韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2009. 08. 제 48권, 제 3호, 235-263.

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
August. 2009, Vol. 48, No. 3, 235-263.

분수의 하위개념 이해가 문제해결에 미치는 영향

김 경 미 (고려대학교 교과교육연구소)
황 우 형 (고려대학교)†

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 필요성 및 목적

분수는 초등 수학에 있어 가장 중요한 영역인 동시에 가장 어려운 영역으로 오래 전부터 많은 학자들에게 논의의 대상이 되어 왔다. 초기 분수 학습에 관한 연구의 초점은 기본적인 분수 개념의 발달이었다(Behr et al., 1984; Freudenthal, 1983; Kieren, 1988; Mack, 1990). Kieren (1976)은 처음으로 분수의 개념이 단일 구조가 아니라 몇 가지 상호 관련된 하위개념들로 구성되어 있음을 주장하였고, 이후 1980년대 초반에 Behr et al. (1983)는 Kieren의 개념화를 기반으로 분수의 다섯 가지 하위개념인 부분-전체, 비, 연산자, 몫, 측도를 분수의 연산과 동치 분수, 문제 해결에 연결하는 이론적 모델을 제안하였다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006 재인용). 이 모델은 지금까지 많은 연구에서 인용되고 있으며, RNP(Rational Number Project)의 수학 교육과정 개발에도 사용되었다(Cramer et al., 2002).

지난 10년 간 분수에 관한 연구들을 살펴보면, 크게 분수의 개념에 대한 아동의 이해에 관한 연구(Amato, 2005; Clarke & Sukenik, 2006; Johanning, 2008; Mack, 1990; Moseley, 2005; Pearn & Stephens, 2007; Toluk & Middleton, 2004; Yanik et al., 2008)와 분수 연산 및 문제해결 상황에서 아동의 비형식적 전략 및 오개념에 관한 연구(Charles & Nason, 2001; Empson et al., 2005; Horne & Mitchell, 2008; Lamon, 2001, 2002; Mack, 2001; Steffe, 2003, 2004), 분수의 학습 개선을 위해 개발된 교육과정 및 프로그램의 효과에 관한 연구(Cramer et al., 2002; Gearhart et al., 1999; Izsák et al., 2008; Keijzer & Terwel, 2002; Saxe & Gearhart, 1999), 분수의 개념과 연산에 대한 교사 또는 예비교사의 이해 및 분수의 교수-학습에 관한 연구(Amato, 2006; Behr et al., 1997; Moss & Case, 1999; Tzur, 1999) 등으로 구분할 수 있다. 본 논문에서는 Behr et al. (1983)이 제시한 이론적 모델을 기반으로 분수의 개념에 대한 아동의 이해에 초점을 두어 논의하고자 한다.

분수의 개념에 대한 아동의 이해에 관한 최근 연구들을 자세히 살펴보면, Johanning (2008)은 분수에 대한 아동의 이해를 조사하기 위하여 넓이와 둘레, 소수 연산, 비율과 비례와 같이 다른 문맥에서 아동이 분수를 어떻게 사용하는지 알아보았다. 분수를 어떻게 사용하는지에 대한 아동의 이해는 분수를 사용할 수 있는 상황에 대한 이해와 관련이 있기 때문이다.

Yanik et al. (2008)은 중학교 학생들을 대상으로 분수의 측정 개념의 이해와 관련하여 학생들이 수직선에서 "단위"를 이해함에 있어 어떤 어려움을 갖는지 조사하였다. 연구 결과 많은 학생들이 분수를 수직선 위의 측도로서 이해하는데 어려움을 가졌고, 단위, 단위화, 길이 단위의 반복과 같은 측정에서 중요한 개념을 정확하게 이해하고 있지 않았다. 특히, 많은 학생들이 수직선에 분수를 정확히 표시하지 못하였다. 예를 들어, 학생들은 0에서 5까지 표시되어 있는 수직선에 3/4을 표시할 때, 수직선을 네 개의 같은 조각으로 분할하여 0에서 오른쪽

* 접수일(2009년 4월 29일), 수정일(1차 : 2009년 7월 5일), 게재확정일(2009년 8월 6일)
* ZDM분류 : C32
* MSC2000분류 : 97C30
* 주제어 : 분수, 분수의 하위개념, 문제해결
* 고려대학교 사범대학 특별연구비에 의하여 수행되었음
† 교신저자임

으로 세 번째에 있는 점에 3/4을 표시하였다[1](Yanik et al., 2008). Stephan과 Clements (2003)는 분수의 측도 개념에 대한 지도가 단위, 단위화, 단위 반복, 분할, 추이성(Transitivity), 불변성(conseravtion)과 같이 측정의 기초 개념보다는 어떻게 측정하는지와 같은 측정 활동의 절차에 주로 초점을 두고 있는 학교 수업을 지적하였다.

Toluk와 Middleton (2004)은 4명의 아동을 대상으로 유리수의 몫의 의미에 대한 아동의 개념적 발달을 알아보았다. 아동은 다양한 분할 상황을 통해 범자연수의 나눗셈 개념과 부분-전체 관계로서의 분수 개념 사이의 연결을 형성함으로써 분수를 나눗셈의 몫으로서 이해할 수 있었다. Mack (1990)의 연구에 의하면, 아동의 비형식적 지식인 분할(Partition)에 기초하여 유리수의 개념을 발달시키면, 유리수의 다른 하위개념들이 좀 더 쉽게 발달될 수 있다고 하였다.

Saxe et al. (2005)은 초등학교 4, 5, 6학년 384명을 대상으로 등분할 문제와 비등분할 문제에 대한 아동들의 표기와 부분-전체 관계에 대한 지식을 조사하고, 형식적 표기와 부분-전체 관계에 대한 지식의 관계를 연구하였다. 연구 결과 아동들의 형식적 표기와 부분-전체 관계에 대한 지식은 다소 독립적으로 발달하는 것으로 확인되었다. 비 형식적인 표기를 사용한 아동이 부분-전체 관계를 형성하기도 하고, 반대로 형식적인 표기를 사용한 아동이 부분-전체 관계를 형성하지 못하기도 하였다. 이 연구는 분수의 의미보다는 분수의 표기를 가르치는 것이 분수 개념의 이해 발달에 도움이 되지 않는다는 사실을 알려주었다. Saxe et al. (2005)은 비형식적인 표상이 분수에 대한 어떤 세련된 직관을 나타내는 것일 수도 있음을 지적하였다. 즉, 올바른 표기로 인하여 분수에 대한 아동의 불완전한 이해가 감추어질 수 있다는 것이다.

분수 개념을 도입함에 있어, 분수를 부분-전체의 개념으로 도입해야 한다는 의견(English & Harlford, 1995)과 분수를 부분-전체 개념으로만 도입하면 분수의 다른 하위개념의 이해와 분수의 연산에 방해가 된다는 의견(Kerslake, 1986)은 분수 영역에서 계속되어 온 논쟁거리 중의 하나이다(Amato, 2005). 최근 Moseley (2005)는 분수를 부분-전체의 관계에 기초한 교육과정과 비, 연산자와 같이 분수의 다양한 측면을 강조한 교육과정에서 아동의 분수 표상의 초기 개념의 변화를 조사하였다. 연구 결과 부분-전체의 관계로서 분수를 학습한 아동들보다 분수를 다양한 측면에서 학습한 아동들에게 분수에 대한 유용한 표상 지식과 유의미한 내적 연결이 발견되었다. Moseley (2005)는 학생들이 분수를 어려워하는 이유 중의 하나로 교육과정에서 분수의 제한된 측면만을 이해하게 하는 경향이 있다는 것을 지적하면서, 분수의 다양한 측면에 대한 이해를 높이는 것이 필요하다고 주장하였다.

분수의 개념에 대한 아동의 이해에 관한 최근 연구는 외관적으로는 수직선을 사용한 분수의 개념 이해에 관한 연구가 많이 보고되었고(Izsák et al., 2008; Horne & Mitchell, 2008; Pearn & Stephens, 2007; Yanik et al., 2008), 분수의 각 하위개념에 초점을 둔 연구가 대부분으로 분수의 하위 개념들에 대한 아동의 이해 구성과 같이 통합적이고 전체적인 관점에서의 연구는 미흡한 실정이다. 최근 Charalambous와 Pitta-Pantazi (2006)는 분수의 하위 개념과 문제 해결 사이의 연결성을 분석하였지만 양적연구로 분수의 하위 개념에 대한 아동의 이해가 문제 해결 과정에 어떤 영향을 주는지에 대한 세밀한 분석은 이루어지지 못하였다. 따라서 분수의 하위 개념에 대한 아동의 이해가 문제 해결 과정에 어떻게 작용하는지에 대한 집중적인 연구가 필요하다.

국내에서도 최근 분수 개념에 대한 아동의 이해 및 비형식적 지식에 관한 연구(권성룡, 2003; 백선수 · 김원경, 2005; 오유경 · 김진호, 2009; 한혜숙, 2009)와 분수 개념과 연산에 대한 교사 또는 예비교사의 지식과 이해에 관한 연구(박교식 · 송상헌 · 임재훈, 2004; 방정숙 · Li, 2008; 오영열, 2004), 분수 개념의 의미 고찰 및 지도방안에 관한 연구(강흥규 · 고정화, 2003; 임재훈 · 김수미 · 박교식, 2005; 정은실, 2006; 서동엽, 2005) 등 분수에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그러나 국외의 방대한 이론 연구와 실험 연구에 비하면 아직 초보적인 단계라 할 수 있다. 또한 국내의 분수 연구에서 분수 개념에 대한 아동의 이해에 관한 실험 연구가 매우 극소수이므로, 분수에 대한 아동의 개념 구성과 관련된 다양한 연구가 진행될 필요가 있다.

1) 본 논문에서는 분수 $\frac{n}{m}$ 의 표기를 편의상 n/m 형태로 표현한다.

따라서 본 연구에서는 아동이 분수를 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사하고, 그것이 분수의 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보고자 한다. 분수에 대한 아동의 이해를 조사하고, 그것이 분수의 하위개념에 관한 문제 해결과 분수의 사칙연산, 동치 문제의 해결에 어떤 영향을 주는지 알아볼 것이다. 본 연구는 Behr et al. (1983)이 제시한 이론 모델을 기반으로 분수에 대한 아동의 개념 구성을 좀 더 전체적인 관점으로 고찰한다는 점에서 중요성을 갖는다. 또한 본 연구는 분수의 개념 이해에 관한 기존 선행 연구들에 비하여 분수를 다양한 하위개념으로 이해하고 있는 아동들의 사고 과정을 사례연구를 통하여 자세히 살펴보고, 분수의 하위개념에 대한 아동의 이해와 분수의 하위개념에 관한 문제, 동치 분수, 분수의 사칙연산 등 다양한 분수의 문제 해결과의 연결성을 조사한 점에서 선행 연구들과 차별성을 갖는다.

