韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 08. 제 48권, 제 3호, 303-328.

Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2009, Vol. 48, No. 3, 303-328.

교구를 활용한 수업에서의 수학적 표현과 행동 특성의 변화
- 정다면체 지도를 중심으로 -

최 정 선 (서원대학교 대학원)
박 혜 숙 (서원대학교)

I. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

최근 학생들의 호기심을 자극하고 다양한 경험을 통해 수학을 배울 수 있는 교수·학습 방법에 대하여 많은 연구가 진행되고 있다. 특히, 학생들이 어려움을 느끼는 기하의 여러 가지 개념을 시각화(문광호·우정호, 1999; NCTM, 2000)하여 주고, 학생들이 놀이나 조작 활동을 통해 그 개념을 더 쉽게 이해할 수 있도록 도움을 주는 수업(김남희, 1999, 2000; 황우형·이지연, 2000; 김은숙, 2002; 박경자, 2002)에 대한 관심이 높아지고 있다(심상길, 2003).

Weaver와 Suydam(1972)은 의미 있는 수학 지도에 대한 그 동안의 연구결과를 분석하여 구체적 대상을 사용한 수업이 의미의 개발과 밀접하게 관련되어 있음을 밝혀내었다. 즉, 아동이 구체적 대상과 더불어 작업하고, 자신이 하고 있는 것에 대해 말할 때 의미는 창조되고 동화된다는 것이다. 또한, 수학 학습에서 교구 사용의 목적은 학생이 자신의 구체적 환경과 수학의 추상적 수준 사이의 간격을 연결하도록 하는 것이다(Fennema, 1973). 물론 이와 같은 본질적 목적 이외에도 조작교구를 통한 학생들의 실제적인 활동은 동기와 흥미를 유발하는 효과를 거둘 수 있을 것이다. 그러나 문제는 교사들의 의지를 뒷받침 해줄 만한 체계적이고 실증적인 연구가 부족하다는 것이다. 어떤 문맥에서 어떤 교구를 이용하여 어떤 식의 수업을 할 것인가와 같은 구체적 아이디어에 대한 연구가 아직은 충분히 축적되어 있지 않기 때문에, 교사가 교구 사용에 대한 긍정적인 태도와 의지를 나타내 보이는 것만으로도 교구가 학교수업에 실제적으로 활용되리라 기대하는 것은 무리일 것이다(김수미, 2000). 따라서 어떤 문맥에서 어떤 교구를 이용하여 어떤 식의 수업을 할 것인가에 대한 구체적인 연구가 필요하다고 볼 수 있다.

Bruner(1960)는 "어떤 교과 내용이든 어떤 발달 단계에 있는 어떤 아동에게든 어떤 지적으로 정직한 형태로 효과적으로 지도할 수 있다."고 가정했으며, 여기서 기본적인 아이디어는 학문적인 표현방식으로 표현하는 것이 아니라, 아동의 사고 양식에 맞게 적절한 표현수단으로 재구성하여 제시하면 초등학교 단계의 아동들에게도 지도할 수 있다고 주장하였다. Bruner가 자신의 주장을 구체화하기 위해 필요했던 것이 표현 양식이었다. Bruner는 행동적-영상적-상징적 표현의 세 가지 방식으로 표현양식을 구분하고, 여러 가지로 표현될 수 있는 지식은 유연성이 크고 문제해결 능력을 높여주므로 학습내용을 여러 가지로 바꾸어 표현하는 능력을 길러주어야 할 것이며, 행동적 표현을 해 보게 하거나 그림으로 나타내어 보게 하고 말로 설명해 보고 기호로 나타내어 보게 하는 방법을 생각해 볼 수 있다고 하였다(우정호, 2000).

또한, 학생들이 문제를 해결하고 수학적 아이디어를 탐구하면서 만들어내는 독특한 표현들은 학생들이 문제를 이해하고 해결하는 데 도움이 되며, 해결 방법을 기록하고 그 방법을 다른 사람들에게 기술하는 의미 있는 방법을 제공하는데 중요한 역할을 할 수 있다. 교사들은 학생들의 표현을 봄으로써, 학생들이 수학에 대해서 해석하고 사고하는 방법에 관해 가치 있는 통찰을 얻을 수

* 접수일(2009년 7월 24일), 수정일(1차 : 2009년 8월 17일), 게재확정일(2009년 8월 18일)
* ZDM분류 : D43
* MSC2000분류 : 97D40
* 주제어 : 교구, 수학적 표현, 수학적 행동 특성, 정다면체

있다. 교사들은 학생들이 개인적인 표현으로부터 보다 관례적인 표현으로 발전해 나가도록 다리 역할을 해 줄 수 있다. 학생들이 관례적인 표현 양식을 학습하는 것은 물론, 수학을 배우고 행하는 것을 지원하기 위한 도구로서 자기 자신의 표현 방법을 만들고 수정하면서 활용할 기회를 갖는 것이 중요하다(NCTM, 2000). 더불어 학생이 산출한 표현은 학생 자신에게 뿐만 아니라 교사에게도 유익하다. 학생이 문제 생황을 어떻게 지각하는지, 학생의 마음속의 표상이 어떠한지를 알려줌으로써 교사가 학생 활동을 안내하기 위해 해야 할 교수 활동에 대해 제안해 주기 때문이다. 특히, 기하 단원의 도형 개념 학습시 학생이 만들어 낸 표현은 학생이 지닌 표상의 본질을 드러내고 이해 정도는 평가할 좋은 기회가 된다(장혜원, 1997).

기하는 오랫동안 학교 수학 교육과정에서 학생들이 추론을 배우고 수학의 공리 구조를 이해할 수 있는 영역으로 간주되어 왔다. 기하 공부를 통하여 학생들은 도형과 구조에 대해서 배우고 그 특성과 관계를 분석하는 방법을 학습하게 된다. 공간시각화, 즉, 2차원과 3차원 물체를 머릿속에서 만들고 조작하는 것과 하나의 물체를 여러 가지 관점에서 인식하는 것은 기하적 사고에서 중요하다. 그러므로 잘 설계된 적절한 도구는 교사의 지원과 함께 학생들은 기하에 대해 추측하고 탐구할 수 있으며, 저학년에서부터 기하 아이디어에 대해서 주의 깊게 추론하는 것을 배울 수 있다(NCTM, 2000). 또한, 기하학은 흥미를 제공하고 단순한 계산의 틀에서 벗어날 수 있게 해주어 학생들이 수학에 관심을 가질 수 있도록 도와준다(Hatfield et al., 1993; 채희진, 1998에서 재인용).

그동안 교구를 활용한 수업 등에 관하여는 많은 연구가 있었으나(김남희, 1999, 2000, 2001; 남승인, 2003; 남승인 · 권민성, 2007; 전평국 · 정부용, 2003; 최창우 · 손숙현, 2002; 이강섭 · 심상길; 2007), 수학적 표현에 초점을 맞추어 연구한 것은 거의 없었고, 정다면체의 정의에 대한 연구가 있으나 일반적인 표현을 모두 조사한 것은 아니었다.

따라서 본 연구에서는 기하영역 중에서 중학교 1학년에서 배우는 정다면체를 주제로 하여 교구를 활용한 수업을 개발하고 이를 중학교 1학년 학생들에게 적용한 후, 학생들의 수학적 표현의 변화와 수학적 행동 특성에 미치는 영향을 분석하고자 한다. 또 이를 통하여 수학 학습에서 교구의 필요성에 대한 시사점을 찾고자 한다.

2. 연구 문제

본 연구에서는 중학교 1학년 학생을 대상으로 정다면체를 주제로 교구를 활용한 수업을 개발하고, 적용하여 학생들의 수학적 표현의 변화와 수학적 행동 특성에 미치는 영향을 분석함으로써, 수학 학습에서 교구의 필요성에 대한 시사점을 찾고자 한다.

본 연구의 목적을 위하여 연구 문제는 다음과 같이 선정하였다.

가. 교구를 활용한 수업에서 중학교 1학년 학생들의 수학적 표현에 어떠한 변화가 있는가?

1. 언어적 표현과 관련하여 어떠한 변화가 있는가?
2. 시각적 표현과 관련하여 어떠한 변화가 있는가?
3. 기호적 표현과 관련하여 어떠한 변화가 있는가?

나. 교구를 활용한 수업이 중학교 1학년 학생들의 수학적 행동 특성에 어떤 영향을 미치는가?

3. 연구의 제한점

가. 이 연구는 중학교 1학년 수학체험반(특별활동 중 하나) 학생 20명을 대상으로 하였으며, 연구자의 수업에 참여한 학생이 작성한 활동지에 기술된 내용을 바탕으로 분석하였으므로, 일반적인 결과로 확장하는데 제한이 있을 수 있다. 더구나 이 연구에서는 정다면체에 한 가지 주제로 조사하였으므로, 일반적인 결과로 확장하기에는 다소 무리가 있을 수 있다.

나. 교구를 활용한 수업은 장기간 투입하여 관찰이 필요하나 이 연구에서는 총 6차시(한 차시당 1시간 30분)의 단기간 관찰을 통해 분석하였으므로 수학적 표현의 변화 과정을 상세히 밝혔다고 보기는 어려울 것이다. 또한 정다면체에 관하여만 분석하였으므로 다른 학년이나 다른 영역에서 나타나는 수학적 표현을 밝히는 데 제한점이 있다.

다. 본 연구자가 설계한 교구를 활용한 수업은 중학교 1학년 교과서의 정다면체를 배우는 단원에서 활용하기에는 시간이 많이 소요되어, 실제 수업 시간을 이용하기는 어려울 것이다. 다만, 특별활동수업 등에서는 활용할 수 있을 것으로 생각된다.

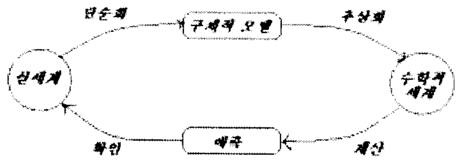
Ⅱ. 이론적 배경

1. 용어의 정의

가. 교구

'교구'에 대한 정의는 다양해서 어느 것을 교구라고 할 수 있는지에 대한 분류 기준은 여러 가지로 이야기할 수 있다.

먼저, Post(1980)는 조작교구를 아동들에게 가르치려는 보다 추상적인 수학적 개념을 나타내는 동형구조물(isomorphic structure)이라고 보았다. 그는 수학의 유용성이 실세계의 여러 측면들을 효과적으로 모델화할 수 있는 능력에 있다고 보고, 실세계에서 수학적 세계로의 전환은 주요 구조의 유사성, 즉 동형사상(isomorphism)이 전제되어야 한다고 하였다.



<그림 1> 실세계와 수학적 세계와의 관계(Post, 1980)

예를 들어 카운터(counter)나 물체들의 묶음을 이용하여 수세기를 하는 것(discrete model) 또는 수직선이나 퀴즈네르 막대같이 길이를 이용하여 실수를 나타내는 것(countinuouse model)등은 모두 동형구조(isomorphic structure)라 볼 수 있다. 그러므로 동형구조는 실세계를 모델화하되, 추상적인 수학적 세계보다는 덜 추상적인 구조다. 조작교구는 실세계와 수학적 세계를 연결하는 매개물로 효과적으로 사용될 수 있으며 이 매개물을 통해 실세계의 상황을 모델화할 수 있기 때문에 문제 해결 능력을 향상시켜준다는 것이다(김덕봉, 2002).

한편, Brunner는 교구의 개념을 매우 넓게 파악하여, '간접적 경험을 위한 교구', '모형교구', '극화교구', '자동화 교구'등으로 분류하였다. 교구에 대한 이와 같은 입장은 어떤 자료 혹은 도구가 수업에 활용될 수만 있다면 곧 교구로 간주할 수 있다는 생각이 바탕에 깔려 있는 것이다(김수미, 2000).

김응태 · 박한식 · 우정호(1984)는 교구를 다음과 같이 세 가지로 분류하였다. 첫째, 아동에게 구구를 암기시키기 위한 소위 '플래쉬 카드'나 계산 연습을 위한 학습 프로그램과 같은 기계적 훈련을 위한 교구가 있다. 둘째, 어떤 특정한 수학적 개념이나 원리 등을 이해시키기 위한 모형, 예를 들면 평행사변형의 넓이, 각추의 부피, 피타고라스의 정리, 투영도 등을 설명하기 위한 모형이나 입체도형 등을 생각해 볼 수 있다. 흔히 수학자료실에 보관되어 있는 교구는 대부분 이에 해당될 것이다. 셋째로 수학적 구조 특히 수구조를 구체화한 'Cusinare 색막대'와 논리 혹은 Boole 대수 지도를 위한 Dienes의 '속성블럭' 등이 있다.

이를 토대로 김수미(2000)는 조작교구가 만족해야 하는 아래와 같은 네 가지 기준을 선정하였다.

첫째, 학생의 지각적 감각에 자극을 주어야 한다.
둘째, 학생이 만질 수 있어야 한다.
셋째, 이동과 재배열이 가능한 자유롭게 옮겨질 수 있는 것이어야 한다.
넷째, 수학적 아이디어를 표현해야 한다.

