를 들면 그 중에서 두 사건 $A=\{1,3,5\}$ 와 $B=\{5,6\}$을 생각할 수 있다.

동시에 이 글상자에 있는 진술에 보면 A와 B의 독립성, 즉 $P(A/B)=P(A)$가 성립함을 직관적으로 파악할 수 있는 물리-경험적 정보가 없음을 확인할 수 있다.

이제 논리-수학적 사건 개념과 물리-경험적 사건 개념을 영향성 개념으로 구별해보자. 여기서 말하는 영향성이란 두 개의 사건이 있을 때 어떤 인과 관계를 의미한다. 상황 가)는 두 개의 물리-경험적 사건이 있다고 했다. 한편 두 개의 개별적 사건이 존재하면 그 사건들의 인과 관계를 생각할 수 있고 운이 좋으면 그 인과 관계를 경험적으로 발견할 수도 있겠다. 여기서 중요한 점은 물리-경험적 사건의 인과 관계는 어떤 경험적 진술로 구성될 수 있다는 점이다. 예를 들면 '나중에 던진 주사위는 먼저 던진 주사위와 상관없이 작동한다' 또는 '주사위를 자신의 행위를 기억하지 않는다'와 같은 직관적

추론을 가능하게 하는 진술들이 그런 것들로서 이것들은 모두 두 사건의 영향성 관계에 대한 경험이 토대되어 있다. 그런데 상황 나)의 경우의 사건을 물리-경험적 사건이라고 한다면 물리-경험적 사건은 하나뿐이기 때문에 인과 관계 자체가 형성되지 않는다. 그러므로 상황 나)의 경우에는 사건의 영향성에 대한 물리-경험적 의미는 존재하지 않게 되고 따라서 상황 나)의 경우에는 경험적 접근이 개입될 수 없게 되는 것은 당연하다. 이와 같이 논리-수학적 개념과 물리-경험적 개념의 차이는 사건 개념과 영향성 개념에 의하여 구별된다.

마지막으로 독립시행의 사건과 같은 물리-경험적 개념은 적절한 확률측도공간을 설정함으로써 논리-수학적 사건 개념으로 환원될 수 있다. 즉 상황 가)에서 물리-경험적 사건 A, B, $A \cap B$에 정합되는 논리-수학적 사건은 확률측도공간 $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$과 $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$의 곱, 즉 적확률측도공간 $(\Omega \times \Omega, \mathfrak{I} \times \mathfrak{I}, P \times P)$에서 각각

$$A' = \{1,3,5\} \times \Omega,$$
$$B' = \Omega \times \{2,3,5\},$$
$$A' \cap B'$$

으로 대응된다. 여기서 확률측도공간 $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$은 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$이고 $\mathfrak{I}$는 사건의 집합으로서 Ω의 멱집합이며 $P(r\{j\}) = \frac{1}{6}(j = 1,2,3,4,5,6)$으로 주어진다. 이에 따르면 $A \cap B$의 물리-경험적 확률값은 $(P \times P)(A' \cap B')$의 값으로 주어지는데 이것은 $(P \times P)(A') \times (P \times P)(B') = \frac{1}{4}$와 같다. 이와 같이 상황 가)의 경우와 같은 물리-경험적 독립성은 적확률측도공간에서 주어진 논리-수학적 사건으로 환원된다.

그러나 실제로는 이런 형식적 절차를 고려하는 대신에 $P(A/B) = P(A)$가 됨을 직관적으로 보임으로써 $P(A \cap B)$를 계산하는데 이것은 두 사건이 독립이라는 것이 물리-경험적일 때 가능하다. 적확률측도와 사건의 독립성과 관련된 보다 심층적 내용은 Feller(1968) 또는 Loéve(1963)를 참고하기 바란다.

III. 결론과 제언

상황 가)에 제시된 독립성 개념은 직관적 접근이 가능하다. 반면에 상황 나)에 제시된 독립성 개념은 단지 논리-수학적 독립성 개념을 일상 언어로 기술한 것에 지나지 않는 것이다. 즉 상황 나)에서 사건들은 시공간 안에서 구체화 될 수 있는 개념이 아니라는 점이다. 결과적으로 상황 나)에서 제시된 독립성 개념을 직관적으로 접근한다는 것은 원천적으로 불가능하다.

교수학적 상황에서 제안할 점은 논리-수학적 독립성 개념을 무비판적으로 물리-경험적 독립성 개념으로 동일시하는 것은 오개념이기 때문에 두 사건 개념은 구분되어 설명되어야 함이 마땅하나 그 구분은 사건의 독립성과 시행의 독립성으로 구분함과 동시에 이 구분의 토대를 이루는 보다 본질적인 구분 개념인 물리-경험적 사건 개념과 논리-수학적 사건 개념으로 정교화 되어야 할 필요가 있다고 본다. 실제로 조건부 확률은 Bayes가 독립시행의 이항분포를 다루기 위하여 제안된 개념으로서 그가 연구할 때는 독립시행의 의미로 연구하였으나 (Kac, 1959; Stiegler, 1986), Kolmogorov가 확률론을 형식화하면서 다양한 확률 현상을 통합하여 추상화 하는 과정에서 탈맥락화 된 것이다. 실제로 앞에서 논의한 바와 같이 독립 시행의 확률은 적확률 측도 공간을 상정함으로써 형식적 확률 공간에서 의미하는 독립성 개념으로 환원됨을 보았다. 이와 같이 적확률 공간의 개념이 허용되는 한 독립 시행 개념은 독립 사건 개념으로 통합된다. 그러나 그러한 통합 가능성은 이론수학적 상황인 경우이고 제한된 확률 개념만 허용되는 학교수학 상황에서는 기대하기 어렵다. 그러므로 적확률 공간의 개념의 도입이 허용되지 않을 경우 사건의 독립성과 시행의 독립성을 합리적으로 설명하기 위한 대안적 도구는 바로 논리 -수학적 사건 개념과 물리-경험적 사건 개념이다. 선행 연구(이정연, 2006; 조차미 외, 2008)들은 바로 이 점을 간과하고 있다.