2. 연구 문제

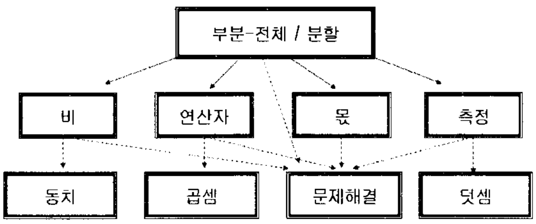
아동이 분수를 어떤 의미로 이해하고 있으며, 분수에 대한 아동의 이해가 분수의 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

1. 아동은 분수를 어떻게 이해하고 있는가?
   1-1. 아동은 분수를 어떤 의미로 이해하고 있는가?
2. 분수에 대한 아동의 이해는 분수의 문제해결에 어떤 영향을 주는가?
   2-1. 분수에 대한 아동의 이해는 분수의 하위개념에 관한 문제해결과 분수의 사칙연산, 동치 문제의 해결에 어떤 영향을 주는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 분수의 하위개념의 이론적 모델

1970년대 중반 Kieren (1976)은 분수[2]의 개념이 네 가지의 상호 관련된 하위개념인·비, 연산자, 몫, 측도로 구성되어 있음을 제안하였다. Kieren (1976)의 초기 개념화에 따르면, 분수의 부분-전체의 특성은 네 가지 하위개념에 모두 스며들어 있다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006 재인용). Behr et al. (1983)은 Kieren (1976)의 이론을 확장하여 부분-전체 하위개념을 분할 과정에 연결하였고, 부분-전체 관계가 분수의 다섯 번째 하위개념이 아니라 몫, 측정과 같은 다른 하위개념에 포함되어 있음을 주장하였다. 한 단계 더 나아가 분수에 대한 다른 의미와 분수의 기본 연산, 분수 동치, 문제 해결 사이의 이론적 연결성 모델을 제시하였다.



<그림 1> Behr et al. (1983)가 제시한 이론적 모델

<그림1>은 다음의 5가지 가정을 전제로 한다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

첫째, 분수의 부분-전체 하위개념은 분할 과정과 일치하며, 나머지 네 개의 하위 개념의 이해 발달을 위한 기초이다.

둘째, 비 하위개념은 동치 개념과 동치 분수를 찾는 과정을 진척시키는 가장 자연스러운 통로이다.

셋째, 연산자 하위개념은 분수의 곱셈적 연산(곱셈과 나눗셈)의 이해 발달에 유용하다.

넷째, 측정 하위개념은 분수의 덧셈적 연산(덧셈과 뺄셈) 능력을 발달시키는데 필요한 것이다.

다섯 째, 모든 다섯 가지 하위 개념의 이해는 분수 영역에서 문제 해결을 위한 필수 조건이다.

2. 분수의 하위개념

1) 부분-전체

분수의 부분-전체 하위개념은 연속량이나 이산량이 동일한 크기의 부분으로 분할되는 상황으로 정의한다(Lamon, 2001, 2005; Marshall, 1993). 분수는 분할되어있는 단위에서 부분들의 전체 개수와 분할된 단위의 부분

2) Kieren (1976)은 유리수(Rational Number)라는 용어를 사용했지만 본 논문에서는 분수(Fraction) 용어로 통일하여 나타낸다.

의 개수 사이의 비교를 나타낸다. 이런 관점에서는 분수의 분자는 분모보다 작거나 같아야 한다.

부분-전체와 분할 개념은 분수의 기초 개념으로 부분-전체 개념의 이해는 매우 중요하다. 부분-전체 개념의 올바른 이해를 위해서 측정되어야 할 요소는 다음과 같다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). 아동은 전체를 분할할 때 부분들은 모두 동일한 크기여야 한다는 사실을 이해해야 한다. 또한 연속량이나 이산량을 동일한 부분으로 분할할 수 있어야 하고, 전체가 동일한 크기의 부분들로 분할되었는지 그렇지 않은지를 알 수 있어야 한다. 부분과 전체 사이의 관계에 대한 많은 아이디어도 필요하다. 아동은 부분들을 전체의 구성요소로서 인식해야 하므로 포함이나 내포의 개념도 이해해야 한다. 그렇지 못한 경우에 부분-전체의 관계를 분수로 나타낼 때 어떤 부분은 두 번 세어야 하는 것을 알지 못할 수 있다. 예를 들어, 2/3를 구하는 문제에서 포함의 개념을 아직 정확하게 이해하고 있지 않은 아동은 보통 2/5의 표현을 선택한다. 마지막으로 부분-전체 하위개념의 완전한 이해를 위해서는 아동이 단위화와 재단위화 활동을 계발해야 한다(Amato, 2005; Mack, 2001). 그것은 아동이 부분에 기초하여 전체를 재구성할 수 있게 하고(예를 들어, 3/8이 주어졌을 때 전체를 재구성함), 이미 등분할된 전체를 재분할할 수 있게 한다(예들 들어, 4개로 분할되어 있는 전체를 3/8으로 구성하거나, 8개로 분할되어 있는 전체에서 3/4을 확인함). 아동은 종종 적절한 단위를 정하는 데 있어 어려움을 갖는데(Mack, 1993), 몇몇의 아동들은 단위를 부분으로 나누고 각 부분을 마치 독립된 단위나 자연수처럼 다룬다. 따라서 많은 아동이 분수 문제를 자연수 개수로 분할된 자연수 분할 문제로 다루기도 한다.

2) 비

분수의 비 하위개념은 두 양 사이의 비교 개념으로 수보다는 상대적인 크기로 간주한다(Carraher, 1996). 비의 개념은 종종 비율 개념과 혼동되어 사용되기도 한다. Lammon(2005)은 비율(rate)을 서로 다른 유형의 두 양 사이의 비교로서 정의하였고, 비(ratio)는 같은 유형의 두 양 사이의 비교로서 개념화하였다. 예를 들어, "세 개의 피자를 여자 7명이 똑같이 나누어 갖고, 하나의 피자를 남자 3명이 똑같이 나누어 가진다면, 여자와 남자 중 어느 쪽이 피자를 더 많이 가지겠는가?"라는 문제를 풀 때, 아동이 피자 개수에 대한 사람의 수를 비교한다면 비율 개념을 사용하는 것이고, 남자가 분할한 피자의 개수와 여자가 분할한 피자의 개수를 비교한다면 비 개념을 사용하는 것이다.

Smith III (2002)는 "3/4", "11/7"과 같이 수의 의미가 애매모호할 때는 몫(quotient)의 용어를 사용하였고, 나누어진 양으로 간주하는 경우와 같이 문맥이 명확한 경우에는 분수(fraction)의 용어를 사용하였다. 여기서 나누어진 양(divided quantity)은 분할된 양(partitioned quantity)과 동의어이다. 두 용어 모두 하나의 전체를 같은 크기의 부분으로 나누는 것과 관련된다. 하나의 몫이 두 양 사이의 곱셈적 관계를 나타낼 때(예를 들어, 이것이 다른 것보다 몇 배만큼 큰가? 또는 작은가?), 비(ratio)의 용어를 사용하였다. 예를 들어, "3/4"은 28명으로 구성된 한 학급에서 12명의 남자와 16명의 여자 사이의 관계를 나타낸다. 여기서 곱셈적이란 단어가 중요한데, 왜냐하면 남자와 여자의 관계를 "여자가 4명 더 많다."와 같이 차로서 덧셈적 관점에서 나타낼 수 있기 때문이다. 마지막으로 비의 추론을 나타낼 때 비율(proportion)과 비례(proportionality)의 용어를 사용하였다. 비가 두 양 사이의 곱셈적 관계라면, 비율적 사고는 같은 비를 다른 상황으로 투영하는 것을 내포한다. "3/4=6/8", "$2/3=x/12$"와 같은 등식은 반드시 비례적 추론을 유도하지 않는다. 사람들은 두 식을 보고 동치분수에 대해 생각할 수 있다. 등식은 등식을 쓴 사람이 어떤 생각으로 썼는지를 바로 알려주지 못한다. 따라서 쓴 사람의 설명이 필요하다.

보통 비가 분수의 구성개념으로 받아들여지는 것에 대하여, English와 Halford (1995)는 분수의 부분-전체 개념이 비의 도입에 충분한 근거를 제공하지 못하며, 더욱이 오해를 일으킬 소지를 가지고 있기 때문에 학교 교육과정에서 분수의 구성요소로 비를 포함시키는 것이 부적절하다고 주장하였다.

비 하위개념에 대한 아동의 이해 정도를 알아보기 위해서 측정되어야 할 요소는 다음과 같다. 우선 아동이 비로서 분수의 개념을 완전히 이해하기 위해서는 상대적인 양의 개념을 구성해야 한다(Lamon, 1993; Marshall,

1993). 또한 아동은 두 양 사이의 관련성이 있다는 것이 무엇을 의미하는지를 인식할 필요가 있고, 공변성과 불변성의 성질을 이해해야 한다. 비의 관계에서 두 양은 서로 함께 변하므로, 두 양 사이의 관계는 변하지 않는다. 덧붙여, 아동은 비에서 두 양에 0이 아닌 같은 수를 곱하면 비의 값은 여전히 같다는 것을 이해하고 있어야 한다. 공변성-불변성의 성질은 비에서만 나타나는 것으로 부분-전체와 비를 구별하는데 중요한 요소이다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006). 또한 이 성질은 동치 분수의 개념을 발달시키는데 필요한 것이다(Marshall, 1993). 아동이 동치분수를 구할 수 있다고 해서 반드시 불변성의 성질을 이해하고 있는 것은 아니다(Lammon, 1993). 본 연구에서 사용된 오렌즈 쥬스 문제(부록 3번 문항)는 Noelting(1978)이 처음 고안한 것으로 많은 연구에서 비에 대한 아동의 이해를 측정하는데 사용되고 있다.

3) 연산자

분수가 연산자의 의미를 지닌다고 할 때, 분수는 어떤 수, 대상, 집합에 작용하는 함수로서 간주된다(Behr et al, 1992, 1993, 1997; Marshall, 1993). n/m은 주어진 집합을 모든 원소들에 n/m배하여 다른 집합으로 변형시키는 함수로 간주할 수 있다. 또한 기하학적 도형을 닮은꼴 도형으로 n/m배 변환하는 함수의 관점으로도 생각할 수 있다(English & Halford, 1995). 연산자를 단일 합성함수로 여기기도 하고, 두 개의 곱셈 연산의 조합의 결과 또는 계속해서 작용되는 두 개의 관련 함수로 여기기도 한다. 예를 들어, 3/4은 3을 곱한 결과를 4로 나누거나, 4로 나눈 결과에 3을 곱한 것으로 생각할 수 있다. Lamon (2005)은 연산자를 대상의 개수, 길이, 넓이 등을 늘리거나 줄이는 변환자로 정의하기도 하였다. Behr et al. (1993)은 연산자의 개념을 복사기/분할-축소기(Duplicator/Partition-Reducer : DPR)와 확대/축소기(Stretcher/Shrinker : SS)[3]의 두 가지 측면으로 분석하였다. 예를 들어, 분수 3/4은 DPR 측면에서는 같은 크기인 단위 4개를 단위 3개로 바꾸는 것이고, SS 측면에서는 모든 단위의 크기를 4-단위에서 3-단위로 바꾸는 것이다. 따라서 DPR 측면에서는 단위의 크기는 같지만 집합의 개수는 달라지는 반면, SS 측면에서는 단위의 크기는 감소하지만 집합의 개수는 변함없이 유지된다. <표 1>과 <표2>는 8의 3/4이 작용하는 과정을 DPR과 SS 방법으로 나타낸 것이다(Behr et al., 1993).