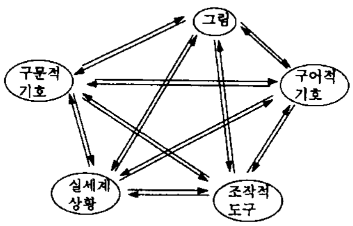
그러므로 베이스 텐 블록이나 저울 같이 수학적 개념을 가르치기 위한 특별히 고안된 것 이외에도, 화폐나 계측 도구 등과 같이 주변 환경에서 차용된 것도 조작교구의 범주에 포함시킬 수 있을 것이라 하였다. 즉 사용하는 사람에 따라 그리고 사용되는 용도에 따라 조작 교구에 범주에 속할 수도 있고 그렇지 않을 수도 있을 것이다.

이와 같은 맥락에서 본 연구에서는 조노돔시스템이나 딘즈블럭과 같이 수학적 개념을 가르치기 위해 특별히 고안된 것 이외에도, 학생으로 하여금 조작하여 수학적 아이디어를 표현하는데 활용할 수 있는 모든 도구를 교구라 정의하기로 한다.

나. 수학적 표현

'표현'이라는 용어는 과정과 산물을 모두 언급하는 데, 수학적 표현이라는 것은 수학을 행하는 사람들 마음속에서 내적으로 일어나는 것뿐만 아니라 외적으로 관찰 가능한 그림, 그래프, 표, 조작물으로서의 표현, 그림 수직선, 기호, 언어 등 다양한 형태로 표현하는 것을 의미한다. 수학교육에서의 표현은 수학의 일부이며, 개념을 구체화시킨 것이고, 어떤 어려움을 감소시키는데 사용되기도 하며, 수학을 더 흥미 있고 재미있게 만들도록 의도된 것이다(Janvier, Bednarz & Belanger, 1987; 최은희, 2005 재인용).

Lesh(1983)는 수학 교과에 국한된 표현을 다섯 가지로 세분화하고 각 표현 체계간의 상호작용을 생각하였다. Lesh 이론의 특징은 표현 체계 간의 상호작용인 번역이 수학의 의미 충실한 학습 및 기억, 전이를 설명하는 데 유용함을 주장하는 것이다.



<그림 2> Lesh의 표현 체계

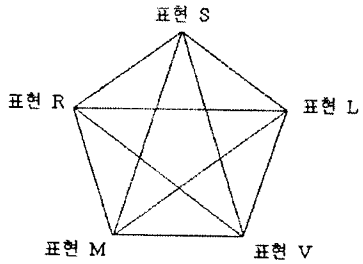
그러나 Lesh의 표현에 대한 분류에서 구어적 기호는 모든 표현에 부수적인 것으로 볼 수 있고, 구문적 기호 중 수학 기호와 일상적 문어는 분리시킬 필요가 있다는 생각에서 Nakahara(1984, 1994)는 다음과 같이 분류하고 있다.

<표 1> Nakahara의 표현 체계 분류

표현 분류	예
실제적 표현: 실세계의 대상을 사용한 표현	사과 2개와 3개를 함께 놓기
조작적 표현: 인위적인 대상을 사용한 표현	정육면체 2개와 3개를 함께 놓기
그림 표현: 정적인 그림, 도형을 사용한 표현	
언어적 표현: 문어적인 일상 언어를 사용한 표현	둘과 셋을 더하기
기호적 표현: 수학 기호를 사용한 표현	2+3

그리고 Nakahara는 표현 사이의 상호관계를 육면체를 써서 표현하면서 기호적 표현을 최상의 자리에 위치시켰다. 그 의도는 수학 수업의 목표를 수학 기호를 사용한 표현을 이해시키는 것으로 보기 때문에 다른 표현들은 Bruner의 주장대로 그러한 목표에 도달하기 위한 과정 중의 도구적 역할로 간주하려는 것이다.

그러나 본 연구에서 주목한 장혜원(1997)의 표현 체계는 이와 의견을 달리 한다. 각 표현 체계는 보다 어려운 표현을 도입하기 위한 수단이 되기도 하지만 그 자체로 가장 적절한 최종의 표현일 수도 있다는 입장에서 장혜원(1997)은 표현체계를 <그림 3>과 같이 다섯 가지로 분류하고 있다. 여기서 각 표현에 대한 설명은 다음 쪽에 있다.



<그림 3> 수학적 표현 체계(장혜원, 1997)

표현 R: 실제적 표현-실세계 대상 및 그에 대한 행동
표현 M: 조작적 표현-수학학습을 위해 고안된 교육 자료 및 그것을 다루는 행동
표현 V: 시각적 표현
  V1: 구체적 그림
  V2: 추상성을 띤 다이어그램이나 도형
  V3: 표현 규약을 알아야 표현 및 표상 가능한 그래프, 표
표현 L: 언어적 표현-문장제와 같은 일상 언어의 사용
표현 S: 기호적 표현-수학 기호, 숫자, 문자

여기서 기호적 표현 및 언어적 표현과 시각적 표현은 상하 관계가 아닌 특성에 따른 다른 종류의 대등한 표현 체계로 다룬다. 한편, 실세계 대상 및 그에 대한 행동인 실제적 표현과 퀴즈네르 막대, 속성 블록, 입체 모형처럼 교사에 의해 교육 자료로 의도된 구체물을 뜻하는 조작적 표현은 나머지 셋과 달리 지면상의 표기가 아닌 실제물 및 그에 대한 행동이므로 표상과 관련한 효율성 여부

는 교수 방법상의 문제로 볼 수 있다. 이처럼 표현 매체를 달리하는 실제물로서의 표현을 제외한 언어적, 시각적, 기호적 표현은 대등한 자격을 부여한다(장혜원, 1997).

다. 수학적 행동 특성

수학 교육에서 가장 중심이 되는 것이 모든 학생을 위한 수학적 능력의 개발이며, 이것은 인지적 능력과 정의적 능력을 모두 포함하는 것이어야 한다. 즉 수학적 능력이란, 조사하고 추측하고 논리적으로 추론하는 능력, 실생활의 문제를 해결하는 능력, 수학에 대해 그리고 수학을 통해 의사소통하는 능력, 수학 내의 여러 가지 아이디어 및 수학과 다른 지적 활동 간의 아이디어를 관련 짓는 능력 등을 포함한 인지적 능력과 문제해결과 의사결정에서의 자신감의 개발, 수량적 정보와 공간적 정보를 찾고 평가하며 이용하는 성향의 발달, 유연함, 인내력, 흥미, 호기심, 독창성 등과 같은 정의적 능력 모두를 포함한다(NCTM, 1989).

송상헌(1998)은 많은 연구(Blurton, 1983; Krutetskii, 1976; Weaver & Brawley, 1959; Keating, 1974; Hoare & Wood, 1980; Greenes, 1981; Consuegra, 1982; Miller, 1990)를 바탕으로 수학 영재아들의 판별과 측정을 위한 수학적 행동 특성을 크게 인지적 특성과 정의적 특성으로 나누고, 정의적인 요인으로 적성, 태도, 성향의 3개 요인으로 인지적인 요인으로 일반 정신능력, 수리계산능력, 창의력, 반성능력 등 4개 요인으로 묶었다(구체적인 내용은 <부록 1> 참조).

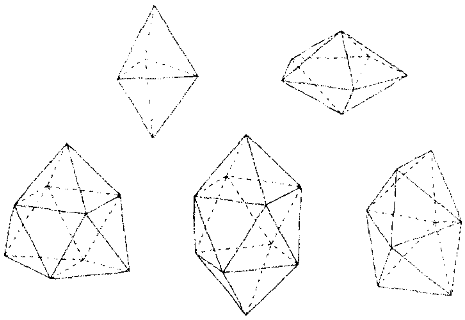
송상헌(1998)의 수학적 행동 특성 검사가 영재아들을 대상으로 만들어졌으나, 이것을 전문가와 함께 검토하고 논의한 결과 일반 학생들에게도 검사가 가능한 검사지라고 판단되었다. 또한 본 연구에서 시행하는 교구를 활용한 수업이 단순히 수학에 대한 흥미와 호기심을 갖기 위한데 초점을 맞추어 설계된 것이 아니라 실제적인 수학적 능력의 변화를 꾀하기 위한 목적으로 구성되었기 때문에 학생들의 수학에 대한 정의적인 특성뿐만 아니라 인지적인 특성이 변한 것으로 생각되고, 이 변화를 검사할 수 있는 도구로 송상헌(1998)의 검사지가 적합한 것으로 판단되어 그대로 사용하기로 하였다. 검사지는 <부록 2>에 제시되어 있다. 이 검사지를 사전 · 사후에 실시하여 응답한 결과를 분석하고 그 차이를 알아냄으로써 교구를 활용한 수업이 학생들에게 영향을 줄 수 있는 수학적 능력에 대한 정보를 얻는데 활용하였다.

라. 정다면체

정다면체는 정사면체, 정육면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체 이렇게 다섯 가지로 구성되어 있다. 역사적으로 정다면체는 여러 곳에서 발견되는데, 플라톤은 대화편 중에서 정사면체는 불, 정이십면체는 물, 정육면체는 흙, 정팔면체는 공기, 정십이면체는 우주와 결합된다고 설명하였다.

또, 로마시대에도 정이십면체와 정십이면체의 기하학적 조형물이 여러 곳에서 발견되었다. 특히 르네상스시대 이탈리아와 독일에서 정다면체는 많은 예술가와 과학자(Leonardo da Vinci, Johannes Kepler 등)의 관심을 끌었다. 이것은 정다면체가 가지는 규칙성 때문이라고도 볼 수 있는데, 정다면체에 존재하는 규칙성은 상당히 의미 있는 현상이다. 정다면체에 대하여 꼭짓점, 모서리, 면과 관련된 다양한 일반적인 성질들을 나열할 수 있다. 그러나 다양한 성질들 중에 어떠한 것을 선택하여 어떠한 방식으로 조합하는가에 따라 특정한 다면체를 정의하고, 단순한 사실의 나열이 되기도 한다(Mariotti & Fischbein, 1997; 고은성 · 이경화 · 송상헌, 2008 재인용).

제7차 교육과정에 따른 7-나 단계 중등교과서 12종(박두일 외, 2002; 최용준, 2002; 박윤범 외, 2002; 이영하 외, 2002; 강행고 외, 2002; 배종수 외, 2001; 황석근 외, 2002; 조태근 외, 2002; 이준열 외 2002, 전평국 외, 2002; 신항균, 2002; 박규홍 외, 2002)을 조사한 결과, 정다면체는 '각 면이 모두 합동인 정다각형이고, 각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같은 다면체'라고 정의하였다. 이 때, 용어나 시각적 이미지에서 '각 면이 모두 합동인 정다각형으로 이루어진 다면체'라고 인식하기 쉬운데 <그림 4>와 같이 모든 면이 정삼각형으로 이루어져 있으나, 정다면체가 아닌 델타헤드론(Deltahedron)등이 존재하기 때문에, '각 꼭짓점에 모인 면의 개수가 같다'는 조건은 정의의 요건에 필수적이다.



<그림 4> 모든 면이 정삼각형인 다면체

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 충북 청주시에 소재하고 있는 W중학교 1학년 특별활동 중의 하나인 수학체험반 학생 24명(남;7명, 여;17명)을 대상으로 수행되었다. 이들의 수학성적은 상·중·하 모두 골고루 분포하고 있다. 이들은 수학 과목에 대하여 특별히 영재 교육 기관에서 교육을 받은 적은 없다. 이 수업에서 활용한 조작교구들(조노돔 시스템, 폴리드론)도 모두 처음으로 다뤄보는 학생들이었다.

이 학생들은 4학년 1학기(4-가 단계)에 이등변 삼각형, 정삼각형 등 삼각형의 특수한 경우에 대한 개념을 이해하고 용어를 학습하였고, 4학년 2학기(4-나 단계)에서는 사다리꼴, 평행사변형, 마름모, 정사각형 등의 사각형의 특수한 경우에 대한 개념을 이해하고 용어를 학습하였다. 또, 5학년 1학기(5-가 단계)에서 직육면체와 정육면체를 다루고, 직육면체에 대한 다양한 전개도를 경험하였으며, 5학년 2학기(5-나 단계)에서는 합동의 의미를 이해하고, 용어를 학습하였다(교육부, 2006a). 이들은 아직 정육면체를 제외한 나머지 정다면체(정사면체, 정팔면체, 정십이면체, 정이십면체)에 대하여 학습한 적은 없다. 사전조사를 통해 정다면체에 대하여 미리 학습한 적이 있는 4명은 제외하고 총 24명의 학생 중 20명(남;7명, 여;13명)만 본 연구 결과의 대상으로 삼았다.

2. 연구 방법

본 연구에서는 정다면체를 주제로 교구를 활용한 수업을 설계하고, 중학교 1학년 학생들이 정다면체에 대하여 언어적, 시각적, 기호적으로 어떻게 표현하며, 차시별로 표현의 변화를 위한 교구를 활용한 수업에서 학생들의 반응은 어떻게 변화해 가는지를 학생들이 작성한 활동지를 바탕으로 질적 사례 연구방법으로 진행하였다. 또한, 사전과 사후에 수학적 행동 특성 검사지를 실시함으로써 s-plus 통계프로그램을 이용하여 그 차이를 분석하는 양적 연구 방법을 진행하였다. 사례연구는 많은 표본을 수집하여 제한된 변인을 통계적으로 분석하면서 일반적 경향을 밝히려는 표본연구나 통계적 연구와는 달리 한 대상의 여러 변인을 동시에 심층적으로 연구한다는 특징을 가진다. 사례연구는 사례가 제한되어 있기 때문에 결론을 일반화하는 데 한계가 있다는 단점이 있으나, 한 대상을 깊이 있게 연구하고 변인들이 어떻게 작용하는지 그 과정을 생생하게 그려낼 수 있다는 장점이 있기에 차시별 학생들이 작성한 활동지를 분석하는 데 적절한 방법이라 할 수 있다. 또한, 수학적 행동 특성 검사지는 9척도로 구성되었는 바 수량적인 자료를 이용하여 인과 관계를 규명하는 양적 연구 방법으로 진행하였다.