조건부 확률 또는 사건의 독립성 개념을 이해시키기 위한 교수 학습을 제안한다면 다음과 같다. 앞에서도 언급된 바와 같이 적확률 공간을 도입하지 않는 현행 교육과정으로는 사건의 독립성 개념과 독립 시행의 사건 개념이 통합적으로 설명되기 어렵기 때문에 사건의 독립성 개념과 독립 시행의 사건 개념을 논리적으로 연결하려는 섣부른 시도는 자칫하면 혼란만 가중시킨다. 그러므로 두 사건 개념은 본 논의에서 제시한 것처럼 논리-수학

적 의미와 물리-경험적 의미로 분명하게 구별하는 전략이 교수학적으로 바람직하다고 본다. 그러나 이런 태도는 어떤 교과서에서도 보이지 않는 것 같다. 동시에 조건부 확률 개념은 베이지안 확률 개념과 연결하는 것도 고려해봄직하다. 여기서 베이지안 확률 개념은 베이즈 정리를 도입하여 어떤 완성된 틀을 맺는 것도 의미는 있겠지만 단순히 사전 확률과 사후 확률 개념의 수준에서 현행 교육과정이 간과하고 있는 베이지안 확률 개념의 기초를 소개하는 것도 대안이 될 수 있다. 이러한 시도는 고전적 확률 개념이 아닌 다른 확률 개념이 있다는 것을 경험할 수 있고 또 이것은 현행 학교수학에서 제시된 개념 테두리 안에서도 충분히 실천 가능하다. 다만 이러한 시도는 현행 교육과정의 내용 목표와 다른 궤도를 모색하고 있다는 점에서 보다 넓은 틀에서 논의될 필요는 있다.

마지막으로 조건부 확률 개념과 관련된 개념들의 교수학습 순서는 먼저 조건부 확률 개념이 도입되고 이어 확률의 곱의 법칙 개념이 제시되는 순서가 바람직한데 이는 이정연(2006)의 제안에서도 나타난다. 그러나 이정연은 그렇게 도입하는 순서의 타당성을 독립 개념에 대한 직관 형성의 유리함을 근거로 제시하지만 앞의 논의에서 본 바와 같이 사건의 독립성 개념은 그것이 가진 논리-수학적 성격에 의하여 일반적인 의미에서의 직관은 생기지 않는다고 본다. 그러므로 여기서는 조금 다른 입장을 취한다. 즉 독립성 개념의 전개는 먼저 두 사건의 독립성이 시작점이 되어 일반적 개수의 사건에 대한 독립성 개념으로 확장되며 이어 확률 변수의 독립성 개념으로 자연스럽게 연결되는데 이를 근거로 하여 저자의 입장은 개념적 위계성에 근거를 두고 있다. 이러한 근거가 순전히 수학적 관점에 의거한 것이지만 확률의 지도에서 맹목적인 직관에 의존하는 것보다는 수학적 논리가 때로는 중요하다는 Fischbein(1975)의 주장을 상기할 필요가 있다. 동시에 이러한 위계성은 대학에서 확률론을 배울 때 경험하는 게 가장 바람직하겠지만 그런 기회를 갖지 못한 교사들에게는 독립성 개념의 위계성을 이해하기 위한 배경 지식을 검색하는데 도움을 줄 것이라고 판단된다.

참 고 문 헌

우정호 · 류희찬 · 문광호 · 송갑석 · 박선화 · 박경미 (2003). <u>수학 I.</u> 서울: 대한교과서(주).

이정연 (2006). <u>조건부확률 개념의 이해에 관한 연구.</u> 서울대학교 석사학위논문.

임재훈 · 이경화 · 김진호 · 윤오영 · 반용호 · 조동석 · 이희종 · 방수연 · 한명주 · 남승진 (2003). <u>수학 I.</u> 서울: 두산(주).

조차미 · 이종률 (2008). 확률 영역에서의 독립성, 그 직관적 개념과 형식적 정의의 갈등. <u>한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>.</u> **47(3)**, pp.373-386.

Feller, W. (1968). *An introduction to probability and its application, vol. 1 (3rd ed.) and vol. 2 (2nd ed.).* New York: John Wiley & Sons.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of Probabilistic thinking in children,* Dordrecht: D. Reidel.

Kac, M. (1959). *Statistical Independency in probability, analysis and number theory, Carus Mathematical Monograph, 12.* New York: John Wiley & Sons.

Loéve, M. (1963). *Probability theory,* 3rd ed. Princeton, N.J.: D. van Nostrand.

Stigler, S. M. (1986). *The History of Statistics. The Measurement of Uncertainty before 1900.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Semantic analysis of the independency concepts in the probability

Yoo, Yoon Jae
Department of mathematics education
Teachers' college, Kyungpook National University
E-mail: yjyoo@knu.ac.kr

The article discusses the independence concept occurring in the learning of probability. The author does not distinguishes the independence in the events from the independence in the trials. Instead, the author suggests the physico-empirical independence and the logico-mathematical independence to distinguish between the two concepts.

* ZDM classification : K54
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C90
* Key Words : probability, conditional probability, independence, multiplication law, the physico-empirical independence, the logico-mathematical independence