아동은 다양한 방식에서 분수의 승수를 이해할 수 있어야 한다. 예들 들어, 3/4은 1/4×[3-단위] 또는 3×[1/4-단위]로 이것은 위에서 살펴본 DPR와 SS의 의미와 연관되어 있다. 또한 아동은 두 개의 곱셈 연산 과정을 단일 분수로 나타낼 수 있어야 하고, 입력값과 출력값의 관계를 알아야 한다. 예를 들어, 3/4 연산자는 4의 입력양을 3으로 변환한다.

4) 몫

분수의 몫 하위개념에서 분수는 나눗셈 상황의 결과로서 이해될 수 있다. 특히 Kieren (1993)은 a는 정수이고, b는 0이 아닌 정수일 때, 방정식 $bx=a$를 만족하는 한 쌍의 정수 $\frac{a}{b}$로서 유리수를 정의하였다. 피자나 팬케잌과 같은 연속량을 사람들에게 균등 분배하는 문제는 아동이 분수의 몫의 개념을 이해하는데 큰 도움을 준다(Marshall, 1993). 부분-전체 하위개념과 다르게 분수의 몫의 성질에서는 두 개의 다른 측도 공간이 고려된다(예

<표 1> 8의 3/4의 DPR 작용 과정

표상	의미
a. (0) (0) (0) (0) (0) (0) (0) (0)	8(1-unit) (1-단위 8개임)
b. (00) (00) (00) (00)	4개의 단위를 3개의 단위로 바꾸기 위해서 8(1-unit)을 4(2-unit)으로 재단위화
c. (0 0) (0 0) (0 0)	4(2-unit)을 3(2-unit)으로 바꾸기
d. (0 0 0 0 0 0)	3(2-unit)을 1(6-unit)으로 재단위화
e. (0) (0) (0) (0) (0) (0)	1(6-unit)을 6(1-unit)으로 단위화

<표 2> 8의 3/4의 SS 작용 과정

표상		의미
a.	(0) (0) (0) (0) (0) (0) (0) (0)	8(1-unit)
b.	(000) (000) (000) (000) (000) (000) (000) (000)	1-단위를 3-단위로 바꾸는 확대기를 적용하여 8(1-unit)을 8(3-unit)으로 확대
c.	(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0) (0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)(0)	8(3-unit)을 24(1-unit)으로 재단위화
d.	$\begin{pmatrix}000000000000\\000000000000\end{pmatrix}$	24(1-unit)을 1(24-unit)으로 재단위화
e.	(0000) (0000) (0000) (0000) (0000) (0000)	1(24-unit)을 6(4-unit)으로 재단위화
f.	(0) (0) (0) (0) (0) (0)	4-단위를 1-단위로 바꾸는 축소기를 적용하여 6(4-unit)을 6(1-unit)으로 축소

를 들어, 세 개의 피자를 네 명의 친구들에게 공평하게 분배하는 경우). 등분할의 개념은 균등 분배를 위한 필요조건이며, 분수의 몫의 성질을 터득하기 위해서는 나눗셈의 결과로 분수를 확인할 수 있어야 하고, 연산에서 제수와 피제수의 역할을 이해해야 한다(Lamon, 2005). 또한, 몫 하위개념을 터득하기 위해서는 포함제와 등분제 상황을 잘 이해하고 있어야 한다(Kieren, 1993; Marshall, 1993). 나눗셈 과정은 일반 분수에서 소수 형태로의 변환을 소개하는 데 도움을 준다.[4]

5) 측도

측도 하위개념에서 분수는 두 가지의 상호 관련되고 상호 의존적인 개념과 연관되어 있다. 첫 번째로 분수를 분수의 양적인 성질을 표현하는 즉, 분수가 얼마나 큰지를 나타내는 수로 생각할 수 있다. 두 번째는 분수를 어떤 구간에 할당된 측도와 연관 지어 생각할 수 있다. 수직선에서 단위 분수가 정의되고, 정해진 출발점으로부터 떨어진 거리를 구하는데 단위 분수가 반복적으로 사용된다(Lamon, 2001, 2005; Marshall, 1993). 예를 들어, 3/4은 주어진 점으로부터 3(1/4 단위)의 거리와 일치한다. 분수의 이 성질은 한 점으로부터 다른 점까지의 거리를 구하기 위해 수직선이나 다른 측정 도구(예: 자)를 사용하는 것과 연관 지어 생각할 수 있다. 또는 1/4의 길이를 가진 하나의 단위를 세 번 반복한 길이를 나타내기도 한다(Lamon, 2005).

측정은 어떤 대상의 속성(예를 들면, 길이, 넓이, 무게, 부피)을 확인하거나, 단위를 선택하거나, 대상의 속성들의 단위를 비교하는 것을 포함한다(Stephan & Clements, 2003; Van de walle, 2006).

아동은 분수가 셀 수 없기 때문에 분수를 수로 받아들이지 못한다. 수로서 분수를 받아들이지 않는 것은 아동으로 하여금 두 개의 다른 범자연수로서 분수를 개념화하도록 이끌며, 종종 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{2}{6}$ 와 같은 계산상의 오류를 범하게 한다. 따라서 분수에 수 개념을 부여하는 것은 수 개념의 재개념화와 분수의 덧셈적 연산 능력을 위한 기초 단계이다(Brousseau et al., 2004; Stafylidou & Vosniadou, 2004).

Lamon (2005)은 측도 개념의 정확한 이해를 위해서는 아동이 유리수의 조밀성의 성질을 이해해야 한다고 제안하였다. 유리수의 조밀성은 두 분수 사이에 무한개의 분수가 있다는 것을 내포한다. 또한, 분수의 측정의 성질을 이해하기 위해서 아동은 원점으로부터 떨어진 어떤 거리를 측정하는데 주어진 단위 구간을 사용할 수 있어야 한다. 이것은 아동이 수직선 위에 숫자를 대응시키거나, 반대로 수직선 위의 점을 수로 나타내는 능력을

3) 이후 복사기/분할-축소기(Duplicator/Partition-Reducer:DPR)와 확대/축소기(Stretcher/Shrinker:SS)는 축약하여 DPR과 SS로 나타내었다.

4) English & Halford (1995)는 소수를 분수의 하위개념으로 구분하여 제시하였지만, 본 논문에서는 소수를 몫 하위개념에 포함시켜 분석하였다.

가져야 하는 것을 의미한다(Smith III, 2002).

수직선은 분수의 측도 개념에 대한 아동의 이해를 평가하거나, 분수의 덧셈적 연산을 지도하는데 있어 적절한 표상 도구로서 인정받아 왔음에도 불구하고(Keijzer & Terwel, 2002), 이전 연구들에서는 아동이 수직선에 수를 배치하는데 있어 어려움을 겪는다고 하였다(Horne & Mitchell, 2008; Mack, 1990; Yanik et al., 2008). 특히, 수직선의 구간보다는 수직선 위의 분할 표시를 셀 때 더욱 어려움을 겪는다고 하였다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006; Yanik et al., 2008). 아동은 특히 수직선이 두 개의 단위 길이를 가지는 경우에 더욱 잘못된 단위를 사용하며, 주어진 분수의 분모가 복합적인 경우 수직선 위에 분수를 표시하는 것을 어려워하였다. 따라서 Smith III (2002)는 분수의 측정의 성질을 충분히 계발하기 위해서는 동치 분수와 분수의 대소비교를 터득하는 것이 필요함을 제안하였다.

측정에서 가장 중요한 요소는 "단위"이다. 단위는 측정되는 것과 측도의 범위 사이의 수적 관계를 결정하는데 사용된다(Van de Walle, 2006). 예를 들어, 어떤 대상의 길이를 측정하기 위해서는 단위가 무엇인지, 측정되는 대상의 길이와 일치하기 위해서는 몇 개의 단위가 필요한지를 확인해야 한다. 그러나 단위를 인식하는 것은 아동들에게 쉽지 않다(Van de Wall, 2006).

III. 연구 방법

1. 참여자

서울시 강북에 소재한 초등학교의 4, 5학년들을 대상으로 A구청과 B대학이 주최한 수학교실에 참여하기를 희망하는 아동들을 인터넷으로 접수받은 후 전자추점을 통하여 무작위로 30명을 추출하여 분수 이해에 관한 설문을 실시하였다. 이 중에서 설문에 충실하게 응답한 아동 6명에 한하여 사례연구를 실시하였다. 6명은 강북에 소재한 초등학교에 다녔고, 모두 다른 학교에 재학 중이었으며 4학년은 3명, 5학년은 3명이었고, 남자는 4명(4학년 2명, 5학년 2명), 여자는 2명(4학년 1명, 5학년 1명)이었다. 가정의 사회경제적 수준은 대부분 중하위권의 아동이었다.

아동의 수학 성취도 수준을 알아보기 위해서 자연수와 분수, 소수의 사칙연산에 관한 진단평가를 실시하였다. 그 결과 본 연구에 참여한 6명의 아동 대부분은 자연수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈 문제와 동분모 분수의 덧셈과 뺄셈은 할 수 있었으나, 이분모 분수의 덧셈, 뺄셈과 분수의 곱셈, 나눗셈, 소수의 곱셈, 나눗셈, 혼합계산을 할 수 있는 아동은 전혀 없거나 극소수에 불가하였다. 소수의 덧셈과 뺄셈은 절반 정도의 아동만이 계산할 수 있었다. 다음은 각 아동의 진단평가 결과이다.

<표 3> 진단평가 결과

문항	연산 유형 \ 아동 식별 기호			A	B	C	E	F	G	합계
1	자연수	덧셈		1	1	1	1	1	1	6명
2		뺄셈		1	1	1	1	1	1	6명
3		곱셈		1	1	1	1	1	1	6명
4		나눗셈		1	1	1	1	1	1	6명
5	분수	덧셈	동분모	1	1	1	1	0	1	5명
6			이분모	0	0	1	0	0	0	1명
7		뺄셈	동분모	1	1	1	1	1	1	6명
8			이분모	0	0	1	0	0	1	2명
9		곱셈		1	0	1	0	0	1	3명
10		나눗셈	진분수÷ 자연수	1	0	0	0	0	0	1명
11			진분수÷진분수	0	0	0	0	0	0	0명
12	소수	덧셈		1	1	0	0	1	0	3명
13		뺄셈		1	1	0	0	0	0	2명
14		곱셈	자연수×소수	1	0	0	0	0	0	1명
15			소수×소수	0	0	0	0	0	0	0명
16		나눗셈	소수점 아래 한 자릿수	0	0	0	0	0	0	0명
17			소수점 아래 두 자릿수	0	0	0	0	0	0	0명
18	분수와 소수의 혼합계산			0	0	0	0	0	0	0명
맞은 문항 수				11개	8개	9개	6개	6개	8개	

* 1 : 맞은 경우, 0 : 틀린경우

2. 연구 설계

본 연구는 6명의 아동을 대상으로 한 사례연구로 총 연구 기간은 2008년 7월에서 2009년 1월까지 7개월 동안 수행되었다. 본 연구 기간 동안 분수에 관한 학생들의 학습을 강제적으로 제한하지는 않았다. 그리고 첫 수업 시간에 아동의 일반적인 수학 수준과 수학적 성향 및 사회적 배경에 관한 정보를 알기 위해 진단평가, 자기관찰

체크 리스트, 사회적 배경 관련 설문을 실시하였다. 그 다음 아동들이 분수를 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여, 분수 표상과 분수 상황, 분수 의미를 묻는 설문을 실시하였다. 분수에 대한 아동의 이해가 분수의 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 분수의 다섯 가지 하위개념과 분수의 사칙연산, 동치 문제로 구성된 평가지로 시험을 실시하였다. 그 후 설문지와 평가지의 결과를 토대로 분석 틀을 고안하고, 그 분석 틀에 기초하여 면담지를 작성한 후 아동과 반구조화 면담을 실시하였다.