3. 수업의 실제

본 연구에서의 실제 수업은 총 1시간 30분 단위의 6차시로 구성되었으며, 수업 내용은 정다면체를 주제로 구성되었다. 강문봉(1993)은 어떻게 적절한 대상을 제공해 주고 어떻게 관심을 갖고 관찰하게 할 것인가 하는 문제가 교육적으로 해결되어야 할 것으로 보고, 적절한 추측을 얻게 하기 위해서는 먼저 무엇인가를 발견하고 하는 의욕을 고취시키고 추측이 가능한 적절한 패러다임을 제시해 주고, 이어서 그 추측을 반박하면서 추측을 수정해 나갈 수 있도록 수업을 실시해야 한다고 하였다. 본 연구에서는 위의 사항을 참고하여 수업을 설계하였으며, 각 차시별로 정다면체의 종류에 따라 필요한 활동을 위계적으로 구성하였다. 특히, 활동 3, 4, 5, 6은 표현에

대한 교정을 목적으로 하는 활동으로써, 교구를 통하여 다양한 입체도형을 만들어 보고 여러 가지 예를 고찰하는 기회를 통하여 학생 스스로 표현을 개선할 수 있도록 구성하였다. 각각의 활동에 대한 대략적인 설명은 다음과 같다.

활동 1은 정다면체에 대한(정사면체, 정팔면체, 정이십면체) 시각적 이미지를 보고, 면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 수, 꼭짓점의 수, 모서리 수, 면의 수 등을 적고 전개도와 겨냥도를 활동지에 그린다.

활동 2는 앞에서 정다면체(정사면체, 정팔면체, 정이십면체)를 직접 보여주고, 교구(스티로폼 공과 이쑤시개, 조노돔)를 이용하여 만든다. 이를 관찰하여 활동 1과 같은 정보를 적고, 활동지에 위의 입체도형에 대하여 말로 표현해 보고 전개도, 겨냥도 등 그리고 기호를 만들어 본다.

활동 3은 교구(조노돔)을 활용하여 면의 개수가 6인 다양한 다면체를 만들어 보고 몇 가지 조건에 따라 분류한 후, 활동지에 정육면체와 정사면체에 대하여 말로 표현하고 기호도 만들어 본다.

활동 4는 정팔면체를 말로 표현한 후, 주어진 다양한 전개도로 만들 수 있는지 추측해 보고 실제 만들어 보아 자신의 추측을 개선하고 전개도를 그릴 때 고려해야 할 점을 토의한 후 적절한 전개도를 그려본다.

활동 5는 모든 면이 정다각형인 다면체를 만들 때 구성이 가능한 조건에 대하여 토의한 후, 교구(조노돔)를 이용하여 모든 면이 합동인 정오각형이고 한 꼭짓점에 모이는 면의 수가 3인 다면체(정십이면체)를 만들어 보고 전개도를 그린다. 또한, 조별로 토의한 후 개인별로 정다면체의 정의를 내려 본다.

활동 6은 교구(폴리드론)를 이용하여 정십이면체, 정이십면체를 만들어 보고 각각의 전개도를 그린다. 또, 조별로 정육면체의 다양한 전개도를 찾는다.

<표 2> 수업 계획

구분 \ 차시	1차시	2차시	3차시	4차시	5차시	6차시
학습 주제	정사면체 정팔면체	정이십면체	정육면체	정팔면체	정십이면체 정다면체	정십이면체 정이십면체 정육면체
활동 내용	활동 1, 2	활동 1, 2	활동 3	활동 4	활동 5	활동 6

이러한 활동에 맞추어 우선, 활동 1에서는 정다면체(정사면체, 정팔면체, 정이십면체)의 주어진 시각적 이미지를 보고 그로부터 정다면체의 정보(면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 수, 꼭짓점의 수, 모서리 수, 면의 수)에 대해 적어보고 전개도에 그려본다. 활동 2에서는 교구(스티로폼 공과 이쑤시개, 조노돔)를 활용하여 정다면체를 직접 만들어봄으로써 스스로 잘못된 인식을 수정하고 언어적, 시각적으로 표현하게 하였다. 또, 활동 3에서는 면이 6개인 여러 가지 다면체를 교구(조노돔)을 이용하여 만들어 보고 이를 조건에 맞게 분류하는 활동을 통하여 정다면체의 언어적 표현이 좀 더 수학적으로 엄밀해지도록 하였다. 이를 위해 이미 초등학교 때 학습한 경험이 있는 정육면체를 대상으로 수업을 설계하고, 이에 대한 변화를 관찰하기 위한 활동지를 작성하게 하였다. 활동 4에서는 제시된 7개의 전개도로 정팔면체를 만들 수 있는지 생각해 보고, 이를 직접 오려 만들어 보는 활동을 통하여 적절한 전개도인지를 경험하고, 전개도를 그릴 때의 유의점을 토론함으로써 시각적 표현(전개도 그리기)를 개선을 관찰하기 위한 활동지를 작성하게 하였다. 활동 5에서는 모든 면을 정다각형인 다면체를 만들 때, 구성이 가능한 조건에 대하여 토의한 후, 교구(조노돔)를 이용하여 모든 면이 합동인 정오각형이고 한 꼭짓점에 모이는 면의 수가 3인 다면체(정십이면체)를 만들어 보고, 전개도를 그려보게 하였다. 또한, 조별로 토의한 후, 개인별로 정다면체의 정의를 내려 보게 하였다. 활동 6에서는 시각적인 표현, 즉 전개도를 개선하기 위한 활동으로 활동 5에서 그린 정십이면체에 대한 전개도가 맞는지 교구(폴리드론)으로 확인하여 보고, 맞으면 또 다른 전개도를 그리고 틀리면 전개도를 수정하여 그리도

록 하였다. 또한, 정이십면체 대한 전개도도 교구(폴리드론)을 활용하여 경험한 후 그려보게 하였다. 또한, 추가적으로 개별 활동이 끝난 후에는 조별로 15분 동안 정육면체에 대한 가능한 많은 전개도를 그려내는 활동을 하였다.

4. 자료의 수집

본 연구에서는 학생들이 수업 중에 기록한 활동지를 주된 자료로 활용하여 분석하였다. 또, 기록한 내용 중 표현 등에 정확한 확인이 필요한 경우에는 개별 면담을 실시하였다. 학생들이 교구를 활용하여 정다면체에 대해 언어적, 시각적 표현을 하는데 있어서 직접적인 영향을 미치지 않기 위하여 설명보다는 개별 활동을 중심으로 진행하였다.

또한, 교구를 활용한 수업이 학생들의 수학적 행동특성에 미치는 영향을 알아보기 위하여 실험집단과 같은 학교에 다니는 중학교 1학년 중 수학체험반이 아닌 학생 38명을 비교집단으로 선정하여 수학적 행동특성 검사지(송상헌, 1998)를 사전 · 사후에 실시한 후, s-plus 통계 프로그램을 이용하여 유의수준 95%로 t-검정을 실시한 후 그 차이를 알아보았다.

5. 자료 분석

매 차시 학생들이 활동지에 작성한 표현에 대하여 선행연구와 전문가의 조언을 받아 학생들의 표현을 적절한 수준으로 분류하고 차시별 대상별 변화를 분석하였다.

가. 언어적 표현

1) 수학적 정의

여러 연구자들에 의해 수학적 정의에 대해 무모순성(non-contradicting), 명확성(unambiguous), 불변성(invariant), 계층성(hierarchical), 최소성(minimal)등의 특징이 중요한 것으로 받아들여지고 있다(Shir & Zaslavsky, 2001, 2002; Van Dormolen & Zaslavsky, 2003; Zaslavsky & Shir, 2005; 고은성 · 이경화 · 송상헌, 2008 재인용). 그러나 본 연구에서는 학생들에게 각각의 정다면체에 대한 언어적 표현으로부터 출발하였기 때문에 표현에 대한 분석기준으로 정의의 무모순성과 명확성에만 국한하여 분석하기로 하였다. 이 때, 이 두 가지는 다음과 같은 의미를 지닌다.

① 무모순성(non-contradicting): 정의가 지닌 모든 조건들이 함께 존재할 수 있어야 한다. 즉, 정의가 포함하고 있는 여러 조건들 사이에 모순이 있어서는 안 된다.

② 명확성(unambiguous): 정의의 의미가 유일하게 해석되어야 한다. 해석하는 관점에 따라 다르게 해석되어져서는 안 된다.

2) 정다면체에 대한 정의의 완전한 정의와 불완전한 정의

고은성 · 이경화 · 송상헌(2008)은 수학 영재인 초등학교 5학년들 대상으로 정다면체의 정의 구성 활동을 정다면체의 면이 갖는 특징과 꼭짓점이 갖는 특징으로 나누어 학생들의 반응을 분석한 결과를 아래 쪽의 <표 3>과 같이 제시하였다. 여기서 행과 열의 조건들을 각각 하나 이상씩 포함하고 있어야 완전한 정의가 되며 행과 열의 조건 중 각각에서 하나도 제시하지 못하면 불완전한 정의로 구분하였다.

<표 3> 정다면체에 대한 정의의 완전성에 대한 분석 결과

면이 갖는 특징 / 꼭짓점이 갖는 특징	합동인 정다각형	면의 넓이와 모서리의 길이가 같다	면의 크기와 모서리의 길이가 같다	면의 모양과 모서리의 길이가 같다	한 종류의 정다각형으로 이루어져 있다	기타
각 꼭짓점에 모인 모서리의 수가 같다						
각 꼭짓점에 모인 면의 수가 같다						
각 꼭짓점에 모인 입체각의 크기가 같다						
두면이 이루는 각의 크기가 같다						
기 타						

▨ 정다면체에 대한 완전한 정의, □ 정다면체의 불완전한 정의

3) 학생들의 언어적 표현의 수준 분류 기준

고은성 · 이경화 · 송상헌(2008)은 정다면체에 대한 정의의 완전성에 대한 분석 결과로 완전한 정의와 불완전한 정의로 분류하였으나, 본 연구에서는 정다면체에 대한 정의가 아니라 정사면체, 정육면체 등 개별 정다면체에 대한 언어적 표현을 요구하였기 때문에 학생들의 언어적 표현에 대한 수준의 기준을 <표 3>에 두되, 각각의 정다면체에 대한 언어적 표현을 요구한 상황을 고려하여 이를 더 세분화시켜 수준을 분류하였다.

이 때 정다면체의 면의 개수, 꼭짓점의 개수, 모서리의 개수 등의 서술은 기타 속성의 서술로 보고 수준 분류에 고려하였다. 또, 정삼각형, 정사각형, 정오각형 등의 정확한 용어가 아닌 더 포괄적인 상위의 용어 삼각형, 사각형 등으로 표현한 경우를 부정확한 표현으로 수준 분류에 고려하였다. 이상을 종합하여 학생들의 언어적 표현을 전문가와의 논의를 통하여 다음 쪽의 <표 4>와 같이 0수준부터 7수준까지 총 8개의 수준으로 분류하였다. 여기서의 행과 열은 <표 3>에 대한 행과 열이다.

<표 4> 학생들의 언어적 표현의 수준 분류 기준표

수준 구분	기준 내용
7	행과 열의 조건들을 각각 하나 이상씩 포함하여 표현한 경우
6	행(열)의 조건에 대해서 하나 이상 포함하고 열(행)의 조건의 일부만 포함한 표현인 경우
5	행(열)의 조건에 대해서 하나 이상 포함한 표현인 경우
4	행(열)의 조건의 일부만 포함하면서 정확한 용어로 표현한 경우
3	행(열)의 조건의 일부만 포함하면서 부정확한 용어로 표현하고 기타 속성을 나열한 표현인 경우
2	행(열)의 조건의 일부만 포함하면서 부정확한 용어로 표현한 경우이거나, 행과 열의 조건을 포함하지 않고 기타 속성을 나열한 표현인 경우
1	단순직관에 의한 표현인 경우
0	반응이 없거나 표현의 내용상 전체적으로 오류를 내포한 경우

나. 시각적 표현

정다면체의 전개도 반응을 각 활동에 대하여 정반응 유형수, 정반응 학생수, 오반응 유형수, 오반응 학생수, 미완성 및 무반응 등으로 나누어 활동별 대상별로 분류하여 변화를 사례별로 분석하였다.

다. 기호적 표현

Harel과 Kaput(1994)은 수학적 기호를 암시적인 기호(tacit symbol)와 정교한 기호(elaborated symbol)로 나누어 설명하고 있다. 기호가 정교한 기호인가 아닌가에 대한 구분은 표현하고자 하는 대상의 요소들 사이의 구조와 관계를 부호화 하는 정도에 의해 달려 있다고 하였다. 즉 암시적인 기호는 필수적인 구조의 특징을 포함하지 못하고 단순히 변수에 이름을 붙이는 색인(index)를 의미한다. 예를 들면, 'β를 순서쌍이라고 하자.'라는 표현이 암시적인 기호의 대표적인 예이다. 반면 정교한 기호는 상대적으로 대상의 요소들 사이의 구조나 관계를 세밀하게 부호화한다. 예를 들어, '(순서)기저 μ와 ν에 관한 선형 변환 T의 행렬'이란 개념을 기호로 표현하고자 할 때 $[T]_{\mu,\nu}$보다는 $[T]_{\mu\to\nu}$이 좀 더 정교한 기호적 표현이라고 할 수 있다. 왜냐하면 선형사상 T가 정의역과 치역에 해당하는 두 기저 사이의 관계에 의해 결정된다는 것을 보여주고 있기 때문이다(최남광, 2008 재인용).

교구를 이용한 활동이 Harel과 Kaput(1994)가 말한 좀 더 정교한 기호를 창안하는데 직접적인 도움을 줄 수 있는 활동은 아니나, 학생들 스스로 기호를 창안해 보는 활동을 통해 기호가 인간에 의해 창안되었으며 학생 스스로 미래의 창안자가 될 수 있다는 사실을 경험할 수 있도록 기회를 주는 것은 의미 있는 활동이기에 4차시와 6차시를 제외한 나머지 차시에서 기호적 표현을 제시하라고 하였다.

라. 수학적 행동 특성 검사

실험집단과 비교집단에 대하여 실험 전에 실시한 수학적 행동 특성 검사 내용을 코드화하고 s-plus 통계처리 프로그램을 사용하여 t-검정을 실시하였다. 각 항목별로 유의수준 95%로 t-검정을 실시한 결과 얻은 p값이 0.05보다 큰 경우 동질 집단이고, 0.05보다 작은 경우 이질집단으로 판단하여 자료를 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 언어적 표현

가. 언어적 표현의 개선을 위한 수업의 구성

1차시에서 학생들에게 정사면체와 정팔면체를 앞에서 제시하고, 그와 같은 입체도형을 교구(스티로폼 공과 이쑤시개)로 만들게 한 후, '이 입체도형만이 가지고 있는 고유한 특징을 이용하여' 말로 표현해 보라고 하였다. 이 수업은 아직 대상자가 다면체, 정다면체 등을 배우기 이전이기 때문에 '다면체' 대신 '입체도형'이라는 용어를 사용하였고, 수학에서 '정의'의 의미를 알지 못하기 때문에 말로 표현할 것을 요청하였다. 대상자들은 정사면체의 경우, '세 모서리가 합쳐 뿔로 모여 있으면서 삼각형의 면이라고 하여 삼각뿔이라고 한다.'나 '이 도형은 밑면이 1개이고 꼭짓점이 4개, 모서리가 6개, 면이 4개 밑면의 모형이 삼각형이다.'와 같이 표현하였다. 또, 정팔면체의 경우에는 '사각뿔을 밑면끼리 붙인 도형'이나 '한 면의 모양은 삼각형이고 꼭짓점은 6개이고, 모서리는 12개고, 면의 수는 8개이다. 그리고 다이아몬드 모양이다.'와 같이 표현하였는데, 이들은 정다면체가 가지고 있는 고유한 특징을 이용하여 표현하기보다는 직관적으로 보여 지는 다면체의 형태를 그대로 표현하거나 주어진 다면체가 가지고 있는 꼭짓점, 모서리, 면 등의 개수 등으로 표현하는 경우가 대부분이었다.

이를 개선하기 위해 3차시 수업에서는 초등학교 때 이미 학습한 경험이 있는 정육면체를 대상으로 학생들에게 조별로 교구(조노돔)을 이용하여 면이 6개인 다면체를 만들게 하였다. 한 조를 제외하고는 10개 이상의 다면체를 만들어 냈으며, 가장 많이 만든 조는 18개의 다면체를 만들어 냈다. 여기서 닮음인 다면체인 경우는 한 개인 것으로 하였다. 도우미[1]가 머릿 속에 생각한 다면체를 조건을 하나씩 제시해주면 그에 맞지 않는 다면체들을 제거해 나가면서 최종 도우미의 다면체만 남게 되는 형식으로 수업을 설계하였다.

나. 차시별 언어적 표현의 수준 변화

활동지에 작성한 학생들의 표현을 앞의 <표 4>에서 제시한 수준 분류에 따라 개별 학생의 각 차시별(1차시에서 3차시까지) 수준을 분류하였다. 예를 들어, 정이십면체의 경우 '면의 모양이 삼각형이고 꼭짓점이 12개이며 모서리가 30개이다.'는 정삼각형이 아닌 삼각형이라는 부정확한 용어와 기타 속성인 꼭짓점과 모서리의 개수를 나열한 표현이기에 3수준에 해당되며, '20개의 정삼각형으로 이루어졌고 한 꼭짓점에 5개의 정삼각형이 모인다. 모든 모서리의 길이는 같다.'는 <표 3>의 행과 열의 조건들을 각각 하나 이상씩 포함한 표현이므로 7수준에 해당된다. 아래 <표 5>에서 M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7은 남학생 7명을 나타내고, F1, F2, F3, F4, F5, F6, F7, F8, F9, F10, F11, F12, F13은 여학생 13명을 나타낸다.

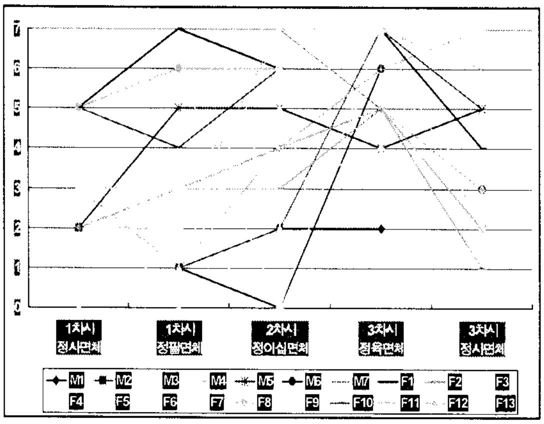
<표 5> 학생들의 언어적 표현에 대한 차시별 수준

대상	1차시 정사면체	1차시 정팔면체	2차시 정이십면체	3차시 정육면체	3차시 정사면체
M1	2	1	2	2	오류
M2	2	1	2	7	오류
M3	3	0	2	6	7
M4	3	1	4	6	7
M5	2	5	5	4	5
M6	2	1	결석	6	3
M7	3	1	7	5	5
F1	5	7	6	7	4
F2	2	2	3	5	1
F3	2	2	3	4	3
F4	5	6	결석	7	7
F5	0	1	5	7	2
F6	2	2	7	7	6
F7	3	1	7	6	3
F8	5	6	6	7	2
F9	2	1	7	6	3
F10	5	4	6	7	5
F11	3	3	3	5	3
F12	2	3	4	5	2
F13	3	3	6	7	2
	2.80	2.55	4.72	5.80	3.89

앞의 <표 5>에서 보듯이 교구를 활용한 수업을 거듭할수록 학생들의 언어적 표현 수준의 평균은 2.80, 2.55(1차시)→ 4.72(2차시)→5.80, 3.89(3차시)로 점차 증가하는 경향을 보였다. <표 5>에 근거하여 차시별 학생들의 언

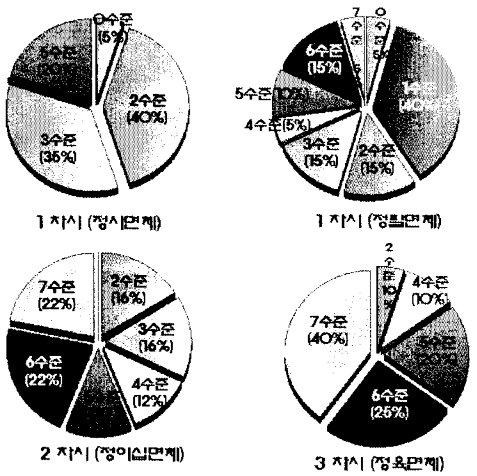
1) 사회봉사의 일환으로 수업보조 역할을 하는 대학생을 말한다. 도우미는 단순히 활동지를 나누어 준다거나 교구를 배치하는 등의 단순 수업보조의 역할만 할 뿐, 학생들에게 학습에 있어 직접적인 정보를 제공하는 경우가 없도록 사전 교육을 받았다.

어적 표현의 변화를 개인별로 겪은 선 그래프를 이용하여 표현하면 <그림 5>와 같이 나타낼 수 있다.



<그림 5> 개인별 3차시까지의 언어적 표현 수준 그래프

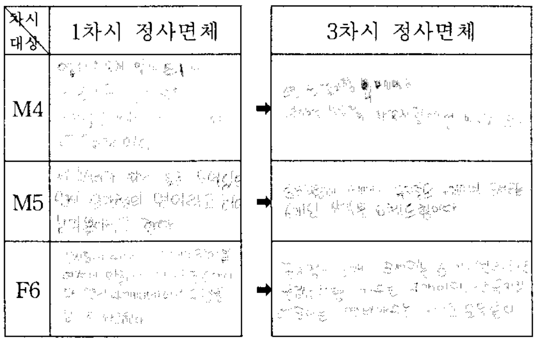
<그림 5>에서 보듯이 1차시에서 정사면체와 정팔면체에 대하여는 수준의 변화가 1수준 내에서 변화가 일어나 평균에 차이가 별반 나타나지 않았다. 그러나 2차시에서는 대부분의 학생들이 올라가는 추세를 보이고 있으며 3차시에서는 그 변화가 더욱 극명하며, 대부분의 학생들이 4, 5, 6, 7수준에 분포함을 볼 수 있다. 이에 대해 더욱 자세히 살펴보기 위하여 차시별 수준 분포 비율을 원그래프로 표현하면 아래의 <그림 6>과 같다.



<그림 6> 차시별 언어적 표현에 대한 수준의 변화 그래프

특히, <그림 6>에서와 같이 차시를 거듭할수록 0수준과 1수준은 현저히 감소하고(0~6%) 6수준과 7수준은 증가함(22%~40%)을 알 수 있다. 이는 교구를 활용한 수업이 언어적 표현의 변화에 긍정적인 효과를 미친다고 보여 진다. 다만, 3차시 정육면체와 정사면체의 평균에 차이가 나는 것은 정육면체에 한하여 활동 3을 전개하였고, 이를 토대로 활동지를 작성하였지만, 이후에 정사면체는 끝부분에 넣어 별도의 활동 없이 입체도형을 보여준 후에 말로 표현하라고 요구하였기 때문에, 학생들은 단지 정육면체 활동으로부터 유추하여 답안을 제시하였으므로 정육면체보다 언어적 표현 수준이 낮게 나온 것으로 생각된다.

그러나 여기서 주목해야 할 것은 1차시보다 3차시에서의 정사면체에 대한 언어적 표현의 수준이 증가되었음을 알 수 있다(평균 2.80 → 평균3.89). 특히, 3수준 이상의 증가를 보인 몇몇 학생들의 사례를 제시하면 아래 <그림 7>과 같다.



<그림 7> 3수준 이상의 증가를 보인 학생들의 사례

<그림 7>에서 보는 바와 같이 교구를 활용한 수업에서 활동 3은 비록 정사면체의 직접적인 활동은 아니라 하더라도 정육면체의 언어적 표현을 유추하여 언어적 표현의 수준을 증가시키는데 역할을 하였다고 볼 수 있다. 또한, 실제 수업시간에 1차시부터 3차시까지 전부 활용하는 것은 시간이 많이 소요되므로 어려울 것이다. 그중에서 3차시의 교구를 활용하여 여러 다면체를 만들고 분류해 보는 활동은 정다면체의 정의를 이해하는 도움을 줄 것이다.

4차시에서는 언어적 표현 변화와 관계된 직접적인 활동은 하지 않았으나, 3차시의 변화가 일회적인지의 여부

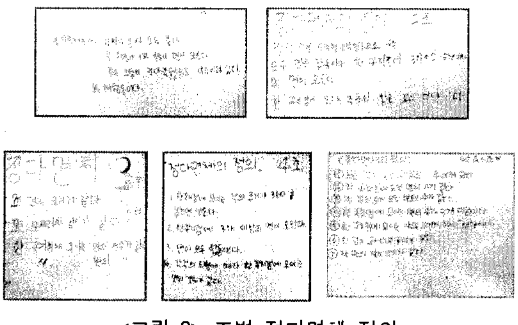
와 2차시와 비교하여 정팔면체에 대한 언어적 표현 수준 변화를 알아보기 위하여 활동지에 작성하게 한 결과, <표 6>과 같이 나타났다.