설문지와 평가지로 확인할 수 없는 부분들에 대해서는 개별 면담을 실시하여 확인하였다. 모든 개별 면담은 비디오로 촬영하여 전사하였다. 개별 면담 자료는 아동이 분수를 어떤 의미로 이해하고 있으며, 그것이 문제해결에 어떤 영향을 주는지 알아보는 데 중요한 분석 자료로 사용되었다.

3. 예비 연구

연구자가 작성한 도구가 연구검사 도구로 적절한지를 알아보기 위하여 2008년 1월 8일부터 2008년 1월 31월까지 B대학에서 운영하고 있는 수학교실에 수강중인 초등학교 4, 5학년 15명을 대상으로 분수를 어떤 의미로 이해하고 있으며, 그것이 분수 문제해결에 어떤 영향을 주는지 예비 연구를 실시하였다. 이 과정에서 초안으로 작성한 연구도구의 오류를 수정하고 수학교육 전문가의 조언을 통하여 연구도구를 확정하였다.

4. 자료 수집 및 분석

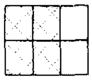
아동이 작성한 설문지와 평가지, 면담 과정이 녹화된 비디오테이프, 면담 과정에서 아동이 작성한 활동지와 면담지, 연구자가 적은 기록물과 녹음 내용 등의 자료를 수집하여 분석하였다. 자료 분석 방법은 일정 비교 분석법(Constant Comparative Method)을 사용하였다. 또한 본 사례연구에서 연구자는 자료수집과 분석을 위한 중요한 도구로 사용되었다(Merriam, 1998).

1) 분수에 대한 아동의 이해

아동이 분수를 어떤 의미로 이해하고 있는지 알아보기 위하여 6명의 아동을 대상으로 설문과 면담을 실시하였다. 설문지에는 "2/3를 나타내는 그림을 모두 그려 보세요.", "2/3를 나타내는 상황을 최대한 많이 써 보세요.", "2/3는 무엇을 의미하나요? 자신의 생각을 자유롭게 써 보세요."라는 질문에 답하도록 하였다. 면담지에는 분수의 의미와 상황을 또 다시 질문했으며, <그림 2>의 면담지를 보여주고 2/3의 의미를 나타내는 것을 모두 고르도록 하고, 면담과정에서 그 이유에 대하여 설명하도록 하였다.

다음 중 $\frac{2}{3}$를 나타내는 것을 모두 고르시오.

답 : (   )

(1) 

(2) 2를 3으로 나눈 몫

(3) 

(4) 

(5) 케익 2개를 3명이 똑같이 나누었을 때, 한 사람이 받게 되는 케익의 양

(6) 어떤 수를 3으로 나누고 그 결과에 2를 곱하는 것

(7) 어떤 수를 2로 나누고 그 결과에 3을 곱하는 것

(8) 연필이 3개, 지우개가 2개 있을 때, 지우개 개수에 대한 연필 개수의 비의 값

(9) 연필이 3개, 지우개가 2개 있을 때, 연필 개수에 대한 지우개 개수의 비의 값

<그림 2> 분수 의미 면담지

2) 문제해결

분수에 대한 아동의 이해가 분수의 5가지 하위개념 문제와 분수 연산, 동치 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 Charalambous와 Pitta-Pantazi (2006)의 연구에서 사용된 대표 평가 문항들을 번역한 후 우리나라 문맥에 맞게 재구성하여 사용하였다. Charalambous와 Pitta-Pantazi (2006)는 분수의 다섯 가지 하위개념과 분수 연산, 동치에 관한 이해를 측정하기 위하여 이전 연구들에서 검증받은 문항들을 재구성하여 사용했으며, 그 결과 높은 타당도와 신뢰도를 보여주었다. 다음은 본 연구에서 사용한 각 문항별 내용이다.

<표 4> 평가지 문항별 내용

문항	내용	문항	내용
1-2	부분-전체 하위개념	14-1	분수의 덧셈
3-4	비 하위개념	14-2	분수의 뺄셈
5-6	연산자 하위개념	13,14-3	분수의 곱셈
7-9	몫 하위개념	14-4	분수의 나눗셈
10-12	측정 하위개념	15-16	동치 분수

분수에 대한 아동의 이해와 문제해결 사이의 연결성을 발견하기 위하여 아동이 이해하고 있는 분수의 하위개념과 아동이 맞히거나 틀린 문항별 내용을 비교 분석하였다. 본 연구에서 사용한 평가지는 <부록>에 첨부하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 분석

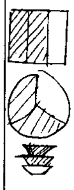
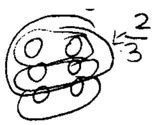
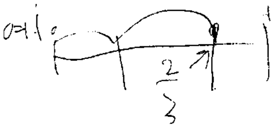
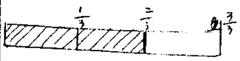
1. 분수에 대한 아동의 이해

Piaget의 인지 발달 이론에 따르면, 개념의 이해는 지식을 기계적으로 연합한 것이 아니라 아동이 그 개념을 자신이 가지고 있는 기존의 인지구조에 동화시키거나 새로운 개념이 자신의 인지구조에 동화되지 않을 경우에는 자신의 인지 구조를 조절함으로써 새로운 개념이 기존의 지식과 적절한 관계망을 형성하는 것이다(Tall, 1991; Viner & Dreyfus, 1989). 분수 개념에 대한 아동의 이해를 측정한다는 것은 쉬운 일이 아니며, 완벽하게 측정한다는 것은 불가능한 일이다. 다양한 방법을 이용하여 아동의 이해를 추측할 뿐이다. 본 연구에서는 아동이 분수를 부분-전체의 표상으로 제시하고, 부분-전체의 상황을 분수로 나타내거나 분수를 부분-전체의 상황으로 나타낼 수 있으며, 분수의 의미로 부분-전체의 개념을 제시한 경우 아동은 부분-전체의 의미로 분수를 이해하고 있다고 가정하였다. 아동이 작성한 표상 예시, 상황 예시, 의미 예시와 개별 면담 자료를 기초로 분석한 결과 분수에 대한 아동의 이해를 '부분-전체', '비', '연산자', '몫', '측도', '연산결과'로 범주화하였다.

'부분-전체'는 "3개중의 2개(G10:1)", "1을 3개로 나눈 것 중의 2개(E8:1)" 등 분수를 이산량이나 연속량이 분할되는 상황에서 전체 양에 대한 부분의 양을 나타내는 것으로 이해하고 있는 경우로 이는 이전에 살펴본 부분-전체 하위 개념의 의미(Lammon, 2005; Marshall, 1993)와 동일한 의미이다. '비'는 같은 유형의 두 양 사이의 비교로서 "2 : 3"으로 나타내거나 비의 상황을 분수로 나타낼 수 있는 경우로 Lammon (2005)이 개념화한 의미와 동일하다. '연산자'는 "어떤 수를 3으로 나누고 그것에 2를 곱한 것(A9:1)", "민석이의 키는 1m 80cm이고, 문성이의 키는 민석이의 키의 2/3인 1m 20cm이다.(A13:5)" 등 분수를 하나의 연산자로 생각하는 경우이다. 2/3를 "3으로 나누고 2를 곱하는 것" 또는 "2를 곱하고 3으로 나누는 것" 등 분수를 연산자로 이해하는 경우를 말한다. 몫은 "빵 2개를 3사람한테 나눠주려고 한다. 1사람당 몇 개의 빵을 가질 수 있는가?(C8:2)" 또는 "$2\div3=\frac{2}{3}$ (BI)" 등 분수를 나눗셈의 몫으로서 이해하는 경우 '몫'의 범주로 분류하였다. 몫 범주는 Kieren (1993)의 몫 하위개념과 동일한 의미이다. '측도'는 분수를 어떤 구간에 할당된 측도와 연관 지어 생각하는 경우로(Lamon, 2005), 분수를 수직선을 사용하여 나타내거나, 양으로서 분수를 이해하는 경우 측도 범주로 분류하였다. 마지막 '연산결과'는 분수의 하위개념은 아니지만, 몇몇의 아동들로부터 분수를 덧셈, 뺄셈과 같은 어떤 특정 연산의 결과 또는 연산 절차가 포함된 하나의 분수식으로만 이해하는 경향이 나타났다. 분수에 특정 하위개념의 의미를 부여하여 이해하고 있기 보다는 의미 없는 계산 절차로만 이해하고 있는 경우이다. 예를 들어 2/3의 의미를 묻는 질문에 "3분의 1 더하기 3분의 1이요." 또는 "1 빼기 3분의 1이요."라고 대답하거나, 2/3의 상황을 묻는 질문에 "피자가 3/3이 있습니다. 거기서 내가 1/3조각을 먹었습니다. 그럼 몇 조각이 남았습니까?(F15:2)"와 같이 분수를 특정 연산 식 또는 연산을 통해서 나온 결과로 이해하는 경우를 연산결과 범주로 분류하였다.

<표 5>는 본 연구에 참여한 6명의 아동이 나타낸 분수의 표상, 상황, 의미 예시이고, <표 6>은 분수의 이해 범주(부분-전체, 비, 연산자, 몫, 측도, 연산결과)에 관한 표상이나 상황, 의미를 제시한 아동들을 나타낸 것이다. 아동이 나타낸 표상, 상황, 의미와 면담 자료에 기초하여 분수에 대한 아동의 이해를 분석한 결과, A는 분수를 부분-전체, 연산자, 측정의 의미로 이해하고 있었고, B는 부분-전체, 연산자, 몫, 측정, 비의 의미로 이해하고 있었

<표 5> 아동이 나타낸 분수의 표상, 상황, 의미 예시

	표상 예시	상황 예시	의미 예시
부분-전체	 (A13:2)  (C24:3)	"빵 1개를 3개로 나눠 2개를 먹었다(B14:2)" "한 사람을 상체, 얼굴, 하체 이 3가지로 나눌 때 상체와 얼굴은 몇 분의 몇인가?(C8:3)"	"3개중의 2개(G10:1)" "1을 3개로 나눈 것 중에 2개(C7:1)"
비	3 : 2 (BI)		"3 : 2 (B7:5)"
연산자	예: 9의 $\frac{2}{3}$, 6의 $\frac{2}{3}$, 3 의 $\frac{2}{3}$ ... 어떤수를 3개로 나눈것중에 2개다. (BI)	"잠실 수영장의 길이는 60m이고, 돈암수영장의 길이는 60m의 $\frac{2}{3}$인 40m이다(A13:3)"	"어떤 수를 3으로 나누고 그것에 2를 곱한 것을 의미한다(A14:1)"
몫	2÷3은 $\frac{2}{3}$다. (BI)	"빵 2개를 3사람한테 나눠주려고 한다. 한 사람당 몇 개의 빵을 가질 수 있는가?(C6:2)"	"2÷3은 $\frac{2}{3}$ 다(B7:1)"
측정	 (BI)  (C6:1)		"0과 1사이를 3으로 쪼개어 2인 것(B7:4)"
연산 결과	$\frac{3}{3}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ (F15:3)	"피자가 3/3이 있습니다. 거기서 내가 1/3조각을 먹었습니다. 그럼 몇 조각이 남았습니다(F15:2)." "피자 3조각이 있다. 만약 오빠가 1/3개를 먹는다면, 얼마나 남았는가? 분수로 나타내시오(E7:2)."	$\frac{3}{3}$의 피자가 있는데 $\frac{1}{3}$을 먹은 것(F16:1)

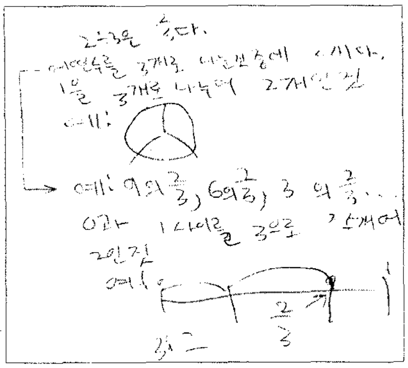
으며, C는 부분-전체, 몫, 측정, 비의 의미로 A, B, C 세 명은 모두 분수를 세 가지 이상의 의미로 이해하고 있었다. 반면 E, G 두 명의 아동은 분수를 부분-전체 의미로만 이해하고 있었다. 특히 F는 면담 과정에서 부분-전체의 의미도 정확하게 이해하고 있지 못함이 발견되었고, 분수에 어떤 의미를 부여하여 이해하고 있기 보다는 분수를 특정 연산식의 결과로 이해하고 있어 연산결과의 범주로 분류하였다. 여기서 아동이 범주화된 각 하위개념을 완전히 이해(개념적 이해)하였다고 해석하기는 어렵다. 각 하위개념의 표상을 제시하고, 하위개념의 상황을 분수로 나타내거나 분수를 하위개념의 상황으로 나타낼 수 있으며, 분수의 의미로 하위개념의 정의 또는 중요 개념을 제시한 경우 이해하였다고 제한하였기 때문이다. 본 연구에서 아동의 분수 이해를 분석한 결과 하위개념을 이해한 아동도 분수에 대한 오개념을 가지고 있거나, 이해의 정도가 초기 단계인 경우도 있었다.

<표 6> 분수의 이해 범주를 나타낸 아동

범주 \ 영역	분수 표상	분수 상황	분수 의미
부분-전체	A,B,C, E,F,G	B,C	B,C,E,G
연산자		A	A, B
몫		C	B
측정	A, B, C		B
비			B
연산결과		E,F	F

다음은 본 연구의 참여자 중에서 가장 많은 의미로 분수를 이해하고 있는 아동 B의 면담과정이다. 연구자는 면담 과정에서 모든 아동들에게 면담지5)를 보여주며, 2/3를 나타내는 것을 모두 고르게 하였는데, B는 분수의 5가지 의미를 정확하게 고른 유일한 아동이었다.

R : (면담지를 가리키며) 2를 3으로 나누는 2 나누기 3도 (2/3를 나타내는 건가요)?
B : 케잌 2개를 3명이 똑같이 나누었을 때는 여기 케잌 2개가 있고 3명이 똑같이 나눈다면 2 나누기 3. (면담지를 가리키며) 그러니까 이 2번이랑 똑같으니까 3분의 2가 되요.
(중략)
R : 3분의 2가 의미하는 것은 뭐라고 생각해요?
B : 예를 들어 이렇게 2개를 3개로 나눈 것의 몫. 3분의 2.
R : (면담지를 가리키며) 여기에 써볼래? 또 있어요?
B : 어떤 수를 3개로 나눈 것 중에 2개다.(중얼거리면서 면담지에 쓴다.)
R : 또?
B : 일을 세 개로 나누어 두 개인 것.(중얼거리면서 면담지에 쓴다.)
R : 이것하고, 이것하고 서로 다른 건가요? (B가 쓴 "어떤 수를 세 개로 나눈 것 중에 두 개다."와 "일을 세 개로 나누어 두 개인 것"을 가리키며)
B : 네.
R : 어떻게 달라요?
B : 일은 그냥 이것 하나, 하나이지만 어떤 수는 일도 될 수 있지만 다른 수도 될 수 있어요. 다른 수로는 뭐 이, 삼 (면담지에 9의 $\frac{2}{3}$, 6의 $\frac{2}{3}$, 3의 $\frac{2}{3}$ ... 을 쓴다.)
R : 그렇다면 3분의 2라는 건 여기 예처럼 어떤 수를 3으로 나누어서 2를 곱한 것과 같나요?
B : 어떤 수를 3으로 나누는 것, 뭐, 6을 3으로 나누고 2개를 갖고 오는 것.
R : 갖고 오는 거야? 그게 그 결과에 2를 곱하는 것과 같아요?
B : 네, 이이는 사.
(중략)
B : 아, 수직선, 0과 1 사이를 3으로 쪼개어 2인 것. (중얼거리면서 면담지에 쓴다.)
R : 어디가 3분의 2인데?
B : 두개 이쪽 (연필로 수직선 위의 $\frac{2}{3}$ 위치를 가리키며 $\frac{2}{3}$ 라고 쓴다.)
R : 자, 그렇다면 왜 8번은 아니고 9번은 맞아요?
B : (8번 문제를 가리키며) 연필이 3개, 지우개 2개, 지우개에 대한 연필의 비가 이게 3이고 이게 2이니까.. 2분의 3.. (어깨를 약간 올리며) 그렇게 되는 것 같아요.
R : 9번은요?
B : 9번은 반대예요. 연필은 삼 대 이(3:2)니까.
R : 연필의 개수에 대한 지우개의 비는?
B : (면담지에 3:2라고 쓰면서) 삼 대 이
R : 삼 대 이? 비의 값은?
B : 3분의 2
R : 3분의 2를 비로 한번 나타내면 어떻게 될 것 같아?
B : (면담지에 3:2라고 쓰면서) 삼 대 이
R : 어, 삼 대 이, 이 비의 값이 3분의 2야?
B : 네.
R : 2분의 3은 아니예요?
B : 2분의 3은 이것인데, 이 대 삼
R : 이 대 삼이예요?
B : (귀찮다는 듯이 손을 저으며) 몰라요.



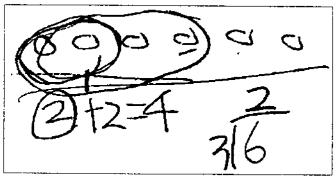
<그림 3> B의 분수의 의미

5) <그림 2> 분수 의미 면담지 참조

B는 면담과정에서 분수의 부분-전체의 의미, 측정의 의미, 나눗셈의 몫의 의미, 연산자의 의미, 비의 의미를 모두 말하였다. 5학년으로 아직 비와 비율을 배우지 않은 상태였으므로, 비와 비의 값 사이의 연결은 틀렸지만, 비의 상황을 정확하게 분수로 나타낼 수 있었다. Saxe et al. (2005)에 의하면, 아동의 형식적 표기와 개념 지식은 다소 독립적으로 발달한다. B는 비와 비의 값에 대한 형식적 표기가 발달된 상태는 아니었지만, 선행학습을 통해서 비에 관한 초기 개념이 형성되어 있는 것으로 조사되었다.

A의 경우 분수를 부분-전체의 의미와 연산자, 측정의 의미로 이해하고 있었다. 다음은 A가 연산자의 의미로서 분수를 설명하는 과정이다.

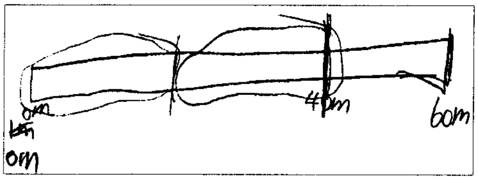
R : 구슬이 3개 있어요. (면담지에 쓰면서) 여기서 3분의 2는?
A : (면담지에 쓰면서) 2개
R : 여기서 3분의 2는 무엇을 의미하는 거예요?
A : 정확하게 설명하자면 (면담지에 쓰면서) 6을 3으로 나눠서 2개 나오잖아요. 그럼 이 한 묶음의 수가 2라는 소린데, 3분의 2니까 이거에 2를 한 번 더해주면 4개 나와요.
R : 아, 그래요? 그러면 3분의 2라는 거는 어떻게 보면 하나의 연산일수도 있겠네. 더하기, 빼기처럼.
A : 네.



<그림 4> A의 분수의 연산자의 의미

면담 과정에서 A는 "지금까지는 그냥 어떤 수를 3개로 정확히 나눈 뒤 그 몫을 분자인 2로 곱해주는 거로 알고 있었는데요.", "3개를 정확히 나눠서 2조각을 합치는 것", "어떤 수를 3으로 나누고 몫에 2를 곱한 것"이라는 말을 하기도 하였다. 그러나 A는 분할, 측정, 연산자의 의미를 통합하여 연결 짓고 있지는 못하였다.

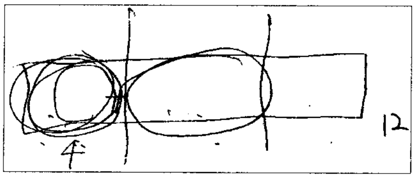
R : A가 3분의 2를 나타내는 상황에 대해 쓴 것을 얘기해줄래요?
A : (자신이 쓴 설문지를 보며) 잠실 수영장의 길이는 60미터이고, 돈암 수영장의 길이는 60미터의 3분의 2인 40미터이다.
R : 이것이 3분의 2를 나타내는 거예요?
A : 네
R : 어떻게요? 설명 좀 해줄래요?
A : 이걸 수영장이라 하면 잠실 수영장에 길이는 세 조각, (면담지에 쓰면서) 이렇게 하면은 돈암 수영장의 길이는 이것의 3분의 2인 40미터란 말이예요.
R : 이때 3분의2는 어떤 의미인가요?
A : (면담지에 쓰면서) 이 수영장의 길이를 세 개로 정확히 나눈다면 그 중에 이 두 개의 곳을 나타낸 거예요.
R : 여기서 3분의 2가 어떤 역할을 한 거예요?
A : 길이



<그림 5> A의 2/3의 의미 예1

(중략)

R : 3분의 2라는 것은 무엇이라고 생각해요?
A : (면담지에 그려가면서) 네모가 있다면 세 개를 딱딱 이렇게 정확하게 정확하지는 않지만 정확하게 세 개의 길이가 정확하게 딱딱 맞게 한 뒤 두 조각의 길이를 더해주는 것이요.
R : 아, 두 조각의 길이를 더해주는 거예요?
A : 네
R : 이 한 조각의 길이는 몇인가요?
A : 세 개로 나눴으니까, (면담지에 쓰면서) 어, 여기를 12라고 했을 때 4요.
R : (A가 그린 그림을 가리키며) 이 길이가 없다면 3분의 2를 나낼 수 없나요?
A : 음. 할 수 있을까? (웃으면서) 못할 것 같은데요.