<표 6> 2차시와 4차시 정팔면체의 언어적 표현 수준 비교

차시 대상	1	4	차시 대상	1	4	차시 대상	1	4	차시 대상	1	4
M1	1	3	M6	1	4	F4	6	7	F9	1	6
M2	1	3	M7	1	6	F5	1	4	F10	4	6
M3	0	3	F1	7	6	F6	2	6	F11	3	4
M4	1	3	F2	2	4	F7	1	6	F12	3	6
M5	5	무	F3	2	4	F8	6	6	F13	3	6

앞 쪽의 <표 6>은 2차시와 4차시의 정팔면체에 대한 언어적 표현의 수준의 변화를 나타낸 것으로, 이것은 무반응을 나타낸 M5와 F1를 제외한 나머지 18명은 2수준 이상의 증가를 보인 것을 알 수 있다. 여기서 3차시에서 언어적 표현 수준이 증가한 것은 교구 활용에 의한 일회적인 변화가 아닌 여러 다면체를 경험해 봄으로써 주목해야 할 특성을 파악하고 정다면체가 지닌 특성에 대한 사고의 변화를 주었음을 알 수 있다.

마지막으로 5차시에서는 학생들에게 조별로 정다면체에 대하여 정의하게 해 본 결과, 학생들의 반응은 <그림 8>과 같았다.



<그림 8> 조별 정다면체 정의

이를 보면 5개의 조 모두 정다면체가 가지고 있는 공통적 성질에 주목하여 정의하려고 하였음을 볼 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 교구를 활용한 수업은 각각의 정다면체의 정확한 개념이미지를 형성하는데 적절한 역할을 하며, 그것이 개념 정의와 연결되어 정다면체의 완전한 정의의 언어적 표현하는데 적절한 역할을 한다고 볼 수 있다.

2. 시각적 표현

가. 시각적 표현의 개선을 위한 수업의 구성

주어진 표현에 대해 적합한 표상을 구성할 수 있는가 하는 문제 대한 많은 연구가 특히 도형의 표현과 관련하여 이루어져 왔다. 그것은 도형이 지닌 이중적 위상[2] 때문이다. 기하학적 개념 자체는 일반적이고 추상적인 대상을 언급하는 반면, 그것의 표현은 구체적인 특정 대상으로 나타나기 때문에, 공간적 유한성 및 물리적 제약성을 지닌다(Mesquita, 1994). 특히, 도형 개념의 차원과 그 표현의 차원이 일치하지 않는 경우 표상 형성에 많은 어려움을 초래한다. 중고등학교에서 공간 기하에 대한 어려움은 학생뿐만 아니라 교사에게 있어서도 표현 및 표상과 관련된 문제에서 비롯된다. 우리가 생활하는 공간 및 다루는 대상이 3차원이고 공간 기하에서의 대상 또한 3차원이라는 공통점에도 불구하고, 공간 기하가 평면 기하보다 어렵게 여겨지는 것은, 공간도형을 전달하는 매체가 2차원이기 때문이다. 3차원 도형을 2차원 표현으로 나타내는 것을 코딩, 2차원 표현을 3차원 도형으로 표상해내는 것을 디코딩이라 할 수 있는데, 학생의 디코딩 과정에서 손실된 정보를 적절히 부가하여 표상하지 않으면 유의한 학습이 되기 어렵다. 또한 학생이 주어진 표현의 디코딩 과정을 용이하게 하기 위해서는 코딩과정을 경험할 필요가 있다(장혜원, 1997).

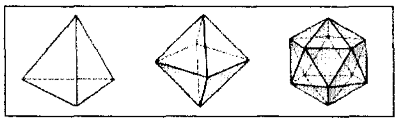
위와 같은 사실을 바탕으로 교구(조노돔, 폴리드론)를 이용하여 코딩과정에서 손실된 정보를 분명하게 복구시켜, 디코딩하는데 도움이 될 수 있도록 구성하였다. 또한, 전개도는 공간 지각력과 관련이 깊지만, 3차원 도형에

2) Fishbein(1993, 1994)은 도형 개념이란 용어를 사용하여 도형의 개념적 특성과 그림 특성의 양면성을 강조한다. 시각적 표현을 통해 흔히 대하게 되는 도형이 본질적으로는 개념이라는 것은, 그것이 종이 위에 그려진 단순한 이미지가 아닌 정의에 의해 통제된 개념이며, 도형의 성질도 공리계 내의 정의로부터 부과된다는 사실에서 명확하다. 원이나 정다각형은 개념적 의미에서만 기하학적 실체의 완전성이 고려될 수 있으며 마찬가지로 점, 직선, 평면 등도 진정한 물리적 대응물을 갖지 않는 정신적인 구성물일 뿐이다. 모든 도형의 표상을 특정 대상에 대한 복사물이 아닌 일반적인 표상일 뿐이다. 그러나 도형은 개념으로서의 표상 외에 시각적 이미지로서 공간적 성질에 대한 표상을 포함한다. 즉 도형은 개념적인 동시에 그림이란 특성을 갖는 정신 구성물을 표상한다(장혜원, 1997 재인용).

대하여 올바른 정보를 갖는 것은 적절한 전개도를 그려내는 것과도 상관이 있다고 판단하여, 교구를 통한 체험을 통하여 정다면체에 대한 적절한 전개도를 그려낼 수 있도록 수업을 구성하였다.

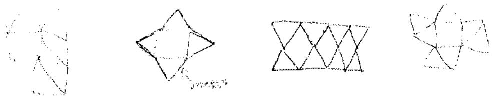
1) 1차시 ~ 3차시

1차시에서는 교구(조노돔)으로 만들기 전에 정다면체(정사면체, 정팔면체, 정이십면체)의 <그림 9>와 같은 겨냥도를 보고, 다면체의 면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수, 기타 등과 각 다면체에 대한 전개도를 생각하여 활동지를 작성하게 하였다. 여기서, '각 입체도형은 모든 모서리의 길이는 같다.'는 것을 알려주었다.



<그림 9> 정사면체, 정팔면체, 정이십면체 겨냥도

정사면체의 경우, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수 등은 제대로 응답하였으나, 면의 모양은 거의 대부분의 학생들이 삼각형이라고 적었다. 기타에 '삼각뿔'이라고 응답하거나 초등학교 때 밑면과 옆면을 구분하여 '밑면이 1개 있다'를 적은 경우가 많았다. 정팔면체의 경우, '사각뿔 2개를 붙여 만들었다'거나 '피라미드 2개 밑면끼리 붙임'등의 고유한 특징보다는 형태를 묘사하여 표현하려는 경향이 높았다. 특히, 가운데 정사각형을 면으로 인식하여 면의 수를 절반 정도의 학생들이 '9개'라고 인식하였다. 이것은 전개도를 그리는데 있어 전개도에 사각형이 포함되어야 한다고 인식하여 <그림 10>과 같은 오반응이 나타났다.



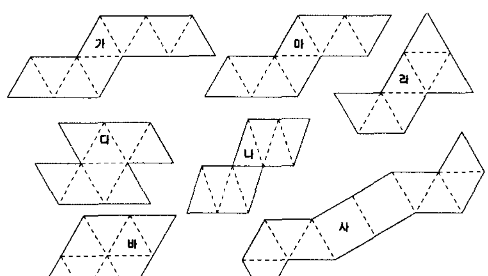
<그림 10> 정팔면체 전개도의 오반응

정이십면체의 경우, 겨냥도에서 손실된 정보가 많아 다면체의 면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수, 기타 등에서 절반의 학생들이 잘못된 정보를 적었다.

다음으로 학생들은 교사가 제시한 정다면체(정사면체, 정팔면체, 정이십면체)를 보고, 교구(조노돔)를 이용하여 정다면체를 직접 만든 후, 다면체의 면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수, 기타 등을 적고, 전개도를 그렸다. 정이십면체의 경우, 학생들은 교구 활동 후 겨냥도에서 손실된 정보를 복구하여 다면체의 면의 모양, 각 꼭짓점에 모이는 면의 개수, 꼭짓점의 수, 모서리의 수, 면의 수 등을 정확히 적었음을 확인할 수 있었다.

2) 4차시

4차시에서는 정팔면체를 대상으로 학생들이 1차시에서 했던 오반응 전개도를 참고하여 <그림 11>과 같이 면의 개수, 면의 모양, 한 꼭짓점에 모여야 하는 면의 개수, 입체를 만들 수 있는 조건, 불필요한 요소 여부 등에 문제점이 있는 전개도를 학생들에게 제시하여 학생들로 하여금 만들 수 있는지(전개도상의 일부 도형을 맞붙히는 것도 가능함) 추측하게 하였다.



<그림 11> 정팔면체 전개도로 가능한 모양 찾기

<그림 11>의 전개도 중에서 '가, 사, 마'는 정팔면체를 만들 수 있다. 그러나 '가와 사'는 만들 수는 있으나, '가'는 정삼각형 하나가, '사'의 경우 정사각형 두 개가 불필요한 부분이 있으므로 정팔면체의 전개도는 아니다. 또, '나, 다, 라, 바'는 정팔면체를 만들 수 없다. '나'는 면의 모양이 정삼각형이 아니기 때문이며, '다'는 한 점에 모이는 면의 개수가 5개인 부분이 존재하므로 구성할 수 없다. 한편, '라'는 면의 개수가 부족하며, '바'는 한 점에 정삼각형 6개가 모여 360°이므로 입체를 구성할 수 없다.

대부분의 학생들은 '가와 마'는 정팔면체를 만들 수 있다고 추측하였다. 그러나 '사'의 경우 20명 중 7명만이 만들 수 있다고 응답하였는데, 그 이유로는 '정삼각형이 아닌 면이 있다', '면이 정사각형도 있다' 등 면의 모양이 모두 정삼각형으로 이루어져 있지 않아 만들 수 없다고 추측하였거나, 2명의 학생은 '사각형이 1개만 있어야 한다'와 같이 사각형의 개수가 많다는 이유로 만들 수 없다고 설명하였다.

또한, 정팔면체를 만들 수 없는 '다'의 경우에는 14명의 학생들이 만들 수 있다고 추측하였다. 이는 '각 꼭짓점에 모이는 면의 개수가 4개로 모두 같다.'인 특징은 '나, 라, 바'와 같이 직관적으로 알 수 있는 특징이 아니므로 전개도에서 고려해야 할 요소임을 간과하였기 때문이다.

정팔면체를 만들 수 있는지 추측하고 실제 직접 만들어 보게 한 후, 학생들은 정팔면체를 만들 수 있는 전개도의 기호를 쓰고 만들 수 없는 전개도와 그 이유, 불필요한 부분이 있는 전개도와 그 이유를 적도록 하였다. 그리고 정팔면체의 전개도를 그릴 때 유의해야 할 점에 대하여 활동지를 작성하게 하였다. 학생들이 경험을 통하여 알아낸 정팔면체의 전개도를 그릴 때 유의하여야 할 사항은 다음과 같다.

- 면이 8개여야 한다.
- 면이 모두 정삼각형이어야 한다.
- 한 꼭짓점에 모이는 면의 수가 4개를 초과하면 안 된다.
- 한 꼭짓점에 모이는 면의 각이 360°이면 안 된다.

실제 수업시간에 심화학습으로 여러 전개도를 만들어 보고 전개도를 그릴 때 유의하여할 사항 등을 토의하는 것은 의미가 있다고 여겨진다. 4차시까지는 정십이면체가 아직 소개가 되지 않았고, 용어에서 정다면체에 대한 특징을 유추할 수 있는 요소가 있다고 판단되어, '정팔면체'라는 직접적인 용어 대신 입체 도형으로 칭하였다.

마지막으로 학생들에게 <그림 11>에서 제시한 '마'와 다른 정팔면체의 적절한 전개도를 그려보도록 하였다.

3) 5차시

5차시에서는 학생들에게 1차시부터 4차시까지 체험한 정사면체, 정팔면체, 정이십면체, 정육면체와 같이 정삼각형이나 정사각형으로만 모든 면이 합동인 입체도형을 만들 수 있는지에 대하여 토의하도록 하였다.

학생들에게는 정십이면체를 교구(조노돔)을 이용하여 만든 후, 관찰하면서 정십이면체에 대한 전개도를 활동지에 그리도록 하였다. 이 때 정오각형은 그리기에 어렵고 시간이 많이 소요될 것으로 판단하여 모양자로 그리게 하였다. 이것은 4차시에서 정팔면체에 대한 전개도는 개선이 되었으나, 단지 정팔면체에 대하여만 변화가 있는지 다른 전개도를 그리는데도 긍정적인 영향을 주는지를 알아보기 위한 것이다.

4) 6차시

6차시에서는 교구(폴리드론)을 이용하여 완성된 정다면체를 보고 전개도를 추측하여 그리는 것이 아니라 실제로 정다면체(정십이면체, 정이십면체, 정육면체)를 만들고 펼쳐보는 경험을 통하여 정확하고 다양한 전개도를 경험할 수 있게 하였다.

마지막 15분 동안은 다양한 전개도를 경험한 학생들에게 조별로 회전하거나 뒤집어서 같지 않은 정육면체 전개도를 가능한 많이 그려 보게 하였다.

나. 대상별 활동에 따른 전개도의 변화

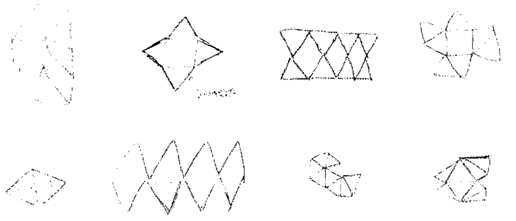
대상별 활동에 따라 오반응 유형수, 오반응 학생수, 정반응 유형수, 정반응 학생수, 미완성 및 무반응으로 나누어 정리하면 <표 7>과 같다. 여기서 '활동 M1'은 정다면체를 스티로폼 공과 이쑤시개, 조노돔을 이용하여 만든 활동이고, '활동 T'는 <그림 11>의 전개도 체험 활동이며 '활동 M2'는 폴리드론을 이용한 활동이다.