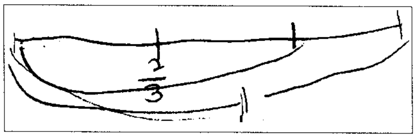
<그림 6> A의 2/3의 의미 예2

A는 2/3란 어떤 길이 속성을 가진 대상을 세 개로 등

분한 것 중의 두 부분을 의미한다고 하였다. 이것은 분할 개념과 연산자의 의미가 포함된 것이다. 그러나 A는 전체와 부분의 관계로서 2/3를 나타내는 것과 분수의 연산자의 개념을 의미 있게 연결하여 통합하지는 못하였다.

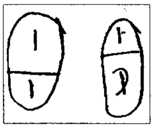
C는 분수를 부분-전체, 측정, 몫의 의미로 이해하고 있었다. 다음은 C가 면담과정에서 부분-전체, 측정, 몫의 의미로서 분수를 설명하는 과정이다.

R : 3분의 2는 무엇을 의미하는 것 같아요?
C : 세 개로 나눈 것 중에 두 개요.
R : (C가 작성한 설문지를 보여주며) C가 뭐라고 썼나요?
C : 한 사람을 상체, 얼굴, 하체 이 세 가지로 나눌 때 상체와 얼굴은 몇 분의 몇인가?
R : 몇 분의 몇인가요?
C : (손으로 몸을 가리키며) 이정도가 세 등분이 다 똑같은 크기로 봤을 때 두 개는 3분의 2이예요.
R : 아, 얼굴과 상체하고 하체가 모두 다 똑같다고 가정했구나.
C : 네
R : 또 다른 의미도 있나요? C는 3분의 2를 어떻게 배웠어요?
C : 수직선으로요.
R : 아, 수직선으로 배웠어? 한번 그림으로 3분의 2를 나타내 볼래요?
C : (면담지에 수직선을 그린다.)
R : 그린 것을 설명해주세요.
C : 우선 이 수직선을 1이라고 하면은요. 3개로 나눈 것 중에 2개가 3분의 2예요.



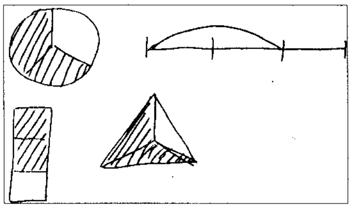
<그림 7> C의 분수의 측정의 의미

R : (C가 작성한 설문지를 보여주며) 지금 C가 이렇게 썼거든, 빵 2개를 세 사람에게 나누어 주려고 한다. 사람당 몇 개의 빵을 가질 수 있는가?
C : 3분의 2
R : 3분의 2가 맞아요?
C : 네
R : (설문지를 보여주며) 문제를 그림으로 나타내면 어떻게 될까?
C : (면담지에 쓰면서) 빵이 이렇게 되어 있다면, 빵 두 개를 세 사람이 나누는 거니까 두 사람 중에 한 사람이 먹고, 이거를 또 한 사람이 또 먹고 이 두 개를 합쳤을 때.
R : 그러면 이때 3분의 2라는 건 어디에 있어요?
C : 한 사람이 먹었을 때.
R : 한 사람의 몫이 되는 거예요?
C : (고개를 끄덕 끄덕인다.)


<그림 8> C의 분수의 몫의 의미

지금까지 살펴본 것처럼 아동 A, B, C는 분수를 세 가지 이상의 의미로 이해하고 있는 반면, D, E, F는 부분-전체의 관계로서만 분수를 이해하고 있었고, 특히 F는 부분-전체의 관계에서 등분할의 의미를 정확하게 이해하고 있지 못하였다.

R : 3분의 2의 의미가 무엇인가요?
G : 세 개로 나눈 것 중에 두 개요.
R : 3분의 2를 나타내는 그림을 모두 그려보세요.
R : (G가 그린 수직선 모양의 그림을 가리키며) 이 그림은 무엇을 의미하나요?
G : 세 개를 똑같이 나누었을 때 두 개요.
R : 세 그림 모두가 같은 의미인가요?
G : 네

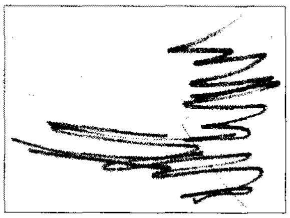

<그림 9> G의 분수의 부분-전체 의미

D와 G의 경우 수직선 모양의 그림 표상이 나왔지만 면담 과정에서 부분-전체의 의미에 대한 표상인 것으로 확인되었다. D와 G는 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있었는데, 분수의 문제해결에서 측정의 문제를 부분-전체의 의미로 잘못 해석하여 풀기도 하였다.

F는 설문에서 부분-전체 관계를 정확하게 그림으로 나타내었지만, 면담 시 그린 그림에는 비등분할의 <그림

10>이 포함되어 있었다. F는 부분-전체의 관계에서 부분들은 모두 동일한 크기이어야 한다는 것은 알았지만, 그 이유를 설명하지는 못하였다. 특히 F는 분수를 덧셈, 뺄셈과 같은 특정 연산의 결과로서 이해하고 있었다.

R : 3분의 2는 무엇을 의미하는 것 같아요?
F : 3분의 2는 3개 중에 2개를 먹는 것.
R : 꼭 먹어야 되요?
F : 아니요. 잃어버리거나
R : 잃어버려야 되요? 3분의 2는?
F : 3분의 2는 3개로 나눴을 때 두 부분만 남는 것.
R : 두개만 남는 거예요? 그럼 똑같이 나눌 필요는 없어요?
F : 아니요.
R : 꼭 똑같이 나눠야 되요?
F : (고개를 좌우로 흔든다)
R : 그럼? (F가 면담 시 그린 그림을 가리키며) 이것은 똑같이 나눴어요? 안 나눴어요?
F : 안 나눴어요.
R : 이거 맞아요?
F : 아니요.
R : 그럼, 틀려요?
F : 네.
R : 왜 틀려요?
E : 모르겠어요.



<그림 10> F의 비등분할 표상

F는 등분할의 의미로 분수를 이해하기 보다는 "3/3의 피자가 있는데 1/3을 먹은 것"으로 2/3를 이해하고 있었다. 2/3를 나타내는 상황으로도 "피자가 3/3이 있습니다. 거기서 내가 1/3조각을 먹었습니다. 그럼 몇 조각이 남았습니까?"라고 썼으며 그 이유에 대해서는 "원래 3개가 있는데 1조각을 먹으면 3분의 2가 되기 때문에"라고 말하였다. 분수를 전체 중의 부분의 의미라기보다는 조각 하나 하나를 분리된 대상으로 생각하였다.

E 또한 3분의 2의 의미에 "피자 3조각이 있다. 만약 오빠가 1/3개를 먹는다면, 얼마나 남았는가? 분수로 나타내시오.(E6:5)"라고 썼다. 이 결과는 아동들이 2/3를 1/3이 2개 모여서 하나의 단위를 이루는 것으로 인식하는 것이 아니라, 1/3조각이 낱개로 2개 모여 있는 것처럼 생각하는 경향이 있음을 보고한 Mack (1990)의 연구 결과와 일치한 것이다.

F는 3/3에서 1/3을 뺀 결과로서 2/3를 생각하는 것으로 보아 분수에 대한 의미를 깊게 생각해본 경험이 없으며, 그저 분수를 분수의 덧셈, 뺄셈의 결과로 여기는 것 같았다. 분수에 대한 개념이 형성되기 전에 계산 절차만을 강조한 교수법에 노출된 것이 하나의 원인으로 분석되었다.

R : 남는 거 아닌 건 없어? 이렇게 3분의 3이 있는데, 거기서 3분의 1을 먹으면 얼마가 남습니까? 그렇게 말고는 3분의 2를 나타낼 수 없을까?
F : 아니, 있어요.
R : 어떻게?
F : 덧셈
R : 얘기해볼래요?
F : 슬러시가 3분의 1이 있습니다. 거기서 엄마께서 3분의 1을 더 사왔습니다. 슬러시는 몇 개가 됩니까?

연구자는 내심 F가 2/3를 다르게 나타낼 거라 기대하였는데, F는 마지막까지 2/3을 덧셈이라는 연산 결과의 상황으로 나타내었다. F는 분수의 의미를 덧셈, 뺄셈과 같은 연산 결과로 생각하고 있었는데, 이는 분수의 문제 해결에도 영향을 주었다.

2. 분수의 의미와 문제 해결

분수에 대한 아동의 이해가 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위해서 크게 분수의 다섯 가지 의미에 관한 문항, 분수의 연산 문항, 동치 분수 문항으로 평가를 실시하였다.

가장 많은 아동이 틀린 문제는 이분모 덧셈, 뺄셈과 나눗셈 문제였으며, 가장 많이 맞힌 문제는 동치 문제였다. 좀 더 자세히 살펴보면, 동치 분수(4.7명), 분수 곱셈(4명), 비(3.5명), 연산자(3.5명), 몫(3.3명), 부분-전체(3명), 분수 곱셈 어림(2명), 측도(1.3명), 분수 덧셈, 뺄셈, 나눗셈(각 1명) 순으로 정답률이 높았다. 다음 <표 7>은 각 문항별 아동 6명의 문제 해결 결과이다.

<표 7> 아동의 문제 해결 결과

문항번호	내용		A	B	C	E	F	G	합계
1	부분-전체		1	1	1	0	1	1	5명
2			0	0	0	0	0	1	1명
3	비		0	0	1	1	0	1	3명
4			0	0	1	1	1	1	4명
5	연산자		1	0	0	1	1	0	3명
6			1	1	1	1	0	0	4명
7	몫		0	1	1	0	0	1	3명
8			0	1	1	1	0	0	3명
9			1	1	1	1	0	0	4명
10-1	측정		0	0	0	0	0	0	0명
10-2			0	0	0	0	0	0	0명
11			0	0	0	0	0	0	0명
12			1	1	1	0	1	1	5명
13	분수연산	어림	0	0	1	0	0	1	2명
14-1		덧셈	0	0	1	0	0	0	1명
14-2		뺄셈	0	0	1	0	0	0	1명
14-3		곱셈	1	0	1	0	1	1	4명
14-4		나눗셈	0	0	1	0	0	0	1명
15-1	동치 분수		1	0	1	0	1	1	4명
15-2			0	0	1	0	1	1	3명
16			1	0	1	1	1	1	5명
합 계			8개	6개	16개	7개	8개	11개	

* 1 : 맞은 경우, 0 : 틀린경우

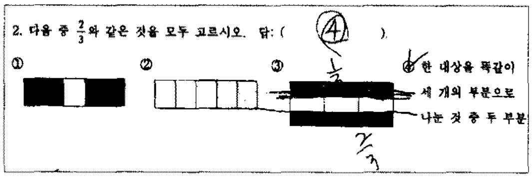
아동의 평가지를 채점한 결과 C(16개), G(11개), A(8개), F(8개), E(7개), B(6개) 순으로 맞힌 문항 수가 많았다. 분수의 다양한 하위개념을 가장 많이 이해하고 있던 아동 B가 가장 낮은 성적을 받은 것은 의외의 결과였다. 알아본 결과 B는 시험 당시 반 이상의 문제를 풀지 않고 제출했었던 것으로 확인되었다. 면담과정에서 아동 B는 거의 대부분의 문제를 해결하였고, A, C의 경우도 틀린 문제 대부분이 실수를 했다고 하면서 문제를 해결하였다. 그런 반면, 아동 E, F, G는 맞힌 문제도 이유를 정확하게 설명하지 못하였고, 틀린 문제들은 분수에 대한 잘못된 이해로 오류를 범하는 경우가 많았다. 이를 통해 알 수 있었던 것은 아동의 성취도 결과인 양적 자료만을 가지고 아동의 이해정도를 파악하는 것은 잘못된 일반화의 오류를 범할 수 있다는 것이다. 따라서 면담, 관찰, 학습일지, 포트폴리오 등 다양한 평가 방법을 통하여 아동의 이해를 측정해야한다. 연구자는 분수에 대한 아동의 이해가 문제 해결에 어떤 영향을 주는지 알아보기 위하여 각 아동과 면담을 실시하였으며, 그 결과 다양한 분수의 의미를 이해하고 있는 아동들과 그렇지 않은 아동들 간의 문제해결 능력에서 차이가 확인되었고, 분수의 하위개념에 대하여 서로 다른 의미로 이해하고 있는 아동들 간의 문제 해결 과정에서의 차이점을 확인할 수 있었다.

1) 부분-전체

분수의 부분-전체 관계의 이해를 알아보기 위해 사용된 문항 1, 2번[6] 중에서 아동 G를 제외한 모든 아동이 2번 문제에 잘못된 답을 적었다. 대부분의 아동들이 6/9을 나타내는 보기 3번을 2/3로 선택하지 않고, 보기 4번 "한 대상을 똑같이 세 개의 부분으로 나눈 것 중 두 부분"만을 2/3로 선택하였다. 다음은 부분-전체 문항 2번에 대한 아동 A의 면담 내용이다.

R : (평가지를 가리키며) 1번은 왜 3분의 2가 안되나요?
A : 똑같이 나누지 않았으니까요.
R : 2번은요?
R : 다섯 개로 나누었으니까요. 5분의 2이예요.
R : 그래, 3번은 왜 3분의 2가 아니예요?
A : 9개로 나눈 것 중에 6개만 색칠되어 있으니까요. 9분의 6으로 만들었으니까요.
R : 9분의 6은?
A : (천천히 생각하면서) 9분의 6은...
R : 3분의 2가 아닌가요?
A : 네.
R : 그래요?
A : (생각하다가 갑자기) 아! 이렇게 생각하면 3분의 2(평가지 3번 그림에 두 선을 그리면서) 3번하고 4번이요.
R : 이때는 왜 아닌 것 같았어요?
A : (웃으면서) 막 풀었거든요.
R : (웃으면서) 막 풀었어요? 그럼 지금 보니까 어때요?
A : (3번 그림에 쓰면서) 이렇게 해서 나누면 이게 3분의 1이 되는 것이고, 두 개 색칠했으니까 3분의 2를 색칠한 거예요.

6) 문항의 자세한 내용은 <부록>을 참조



<그림 11> A의 부분-전체 문제 풀이

A는 3분의 2가 아닌 그림에 대해서 정확하게 이야기 하였고, 면담과정에서 3번의 그림이 3분의 2라는 것을 깨닫고 자신의 생각을 정당화하였다. B와 C 역시 2번 문제에서 보기 1번은 똑같이 나눠지지 않았기 때문에 잘못되었다고 생각하고, 2번은 다섯 개로 나눈 것 중의 2개이므로 5분의 2이고, 3번은 9개 중의 6개인데, 약분을 하면 3분의 2와 같다고 면담 중 문제를 해결하였다. 그러나 부분-전체의 의미를 정확하게 이해하고 있지 않았던 아동 F는 9분의 6과 3분의 2가 같다는 것을 알지 못하였다.

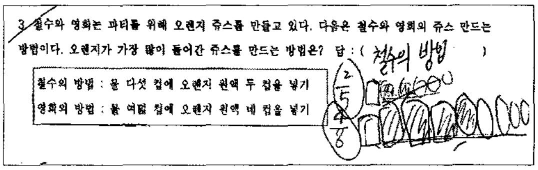
R : 4번만 맞아요? 1번은 왜 안 되나요?
F : 똑같이 안 나눠서
R : 2번은?
F : 5개
R : 5개중에
F : 2개라서
R : 3번은?
F : 9분의 6이라서
R : 9분의 6은 전체를 똑같이 3으로 나눈 거 아닌가요? 틀려요?
F : 네. 3개로 안 나눈 거 같은데.

대부분의 아동이 분수의 부분-전체의 의미를 알고 있었던 반면, 부분-전체의 문제를 많이 틀렸다. 분석 결과 동치 분수를 표현한 보기 3번의 그림이 아동에게 쉽게 2/3로 인식되지 않았기 때문이었다. 또한 면담과정에서 부분-전체의 의미를 정확하게 이해하고 있지 않은 아동 F만이 이 문제를 해결하지 못하였다.

2) 비

분수의 비에 관한 문제 3, 4번에서 3번은 아동 A, B, F 세 명이 틀렸고, 4번은 A, B만 틀렸다. A, B는 면담 과정에서 문제를 해결한 반면, F는 문제를 해결하지 못하였다. 다음은 비 문제를 틀린 아동들의 면담과정이다.

R : (평가지의 3번 문제를 가리키며) 이건 왜 이렇게 풀었어요?
A : 음. 철수는 5분의 2, 영희는 8분의 4
R : 8분의 4를 그림으로 나타내볼까?
A : (그림을 그리고) 이 중에 4개를 채우고, 5분의 2는 두 개를 채우는 것
R : 누가 더 커요?
A : 영희요.
R : 영희가 더 커요?
A : 네, 근데.. (머리를 만지며) 아! 그렇구나! 다르게 생각했어요.
R : 어떻게 생각했어요?
A : 둘 다 똑같은 양의 주스를 주고 만약에 한 병씩 줬다고 하면, 얘는 그 한 병의 주스를 8분의 4로 놓은 거고, 얘는 5분의 2로 놓은 줄 알았어요.
R : 그럼 철수가 더?
A : (머리를 만지면서) 적어요.
R : 가장 많이 들어간 주스를 만든 사람을 물어본 건데.
A : 음. 영희, 영희예요.
R : 왜 틀린 거 같아요? 그때 어떻게 잘못 생각한 거 같아요?
A : (웃으면서) 그러게요.



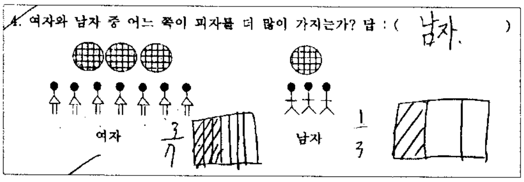
<그림 12> A의 3번 비 문제 풀이

A는 비의 관계를 분수로 나타낼 수 있었지만, 2/5와 4/8의 대소비교는 그림을 통해서 정확하게 비교하지 못하였다. 직관적으로 4/8가 2/5보다 크다는 것을 알았을 뿐 자신의 생각을 수학적으로 정당화하지는 못하였다.

R : 물 여덟 컵에 오렌지 네 컵을 넣으면 원액은 얼마 정도 있을까?
B : (영희의 방법을 가리키며) 여기는 4분의 2, 영희 같은데요.
R : 근데 왜 철수라고 했어요?
B : 저는 분모가 작을수록 더 큰지 알았어요. 근데 달랐어요.
R : 왜 달라요?
B : (평가지를 가리키며) 여기 이걸 예를 들어 통분해 보면 더 커서요.

B는 처음에 단위분수를 배울 때 분모가 작을수록 분수의 크기가 크다는 사실을 분수의 대소비교에 적용하는 오류를 범하였다. 그러나 면담과정에서 B는 통분을 통해서 분모를 같게 하여 두 수를 정확하게 비교하였다. B는 A보다는 좀 더 수학적으로 자신의 생각을 정당화하였다.

R : 남자와 여자 중에 어느 쪽이 피자를 더 많이 가졌을까요?
A : 한 사람이 가지게 되는 거 말하는 거 아니예요?
R : 맞아요.
A : 아 그래요, 그러면은 남자는 한 사람당 3분의 1을 먹게 되고 여자는 7분의 3을 먹게 되는데... 음. (머리를 만지면서 고개를 갸우뚱하며) 내가 왜 이렇게 풀었지? 이상하네, 왜 남자를 썼지?
R : 틀린 것 같아요?
A : 그때, 아(한숨을 쉬며) 진짜 바보 같아.
R : 왜 여자가 더 많은 것 같아요?
A : 한 사람이 갖게 되는 양이 3분의 1보다 더 크니까.
R : 3분의 1보다 더 커요? 왜 더 커요?
A : (평가지에 그림을 그리면서) 7개 중에 3개, 남자는 이렇게요.
R : 누가 더 많은 것 같아요?
A : 남자가 더 많아 보이는데, 쯥(좀 더 자세히 보면서) 남자가 더 많은 것 같은데요.
R : 그래요?
A : 네.



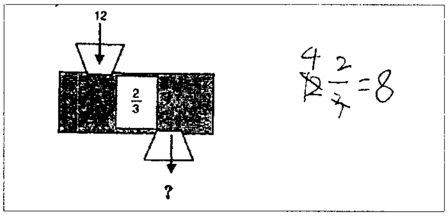
<그림 13> A의 4번 비 문제 풀이

분수를 부분-전체, 연산자, 측정의 의미로 이해하고 있는 A는 비의 두 문제 모두 부분-전체의 그림을 통해서 직관적으로 양을 비교하여 문제를 해결한 반면, 비의 하위개념을 이해하고 있는 아동 B는 위 면담에서 "한 사람당 3분의 1을 먹게 되고..."처럼 비의 개념을 이용하여 문제를 해결하였고, 자신의 생각을 좀 더 수학적으로 정당화하였다. 부분-전체의 의미로 이해하고 있는 다른 아동들도 대부분의 문제를 부분-전체의 관계를 이용하여 문제를 해석하고 해결하려고 하였다. 분수를 연산결과로 이해하고 있던 F는 비의 관계를 분수로 나타내지도 못하였고, 상황을 그림으로도 나타내지 못하였다. F는 연구자의 질문에 모르겠다고 대답하였다.

3) 연산자

연산자 문제 5번은 B, C, G 3명이 틀리고, 6번은 F, G 2명이 틀렸다. 연산자의 의미로서 분수를 이해하고 있던 A는 5, 6번 문제를 모두 맞혔으며, 분수 2/3를 "3부분으로 정확하게 나눠서 2개를 곱하는 것"과 같이 나눗셈과 곱셈이 결합된 하나의 연산자로 설명하였다.