<표 7> 대상별 활동에 따른 전개도 반응 수

대상	구분	오반응 유형수	오반응 학생수	정반응 유형수	정반응 학생수	미완성 및 무반응
정사면체	활동 전	4	13	1	7	0
	활동(M1)후	2	4	2	16	0
정팔면체	활동 전	10	15	1	1	4
	활동(M1)후	11	18	0	0	2
	활동(T)후	1	1	4	19	0
정십이면체	활동(M1)후	3	5	3	13	2
정십이면체	활동(M2)후	1	1	6	18	0
정이십면체		1	1	13	18	0

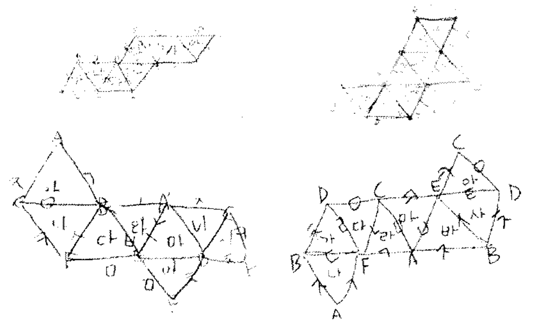
이를 살펴보면, 1차시에 정사면체는 활동 전 시각적 이미지인 겨냥도를 보고 전개도를 그린 결과 오반응 학생

수가 13명이었으나, 교구(조노돔)로 만들어 본 후 정반응의 학생수가 16명을 바뀌었다. 그러나 같은 차시에 정팔면체는 활동 전과 교구로 만들어 보는 활동 후에도 전개도에 대한 변화는 거의 일어나지 않았고, 대부분의 학생들은 <그림 12>와 같이 다양한 형태로 오반응을 하였다.



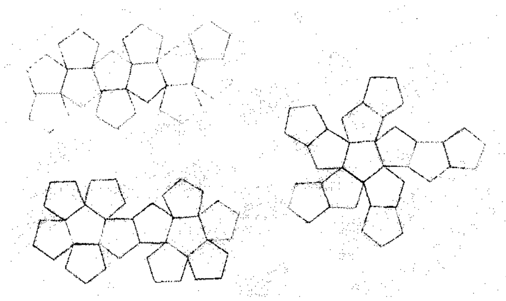
<그림 12> 정팔면체 전개도에 대한 학생들의 오반응 유형

그러나 4차시에서 앞의 <그림 11>에서 제시한 전개도를 체험한 후에는, 1명을 제외한 나머지 학생은 <그림 13>과 같이 적절한 전개도를 그려내었다.



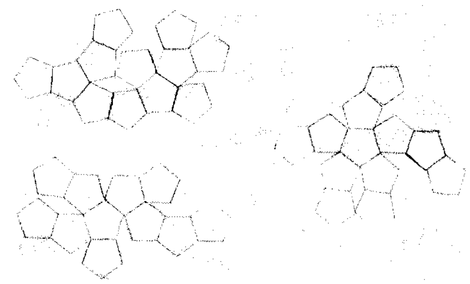
<그림 13> 4차시의 정팔면체 전개도에 대한 정반응 유형

여기서 <그림 13>에서 주어진 전개도와 같거나 그와 비슷한 형태의 전개도가 많아 4차시가 전개도에 대한 변화에 긍정적인 영향을 미쳤는지 확인하기 위하여 5차시에서 정십이면체를 대상으로 교구(조노돔)으로 만든 후, 완성된 모형을 보고 전개도를 그리게 하였다. 13명의 학생들이 <그림 14>와 같은 유형의 정십이면체의 전개도를 적절하게 그렸다. 정팔면체의 경우 스티로폼 공과 이쑤시개로 만든 모형을 보고 전개도를 그린 결과가 활동 전과 비교하였을 때 변화가 있는데, 4차시에서의 경험은 전개도를 그리는데 있어 긍정적인 변화를 준 것으로 볼 수 있다.



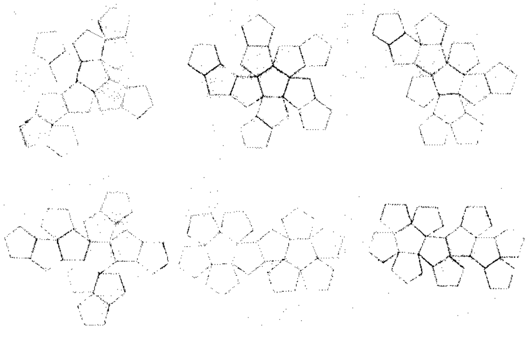
<그림 14> 13명의 정십이면체에 대한 정반응 유형

한편, 7명의 학생들은 <그림 15>과 같이 3가지 유형의 오반응을 나타냈다.



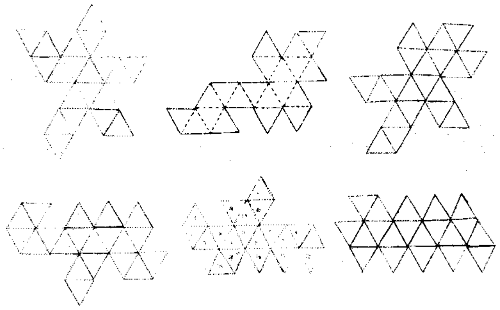
<그림 15> 7명의 정십이면체에 대한 오반응 유형

6차시에서는 교구(폴리드론)를 이용하여 직접 체험해 본 후에는 1명을 제외한 모든 학생이 <그림 16>과 같이 여섯 가지 유형의 적절한 전개도를 그릴 수 있었다.



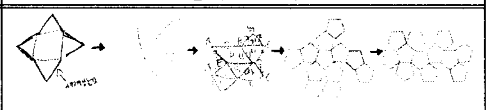
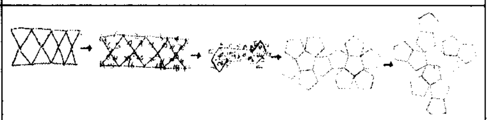
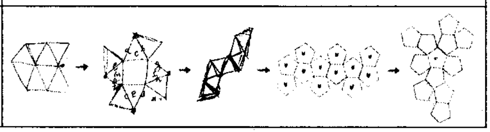
<그림 16> 폴리드론 활동 후 정십이면체에 대한 전개도 정반응 유형

정이십면체에 대하여도 1명을 제외하고 총 13가지 유형을 전개도를 그려냈다. 그 중 일부는 <그림 17>과 같다.



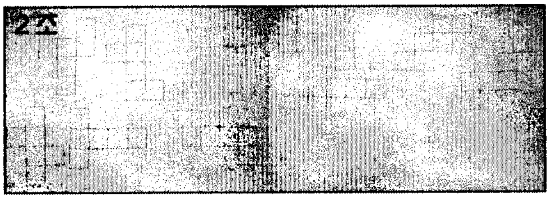
<그림 17> 폴리드론 활동 후 정십이면체에 대한 정반응 유형 중 일부

아래 <그림 18>에서 제시한 바와 같이 차시별로 학생 개인별 사례를 살펴보면, 활동 전 정팔면체에서 교구 활동 후를 비교하면 전개도가 변화되었음을 볼 수 있다.

	전개도 변화
M2	
F3	
F7	

<그림 18> 개인별 활동에 따른 전개도의 변화

마지막으로 15분 동안 조별로 정육면체 전개도를 그려보게 하였을 때는 모든 조가 9개 이상을 전개도를 그려내었고, 세 개의 조는 11개를 모두 그려내었다. 아래의 <그림 19>는 어느 것도 겹치지 않고 11개를 그려낸 조의 전개도이다.



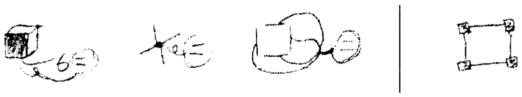
<그림 19> 학생들이 그려낸 11가지 정육면체 전개도

3. 기호적 표현

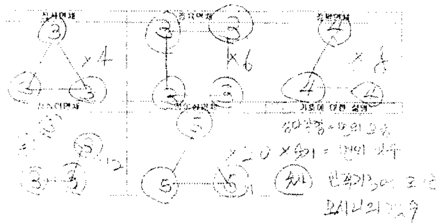
Thompson, Rubenstein(2001)은 학생들이 수학적 기호에 능숙해지도록 돕기 위한 교수, 학습 방법을 몇 가지 제안하고 있는데, 그 중 하나는 학생들 스스로 기호를 창안(invented symbolism)해 보는 활동을 통해, 기호가 인간에 의해 창안되었으며 학생 스스로 미래의 창안자가 될 수 있다는 사실을 경험할 수 있도록 기회를 주는 것이다(최남광, 2008 재인용). 본 연구에서는 4차시와 6차시를 제외한 나머지 차시에서 정사면체, 정팔면체, 정육면체, 정다면체 전체에 대한 기호적 표현을 학생 스스로 창안해 보도록 하였다.

언어적 표현과 시각적 표현과 달리 기호적 표현인 경우 주제인 정다면체의 기호적 표현은 3차원 도형이므로 단순히 모형을 본 따 만들기 어려우며, 더욱이 정다면체의 공통성을 파악하여 이를 나타낼 수 있는 기호를 만들고 의미를 부여하는 것은 연역적 사고가 필요하고, 기호를 만드는데 익숙하지 않은 학생들에게 쉽지 않다. 여기서 교구를 이용한 수업이 Harel과 Kaput(1994)가 말한 좀 더 정교한 기호를 창안하는데 직접적인 도움을 줄 수 있는 활동은 아니다. 그러나 3, 4, 5차시에서 정다면체의 공통적 성질에 주목한 것은 언어적, 시각적 표현의 변화 뿐만 아니라 소수 학생들의 기호적 표현에도 다소 영향을 미쳐 1차시에서 절반정도는 기호적 표현을 창안하지 못하였고, 절반정도는 정팔면체에 대해 <그림 20>과 같이 암시적인 기호를 제시하였으나, 3차시에서는 <그림 21>과 같이 2명의 학생이 정육면체의 특징을 기호로 창안하려는 시도가 엿보였으며, 5차시에서는 <그림 22>와 같이 3명의 학생이 정다면체가 가지는 공통적인 성질을 기호로 표현하였다.

<그림 20> 1차시 정팔면체의 기호적 표현 사례



<그림 21> 3차시 정육면체의 기호적 표현 사례



<그림 22> 5차시 정다면체의 기호적 표현 사례

4. 수학적 행동 특성

본 연구에서는 교구를 활용한 수업을 한 후에 학생들의 수학적 행동 특성에 어떠한 영향을 미치는 지 알아보았다. 비교집단은 같은 학교에서 수학체험반이 아닌 1학년 38명으로 하였으며, 수학적 행동 특성 검사지는 앞서 설명한 송상헌(1998)이 개발한 검사지(<부록 2>에 제시)를 활용하였다. 이 검사지는 크게 정의적인 태도와 성향, 인지적인 사고 기능으로 나누어져 있다. 정의적인 태도와 성향에는 적성, 태도, 성향으로 나누어 17항목으로 세분되어 있다. 또, 인지적인 사고기능에는 일반정신능력, 계산력, 창의력, 반성능력으로 나누어 18문항과 기타문항 1문항으로 총 35문항으로 구성되어 있다. 각 문항에 대한 응답은 10단계 척도(0~9)로 되어있으며 <표 8>과 같다.

<표 8> 검사지 응답 10단계 척도

전혀, 결코 그렇지 않다.		그렇지 않은 편이다		그저 그렇거나 보통이다		대체로 그런 편이다			항상, 매우 그렇다
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

실험집단과 비교집단에 사전, 사후에 실시한 수학적 행동 특성 검사 내용을 코드화하고 s-plus 통계처리 프로그램을 사용하여 t-검정을 실시하였다. 각 항목별로 유의수준 95%로 t-검정을 실시한 결과 얻은 p값이 0.05보다 큰 경우 동질 집단이고, 0.05보다 작은 경우 이질집단으로 판단할 수 있다. 사전 검사에서는 실험집단과 비교집단을 t-검정을 실시한 결과, '전체와 핵심관계를 파악함'을 제외한 모든 항목에서 p값이 0.05보다 크게 나왔으므로, 1항목을 제외한 모든 항목에서 동질집단이라고 볼 수 있다. 사후검사에서는 실험집단과 비교집단의 검사지를 t-검증한 결과, 다음 쪽의 <표 9>와 같이 11항목에 대하여 유의한 차이를 나타내었다.

<표 9> 사후 수학적 행동 특성 검사 t-검증 결과 (유의수준: 95%)

구 분		평균 비교집단	평균 실험집단	p-value
정의적인 태도와 성향	자기 적성	4.0	5.4	0.0315
	흥미, 애착	3.1	5.0	0.0171
	탐구심(남이 가르쳐 주는 것보다는 직접 하는 탐구)	3.6	5.3	0.0174
	발견한 수학적 사실을 수학이나 다른 교과 및 일상 의 경험에 적용/응용해 보려는 마음	3.6	5.1	0.0394
	자기가 확신하는 것에 대한 신념과 고집	3.4	5.4	0.0071
	일반적인 해를 찾으려는 경향	3.8	5.3	0.0446
인지적인 사고기능	수학적 과제에 대한 집중력	3.2	4.5	0.0446
	수학적 직관과 통찰력	4.7	6.3	0.0393
	사고과정의 유연성(사고의 전환 능력)	3.0	4.7	0.0184
	타 교과 및 일상생활에 대한 응용/적용력	3.5	5.1	0.0123
계속 수학을 공부하고 싶은 마음		3.1	5.5	0.0023

실험 집단은 비교 집단보다 11가지 항목에서 유의한 차이를 나타냈다. 실험집단의 반응이 실험 전에 비하여 높아지진 않았으나, 비교집단의 경우 전반적으로 정의적인 태도와 성향면에서 사전 검사에 비하여 떨어져 실험집단과 유의한 차이가 났다. 실제 비교집단의 사전과 사후를 t-검증한 결과, '흥미'와 '계속 수학을 공부하고 싶은 마음'에서 p값이 0.0049, 0.0364로 사전 검사에 비하여

떨어진 것으로 판명되었다.

그에 반해 실험 집단 학생들에게 교구를 이용한 수업은 수학 학습에서의 자신의 구체적 환경과 수학의 추상적 수준 사이의 틈새를 연결하는 경험을 통하여 수학에 대해 정의적인 태도와 성향이 사전 검사에서와 같이 유지되도록 하는데 긍정적인 영향을 주었다고 생각한다. 특히, 정다면체에 대하여 언어적, 시각적, 기호적 표현의 개선을 목적으로 공통성을 탐구하고, 다른 다면체와의 차이점을 알아보고, 다양한 전개도를 체험해 보는 등의 여러 활동을 총 6차시에 걸쳐 실시한 것은 탐구심, 일반적인 해를 찾으려는 경향, 집중력, 직관과 통찰력 등에 긍정적인 영향을 주었을 것으로 예상된다.

여기서 비교집단과 실험집단의 차이가 가장 큰 것은 '수학을 계속 공부하고 싶은 마음'인데, 이는 앞으로의 수학 학습에 영향을 끼칠 수 있는 요소이므로 교구의 적절한 활용은 수학 학습 의욕을 고취하는데 있어 긍정적인 영향을 줄 수 있을 것으로 기대된다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학교 1학년 학생을 대상으로 정다면체를 주제로 교구를 활용한 수업을 개발하고, 이 같은 수업이 학생들의 수학적 표현과 수학적 행동 특성에 미치는 영향을 분석하여 그 변화를 알아봄으로써, 교구의 필요성에 대한 시사점을 찾고자 하였다. 본 연구의 목적을 위하여 교구를 활용한 수업을 실행하고 학생들의 언어적, 시각적, 기호적 표현과 관련하여 어떠한 변화가 있는지, 수학적 행동 특성에 어떠한 영향을 미치는지에 대하여 연구하였다.

연구를 실행한 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있다.

첫째, 정다면체의 언어적 표현이 엄밀해지고 전개도의 정확한 표현을 하는데 교구가 중요한 역할을 하였다.

둘째, 교구를 활용한 수업은 학생들의 언어적 표현 수준을 정다면체의 정의와 같이 보다 엄밀한 수준의 표현으로 변화시켰다. 예를 들어, 1차시에서는 0~2수준이 60%였으나, 3차시에서는 6~7수준이 65%였다.

셋째, 교구를 활용한 수업은 학생들의 전개도에 대한 시각적 표현을 개선시켰다.

정팔면체에 대한 여러 전개도를 직접 만들어 체험해 보고, 토의를 통하여 전개도를 그릴 때 유의하여 할 점 등을 아래와 같이 알아냈으며, 이것은 정팔면체에 대한 전개도뿐만 아니라 다른 정다면체에 대한 전개도를 그리는데도 도움을 주어 개선의 효과를 주었다.

· 면이 8개여야 한다.
· 면이 모두 정삼각형이어야 한다.
· 한 꼭짓점에 모이는 면의 수가 4개를 초과하면 안 된다.
· 한 꼭짓점에 모이는 면의 각이 360°이면 안 된다.

또, 교구(폴리드론)를 체험한 것은, 정다면체에 대한 다양한 전개도를 반응을 이끌어냈다.

넷째, 학생들은 기호적 표현을 창안하는데 익숙하지 않았고, 더욱이 3차원 도형인 정다면체에 대하여 기호적 표현을 만드는 것은 어려워하였다. 다만, 1차시에서는 대상에 대하여 비슷한 형태의 이름을 붙이거나 면, 모서리, 꼭짓점의 개수만큼 알파벳을 쓰는 등의 암시적 기호(Harel과 Kaput, 1994)에 불과했으나, 5차시에서 정다면체 전체에 관하여 기호를 만들 때에 정다면체의 공통적인 특성을 기호에 부여하려고 하였다.

다섯째, 수학적 행동 특성 검사지를 같은 학교 학년에 재학 중인 비교집단을 선정하여 사전과 사후에 실시하고, s-plus 통계프로그램을 이용하여 t-검증한 결과, 사전에 동질 집단이었던 두 집단은 사후에 자기 적성, 흥미, 애착, 탐구심, 계속 수학을 공부하고 싶은 마음 등 11가지 항목에서 유의한 차이를 나타내었다. 이는 실험 집단 학생들에게 교구를 이용한 수업은 수학 학습에서의 자신의 구체적 환경과 수학의 추상적 수준 사이의 틈새를 연결하는 경험을 통하여 수학에 대해 성향이 유지되도록 하는데 긍정적인 영향을 주었다고 판단된다. 특히, '수학을 계속 공부하고 싶은 마음'은 가장 큰 차이를 보였으며, 교구의 적절한 활용은 수학 학습 의욕을 고취하는데 있어 긍정적인 영향을 줄 수 있을 것이다.

지금까지 교구의 활용과 관련된 연구는 수학적 성향의 긍정적인 영향에 대한 연구에 치중되어 있었다. 본 연구에서는 이외에도 수학적 표현의 변화에 초점을 맞추어 교구를 활용한 수업을 설계하고 실행하여 그 결과를 분석하였다.

이와 같은 연구 결과를 바탕으로 몇 가지를 제언하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 아직 정다면체를 배우지 않은 20명의 중학교 1학년 학생들을 대상으로 정다면체를 주제로 연구하였다. 그러므로 이미 정다면체를 배운 학생을 대상으로 특별 활동교육이나 재량 활동시간 등에서 실시할 경우, 쌍대다면체나 아르키메데스 다면체 등을 실시해 보는 것도 의미가 있을 것이다.

둘째, 학생들은 언어적 표현이나 기호적 표현과 같은 다양한 경험과 경로를 통해 학습자 스스로 표현을 산출해 볼 수 있는 기회를 많이 제공하는 것이 필요하다.

셋째, 본 연구에서 실행한 교구 외에도 다양한 교구를 활용하여 실제 수학적 능력에 도움을 줄 수 있는 방향으로 수업을 개발하는 것이 필요하다.

참 고 문 헌

강문봉 (1993). Lakatos의 수리철학의 교육적 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문

강행고 · 이화영 · 박성기 · 박진석 · 이용완 · 한경연 · 이준홍 · 이혜련 · 송미현 · 박정숙 (2001). 중학교 수학 7-나, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

교육부 (1998). 수학과 교육과정, 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 (2006a). 초등학교 교사용 지도서 수학 5-가, 서울: 대한교과서 주식회사.

교육부 2006b). 초등학교 교사용 지도서 수학 5-가, 서울: 대한교과서 주식회사.

고은성 · 이경화 · 송상헌 (2008). 수학영재 학생들의 정다면체 정의 구성 활동 분석, 영재교육연구 18(1), pp.53-77.

금종해 · 이만근 · 이미라 · 김영주 (2004). 중학교 수학 7-나 교사용지도서, p.155. 서울: (주)고려 출판.

김남희(1999a). 수학의 기본 구조 지도와 딘지블럭. 대한수학교육학회지 <학교수학> 1(1), pp.305-324

_____ (1999b). 학교수학 학습에서의 퀴즈네어 막대 활용. 대한수학교육학회지 <학교수학> 1(2), pp.699-721

_____ (2000a). 교구이용에 대한 교수학적 논의, 대한수학교육학회지 <학교수학> 2(1), pp.29-51

_____ (2000b). 대수타일을 이용한 수학학습, 대한수학교육학회지 <학교수학> 2(1), pp.259-281

_____ (2000c). 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화, 대한수학교육학회지 <학교수학> 2(2), pp.563-587

_____ (2001). 기하판을 활용한 학교수학의 지도 ,대한수학교육학회지 <학교수학> 3(1), pp.155-184

김덕봉 (2003). 구체적 조작활동을 통한 기하-교수학습에 관한 연구, 연세대학교 대학원 석사학위 논문

김선영 (2005). 다양한 표현 활동이 수학적 능력과 수학적 성향에 미치는 영향, 대구교육대학교 대학원 석사학위논문

김수미 (2002). 수학교육에서의 조작교구에 관한 연구, 대한수학교육학회지 <학교수학> 2(2), pp.459-474

_____ (2003). 공간 능력 연구를 위한 몇 가지 제안, 인천교육대학교 「과학교육논총」 15, pp.101-118

김영국 (2008). 수학적 표현의 교수학적 의의, 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육> 47(2), pp.155-168

김은숙 (2002) 도형판을 이용하여 여러 가지 모양 만들어 보기, 한국수학교육연구회지 <초등수학교육> 11, pp.81-87

김응태 · 박한식 · 우정호 (1984). 수학교육학개론, 서울: 서울대학교 출판부

남승인 (2003). 초등학교 수학학습에서 교구활용에 관한 연구, 대구교육대학교 논문집 38, pp.109-134

남승인 · 권민성 (2007). 수학 이해력 증진을 위한 교구 활용 방안에 관한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육> 10(2), pp. 125-139

문광호 · 우정호 (1999). 중 · 고등학교 수학의 시각화, 대한수학교육학회지 <학교수학>, 1(1), pp.135-156

박경자 (2002). 조작적 교구를 활용한 게임 학습이 수학적 능력에 미치는 효과, 단국대학교 대학원 박사학위논문

박규홍 · 한옥동 · 김성국 · 임창우 · 고성군 · 김유태 · 육상국 · 박재용 (2001). 중학교 7-나 교과서, 서울: (주)두레교육.

박두일 · 신동선 · 강영환 · 윤재성 · 김인종 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: (주)교학사.

_____ (2004). 중학교 수학 7-나 교사용지도서, 서울: (주)교학사.

박윤범 · 박혜숙 · 권혁천 · 육인선 (2001). 중학교 수학 7-

나 교과서, 서울: (주)대한교과서.

배종수 · 박종률 · 윤행원 · 유종광 · 김문환 · 민기열 · 박동익 · 우현철 (2001). 중학교 7-나 교과서, 서울: (주)한성교육연구소

송상헌 (1998). 수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문

신항균 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: 형설출판사.

심상길 (2003). 초등학교 기하에서 교수매체를 활용한 조작 활동 과정에 대한 분석, 단국대학교 대학원 박사학위 논문

우정호(2000). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부

이영하 · 허민 · 박영훈 · 여태경 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 경기: (주)교문사.

이준열 · 장훈 · 최부림 · 남호영 · 이상은 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: (주)도서출판 디딤돌.

장혜원 (1997). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구-표상 모델 개발을 중심으로-, 서울대학교 대학원 박사학위 논문

전평국 · 신동윤 · 방승진 · 황현모 · 정석규 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: 교학연구사

전평국 · 정부용 (2003). 공간시각화 과정에서의 교구의 역할, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 15, pp.87-92

조영미 (2001). 학교수학에 제시된 정의에 관한 연구, 서울대학교 대학원 박사학위 논문

조태근 · 임성모 · 정상권 · 이재학 · 이성재 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: (주)금성출판사.

채희진 (1998). 기하영역에서의 수학 외적 연결성에 관한 연구, 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문

최용준 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: (주)천재교육.

최남광 (2008). 중등수학영재아들이 공간기하과제 해결과정에서 보여주는 정당화 유형과 수학적 표현에 관한 연구, 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문

최은희 (2005). 메타인지 전략을 활용한 수업이 초등학생의 수학적 추론과 표현에 미치는 효과에 관한 연구, 이화여자대학교 석사학위 논문

최창우 · 손숙현 (2002). 수학교구를 활용한 클럽 활동이 학생들의 수학적 성향 및 도형 학습 능력에 미치는 영향, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집> 14, pp.163-176

황석근 · 이재돈 (2001). 중학교 수학 7-나 교과서, 서울: 한서출판사.

Dienes, Z. P. (1960). *Building up mathematics*, Hutchinson Educational

Fennema, E. (1973). Manipulatives in the classroom. *Arithematic Teacher* 20(May), pp.350-352

Harel, G., & Kaput, J. (1994). The Role of Conceptual Entities and Their Symbols in Building Advanced Mathematical concepts. In David Tall(Ed.), *Adavanced mathematical Thinking*, pp.82-94, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lesh, R. et.al (1987). Experts from the conference, In janvier C.(Ed.), *Problems of representation in Teaching and Learning of Mathematics*, Lawrence Erlbaum Associates, publishers

Nakahara, T. (1994). Study of the Representational system in Mathematics Eduction, *Hiroshima journal of Mathematics Education* 2, pp59-67

NCTM (2000). Principles and Standard for School Mathematics, 류희찬 · 조완영 · 이경화 · 나귀수 · 김남균 · 방정숙(역).학교수학을 위한 원리와 규준, 경문사

Piaget, J., & Beth, E. W. (1966). Mathematical Epistemlogy and Psychology, D.Reidel Publishing Company

Cromwell, P. (1997). Polyhedra, Cambridge University Press

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2004). Understnading Primes: The role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), pp.164-186

Skemp, R. R. (1987). The Psychology of Learning Mathematics, 황우형 (역). 수학 학습 심리학, 서울: 사이언스북스 (영어 원작은 1971년 출판)

Suydam, M. N. (1982). Using manipulative materials to learn mathematics ERIC/SMEAC Mathematics Education Fact Sheet Number 2

_________ (1986). Manipulative materials and achievement, *Arithemetic Teacher*(Feb), pp,10, 32

Tsamir, P., & Drefus. T. (2002) Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben, *Journal of Mathematical Behavior*, 21. pp.1-23

Van Dormolen, J., & Zaslavsky, O. (2003). The many facts of a definition: The case of periodicity. *Journal of Mathematical Behavior*, 22. pp.99-10

The change of mathematical representations and behavioral characteristics in the class using manipulative materials
- Focused on teaching regular polytopes -

Choi, Jeong Seon
Graduate school, Seowon Univercity, Cheongju, Korea
E-mail: 99531040@hanmail.net

Park, Hye Sook
Department of Mathematics Education, Seowon University, Cheongju, Korea
E-mail: hyespark@seowon.ac.kr

In this study, we developed the teaching methods using manipulative materials to teach regular polytopes, and applied these to first-year student of middle school who is attending the extra math class. In that class, we focused on the change of the mathematical representations —especially verval, visual and symbolic representations— and mathematical behavioral. By analyzing characterstics the students' work sheets, we obtained affirmative results as follows.

First, manipulative materials played an important role on drawing a development figure of regular polyhtopes describing the verval representation definition of regular polytopes.

Second, classes utilizing manipulative materials changed students verbalism level of representations the definition of regular polytopes. For example, in the first class about 60% of students are in the 0~2 vervalism level, but in the third class, about 65% of students are in the 6~7 level.

Third, classes utilizing manipulative materials improved visual representation about development figure. After experiences making several development figures about regular octahedron directly, and discussion, students found out key points to be considered for draws development figure and this helped to draw development figures about other regular polytopes.

Fourth, students were unaccustomed to make symbolic representations of regular polytopes. But, they obtained same improvement in symbolic representations, so in fifth the class some students try to make symbol about something in common of whole regular polytopes.

Fifth, after the classes, we have significant differences in the students, especially behavioral characteristics in 11 items such as mind that want to study own fitness, interest, attachment, spirit of inquiry, continuously mathematics posthumously. This means that classes using manipulative materials. Specially, 'mind that want to study mathematics continuously' showed the biggest difference, and it may give positive influence to inculcates mathematics studying volition while suitable practical use of manipulative materials.

To conclude, classes using manipulative materials may help students enhance the verbal, visual representation, and gestates symbol representation. Also, the class using manipulative materials may give positive influence in some part of mathematical behavioral characteristic. Therefore, if we use manipulative materials properly in the class, we have more positive effects on the students cognitive perspect and behavioral cteristics.

* ZDM Classification : D43

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D40

* Key Words : manipulative materials, mathematical representation, mathematical behavioral characteristics, regular polytopes

<부록 1> 수학적 행동특성 검사도구의 하위영역

구 분				문항 번호
정의적인 태도와 성향	적성	수학적 적성	자기 적성	1
			소질(잘한다기보다는 특별함)	25
			타고난 소질과 적성	34
	태도	수학적 흥미와 호기심, 애착	흥미, 애착	2
			호기심(대답보다는 질문)	3
			탐구심(남이 가르쳐 주는 것보다는 직접하는 탐구)	26
			발견한 수학적 사실을 수학이나 다른 교과 및 일상의 경험에 적용/응용해 보려는 마음	27
		도전적인 자신감	수학에 대한 자신감	4
			수학적 의사소통에 대한 자신감	5
			도전감(점수보다는 어렵고 복잡한 것에 대한 도전)	28
			자기가 확신하는 것에 대한 신념과 고집	24
	성향	열린 마음과 민감성	개방성	18
			민감성	19
		과제집착성	수학적 과제에 대한 끈질긴 집착성	20
			애매모호함에 대한 참을성	21
		보다 우아한 해법을 찾으려는 경향성	보다 나은 다른 풀이 방법에 대한 모색	22
			일반적인 해를 찾으려는 경향	23
인지적인 사고 기능	일반 정신 능력	기억력과 집중력	수학적 기억력	6
			수학적 과제에 대한 집중력	7
		의사소통 능력	언어적 표현력	10
			수학적 언어(용어, 기호, 수식 등의 문장)사용능력	11
	계산력	계산력	수리 계산의 속도	8
			수리 계산의 정확도	9
	창의력	전체적인 관계를 파악하는 통찰력	전체와 핵심 관계를 파악함	12
			수학적 직관과 통찰력	13
			갖가지 문제 풀이 전략과 그것의 적절한 사용	29
		창의력	사고과정의 유연성(사고의 전환능력)	14
			풀이 방법의 독창력	15
			추측과 상상력	30
			창조력(푸는데 그치지 않고 직접 만들어 냄)	31
	반성 능력	적용, 비판, 일반화하는 등의 반성 능력	타 교과 및 일상생활에 대한 응용/적용력	16
			오류에 대한 비판 능력	17
			일반적인 풀이를 찾고 일반화시키는 능력	32
			메타인지적 반성 능력	33
기타		계속 수학을 공부하고 싶은 마음		35

<부록 2>

수학적 행동특성 검사지

(　　　　　)중학교 (　　)학년 (　　)반 (　　)번 이름:(　　　　　　　　) (남, 여)

이 검사지는 여러분의 수학에 대한 생각, 태도, 지적, 정의적, 창의적 특성 등을 알아보기 위한 것으로, 각 문항에 대한 정답은 없습니다. 또 누가 얼마나 잘하고 못하는 지를 재지도 않습니다. 그러므로 같은 물음이라도 여러분의 각자의 생각, 태도, 습관에 따라 저마다 다르게 대답할 수 있습니다.

이 검사의 가장 중요한 점은 각 물음에 잘 읽고 여러분 자신의 생각이나 습관들을 나타내는 것입니다. 다음의 기준과 내용을 읽고, 자기에게 적합하다고 생각되는 번호에 하나만 O표시를 해 주십시오.

본 검사자료는 본 연구결과에만 자료로 사용될 것을 약속드리며, 여러분의 성의 있는 대답을 기대합니다.

- 각 질문에 대한 기준 -

전혀, 결코 그렇지 않다.		그렇지 않은 편이다		그저 그렇거나 보통이다		대체로 그런 편이다			항상, 매우 그렇다
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

* 극단적인 점수(0 또는 0)에 표시하셔도 무방합니다. 생각하는 그대도 표기하여 주십시오.

	전혀, 결코 그렇지 않다.		그렇지 않은 편이다		그저 그렇거나 보통이다		대체로 그런 편이다			항상, 매우 그렇다
1. 나는 수학에 소질이 있다고 생각한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2. 나는 수학 문제를 잘 푸는 정도가 아니라 수학에 대한 강한 흥미와 애착이 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3. 나는 수학과 관련한 다른 사람의 질문에 대답하는 것보다는 호기심을 가지고 엉뚱하거나 기발한 질문까지도 직접 하는 편이다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4. 나는 수학이라면 자신 있고 처음 보는 문제를 대하더라도 두렵지 않다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5. 수학 문제나 내용에 대한 의견이나 주장을 다른 사람에게 말하는 것이 어렵지 않다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6. 나는 직접 풀어 본 수학 문제를 잘 잊지 않고, 중요한 내용은 거의 정확하게 기억해 낸다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	전혀 결코 그렇지 않다		그렇지 않은 편이다		그저 그렇거나 보통이다		대체로 그런 편이다			항상, 매우 그렇다
7. 나는 수학 문제를 푸는 동안에는 대단히 집중하는 편이라서 다른 사람이 부르는 소리를 듣지 못하는 경우도 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
8. 나의 계산 속도는 빠르다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9. 나의 계산 결과는 정확하다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10. 나는 내가 풀어 놓은 문제에 대해 설명을 하거나 선생님의 질문에 대답을 할 때 내 친구들도 알아들을 수 있도록 잘 말할 수 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
11. 나는 내가 표현하고자 하는 수학적인 아이디어를 적절한 수학적 용어와 기호를 사용하여 깔끔하고 정확하게 나타낼 수 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
12. 나는 수학 문제나 내용의 사소한 부분에 얽매이지 않고 무엇이 중요한 핵심 내용인지와 전체적인 관계를 잘 파악할 줄 안다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
13. 어려운 수학 분제를 풀다가도 오랫동안 고민하고 나서는 갑자기 어떤 기발한 생각이 떠올라서 좋아하는 경우가 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14. 나는 어떤 문제에 대해 이미 익숙하고 자신 있는 풀이법을 알도 있다 하더라도 전혀 다른 방법으로 다시 풀어보라고 하면 이전의 풀이법에 매이지 않고 쉽게 생각을 바꿀 수 있는 유연성이 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
15. 나의 수학 문제 풀이 방법은 내 또래의 친구들보다 독특하고 색다르며 좋다고 생각한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
16. 나는 내가 알고 있는 수학적 원리나 내용을 다른 교과나 일상생활에 잘 적용시키고 관련시킬 줄 안다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
17. 나는 교과서나 참고서에 나와 있는 내용이나 풀이법을 보면서 틀린 곳이나 고쳐야 할 부분이 있다고 지적해 내기도 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
18. 나는 이미 잘 알고 있는 내용을 다시 공부하는 것보다는 전혀 모르는 새로운 내용에 대해서도 경험해 보려는 열린 마음이 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
19. 나는 주변의 수학적 상황에 대해 민감한 관심을 보이고 이를 통해 새로운 사실을 알아내려고 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
20. 내가 이해하지 못하는 수학 문제에 대해서는 다른 사람에게 묻거나 책을 보고서라도 반드시 해결해내고야 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
21. 예측하는 수학 문제의 결과가 모호할 때는 어설픈 답을 내리기 전에 보다 기발하고 완벽한 답을 얻을 때까지 더 기다리며 참을 수 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
22. 나는 같은 종류의 수학 문제를 풀 때도 똑같은 방법으로만 풀지 않고 더 좋은 다른 방법을 찾아보려고 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	전혀, 결코 그렇지 않다.		그렇지 않은 편이다		그저 그렇거나 보통이다		대체로 그런 편이다			항상, 매우 그렇다
23. 나는 수학 문제를 풀 때 요구하는 바로 그 구체적인 한 가지 답보다는 주로 일반적인 해법을 생각해보려고 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24. 나는 내가 발견한 새로운 수학적 아이디어나 결과가 옳다고 확실할 때는 다른 사람들의 반론에 대해 끝까지 토론해서 결국은 이겨낼 수 있다는 고집과 소신이 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25. 나는 수학을 좀 잘한다기 보다는 내 또래들과는 다른 독특하거나 특별한 소질이 있는 것 같다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
26. 남이 가르쳐 주는 것을 잘 배워서 기억하고 활용하는 것보다는 내 스스로 추리하고 탐구하는 것을 좋아하는 편이다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27. 나는 내가 발견해 낸 수학적 사실을 수학이나 다른 교과 또는 일상의 경험에 적용/응용해 보려고 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28. 나는 쉬운 문제를 빨리 풀어서 학교 점수를 잘 받는 것보다는 복잡하게 꼬인 어려운 문제에 도전하는 것을 더 좋아하는 편이다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
29. 나는 주어진 문제 상황을 해결하는 데 필요한 갖가지 문제 풀이 전략들을 많이 알고 있으며 그것을 적절히 사용할 줄 안다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
30. 나는 수학적인 가설을 세우거나 수학적인 내용을 추측해 보는 등과 같이 상상을 많이 하는 편이다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
31. 나는 내게 주어진 수학 문제를 잘 푸는 데서 그치지 않고 문제의 조건이나 상황을 바꾸어서 내가 직접 문제를 만들어 내는 경우도 있다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
32. 주어진 문제에 대한 간단하고 직접적인 답보다는 일반화된 공식이나 원리를 찾아내고 만들어 내기도 한다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
33. 나는 문제를 풀 때 내가 생각하고 있는 것을 전체적으로 다시 돌아보기도 하면서 틀린 것은 고치고 발전시켜 나가는 편이다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
34. 나에게는 본래 타고난 수학적 소질이나 적성이 있는 것 같다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
35. 나는 어른이 되어서도 특별히 수학을 계속 공부하고 싶다.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

36. 수학에 대한 여러분의 생각, 느낌 태도에 대해 묻고자 합니다. 당신은 왜 수학을 공부하고 있으며 또 수학은 어떤 가치가 있다고 생각합니까?

-모든 질문이 끝났습니다. 수고하셨습니다.-