R : 어떤 입력된 양의 3분의 2를 출력하는 기계가 있는거야. 그렇지? 그렇다면 이때 입력된 값이 12라면 그 결과는? (평가지를 보여주며)
A : 8
R : 왜요?
A : 약분, (평가지에 쓰면서) 약분을 해서.
R : 약분을 해서? 이때 3분의 2는 어떤 의미를 가질까?
A : 12개를 3부분으로 정확하게 나눠서 2개를 곱하는 것.



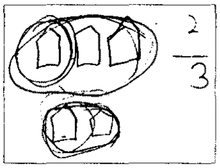
<그림 14> A의 6번 연산자 문제 풀이

분수를 부분-전체, 측정, 몫의 의미로 이해하고 있던 C의 경우 연산자 문제 5번을 틀렸으나, C는 면담 과정 중에 연산자의 의미를 이해하게 됐다고 말하였다.

R : (평가지의 5번 문제를 보면서) 어떤 수를 4로 나누고 그 결과에 3을 곱한 결과는 그 어떤 수에 4분의 3을 곱한 결과와 같을 것이다. 맞아요? 틀려요?
C : 맞아요. 전 아까 이거 곱하는 걸 어제까진 잘 몰랐어요.
R : 뭘 잘 몰랐어요?
C : 처음에 4로 나누고 이거는 없고 그냥 1 곱하기 3 그래서 3이 되는 줄 알았어요.

C는 면담과정에서 2/3의 의미를 다음과 같이 연산자의 의미로 이야기하였다. 면담 과정에서 알게 된 사실이라 C가 이해하고 있는 분수의 의미에서 연산자의 의미는 제외시켰다.

C : (그림을 그리면서) 3개를 이 3개가 한 묶음이라면 이 3개를 3개로 나누면 1이잖아요. 하나, 그러면 이거에다가 2를 곱하면 2개가 되니깐. 3개로 나눈 것 중의 2개



<그림 15> C의 분수의 연산자 의미

분수의 연산자의 의미를 이해하고 있는 아동 A, B, C와 그렇지 못한 E, F, G 사이에 연산자 문제의 해결 방법에 차이가 발견되었다. A, B, C는 12의 2/3에 대하여 12를 3으로 나눈 후 2를 곱하여 계산하거나, 12에 2를 곱한 후 3으로 나누어 계산하였다. 그러나 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있던 E는 12를 전체로 생각하고 12를 세 부분으로 나눈 것 중 두 부분으로 답을 구하였다. 아동 F, G의 경우는 분수가 연산자의 의미를 가진다는 것을 전혀 이해하지도 못하였다.

R : 어떤 수를 삼으로 나누고 이를 곱한 것. 왜 아니라고 생각했어요?
G : 저는요. 다 이렇게 생각했어요. 처음에 3이 오는 것은 틀린 거고, 처음에 2가 오는 건 맞은 거라고.

G는 평가지의 연산자 문제를 모두 틀렸다. 5번 문제의 경우 "어떤 수를 4로 나누고 그 결과에 3을 곱한 결과는 그 어떤 수에 4분의 3을 곱한 결과와 같을 것이다."가 틀렸다고 생각하는 이유로 "어떤 수가 자연수일 수도 있고, 분수일 수도 있어서"라고 말하였고, 6번의 문제는 전혀 대답을 하지 못하였다.

4) 몫

나눗셈의 몫으로서의 분수 문제 7번은 A, E, F 3명이 틀렸고, 8번은 A, F, G 3명이, 9번은 F, G 2명이 틀렸다. 몫의 의미로 분수를 이해하고 있던 C는 몫의 문제를 모두 맞았다. 다음은 몫의 문제를 틀린 A와 F의 면담과정이다.

R : '3분의 2는 2를 3으로 나눈 몫과 같다. 맞아요? 틀려요?
A : 음, (머리를 만지며) 엑스 아닌가?
R : 엑스인거 같아요? 왜요?
A : 제대로 생각해보자. 어..(잠시 머뭇거리다가) 2를 3으로 나눴을 때 몫이 1이 나오는데, 나머지가 정확하게 나눠지지가 않으니까. 그렇게 생각 했어요.
R : 정확하게 나눠지지가 않으니까?
A : 네, 나머지가 나오니까.
R : 나머지가 몇이 나와요?
A : 1이요.

분수를 부분-전체, 연산자, 측정의 의미로 이해하고 있던 A는 나눗셈의 몫을 자연수로만 생각하였고, 나눗셈의 몫을 분수로 나타내지 못하였다. A는 면담과정에서 7번의 문장이 맞는 것 같다고 이야기하였지만, 왜 그런지에 대해서는 설명해주지 못하였다. 문제집에서 본 것 같다는 말을 하였는데, 그것으로 보아 정확하게 이해하고 있지 못한 것으로 생각되었다.

F 역시 나눗셈의 몫으로서 분수를 이해하지 못하였다. 8번 문제에서 F는 분배 상황을 나눗셈으로 표현하기는 하였지만, 나눗셈의 몫을 분수로 나타내지는 못하였다.

R : 3개의 피자를 4명이 똑같이 나누어 가졌습니다. 한 사람당 몇 개의 피자를 갖게 될까요?
F : 3개
R : 이것을 식으로 쓰면?
F : 3 나누기 4?
R : 답은?
F : 모르겠어요.
R : 모르겠어요?
F : 0?

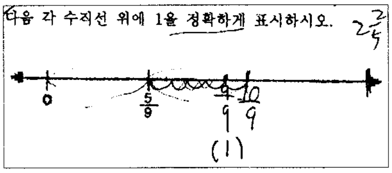
F는 세 개의 피자를 네 명이 나누어 가질 때, 한 사람은 하나 이상의 피자를 갖지 못하기 때문에 0이라고 대답하는 것 같았다. 아동이 나눗셈의 몫으로서 분수를 이해하는 것은 매우 어렵다(Toluk & Middleton , 2004). 몫으로서 분수를 이해하기 위해서는 자연수의 나눗셈에 대한 아동의 이전 개념이 재구성되어야 하기 때문이다.

'몫은 자연수이다'라는 조건이 제거되어야 하는데, Toluk와 Middleton (2004)에 의하면, 많은 아동들이 나눗셈의 몫이 분수가 될 수 있다는 것을 받아들이는데 많은 어려움을 가진다고 하였다. 본 연구에서도 분수의 몫의 의미를 이해하고 있는 아동 B, C를 제외한 아동들에게서 나눗셈의 몫은 분수가 될 수 없다는 개념이미지가 발견되었다. B, C를 제외한 나머지 아동들은 나눗셈의 몫을 분수로 나타내지 못하였고, 나눗셈의 몫을 자연수 또는 소수로 나타내었다.

5) 측도

측도 문제 10, 11번 수직선 문제를 맞힌 아동이 아무도 없었다. 12번은 F, G 2명이 틀렸다. 측도 문제는 정답률이 가장 낮은 문제 유형으로 모든 아동이 측도 문제를 어려워하였다. 수직선 위에 1을 정확히 표시하는 10번 문제에서 부분-전체의 관계로서 분수를 이해하고 있던 아동 E, F, G는 잘못된 위치에 1을 표시하거나, 자신이 표시한 위치가 왜 1인지에 대하여 설명을 하지 못한 반면, 측정의 의미로서 분수를 이해하고 있는 아동 A, B, C는 면담과정에서 수직선 위에 1을 정확하게 표시하였고 그 이유에 대하여 설명하였다.

R : 여기에 1을 정확하게 나타내보세요.
A : (수직선의 오른쪽 가장 끝에 표시를 하며) 여기를 1이라 치면요?
R : 여기가 9분의 5일 때 1은 어디일까?
A : 9분의 9.
R : 9분의 9가 어디쯤일까?
A : (수직선을 보면서) 음 이쯤이, 아 그렇겠구나. 여기서부터 여기가 9분의 5라는 거죠? 그러면은 이거랑 비슷하게(수직선에 대략 표시를 한다. 그리고 엄지와 검지를 이용하여 0에서 9분의 5까지의 길이를 잰 후 그 길이가 9분의 5에서 자신이 표시한 위치까지의 길이와 같은지 손가락으로 확인한다). 됐다. 이쯤을 또 한 번 더 가니까 9분의 10이 나오지 않을까요? 거기에서 하나, 둘, 셋, 넷, 다섯 개. 다섯 중에 하나니까 9분의 9. 그래서 여기가 1인거 같아요.($\frac{9}{9}$라고 쓴다.)

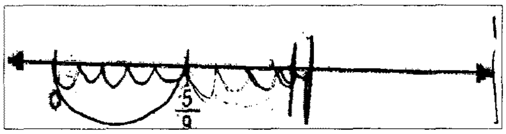


<그림 17> A의 측도 문제 풀이

A는 손가락으로 어림한 5/9의 길이를 이용하여 10/9의 위치를 표시하고, 5/9에서 10/9 사이를 다섯 칸으로 나누어 단위 분수 1/9의 길이를 구하였다. 그런 다음 10에서 1을 빼는 것이 아니라 5에서 1을 빼어 10/9에서 한 칸(1/9 단위) 작은 위치가 9/9임을 인식하고 수직선에 표시를 하였다. A의 방법은 0에서 5/9까지의 길이를 이용하여 9/9의 위치를 0에서 단위 분수 1/9을 9번 반복하여 구하기보다는 5/9에서 10/9 사이를 분할한 후 5에서 1을 빼서(5-1=4, 5+4=9이므로) 10/9로부터 9/9의 위치를 구한 것이 특징이다.

다음은 아동 B가 수직선에 1을 표시하는 과정을 보여주는 면담내용이다. B는 A와 다른 방식으로 1(9/9)의 위치를 결정하였다.

R : 자, 여기에 1을 정확하게 한번 나타내볼까?
B : (평가지의 수직선에 표시를 한다.)
R : 왜 거기가 1이예요?
B : 맨 끝이니까.
R : 맨 끝이니까? (9분의 5로 표시되어 있는 부분을 가리키며) 여기가 9분의 5예요.
B : (10초 후) 아, 여기다(다른 위치에 표시를 한다.)
R : 왜요? 설명해주세요.
B : (0을 가리키며) 여기부터 (9분의 5를 가리키며) 여기까지가 9분의 5니까, 이걸 5개로 줄이면 1, 2, 3, 4, 5 이렇게 되니까, 이정도 거리가 9분의 1, 똑같이 가니까 (수직선에 표시하면서) 9분의 6, 9분의 7, 9분의 8, 9분의 9, 어 이거 맞네요.
R : 그래서 9분의 9? 여기가 1이예요?
B : 네
R : 다시 한 번 설명해줄래요?
B : 0과 9분의 5거리가 이 정도니까 5개로 나누면 9분의 1이니까.



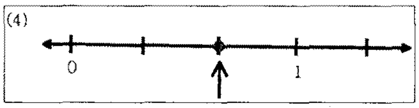
<그림 18> B의 측도 문제 풀이

처음에 B는 수직선의 끝이 1이라고 생각하였다. 그러나 잠시 후 1의 위치가 5/9의 위치에 의해 결정된다는 사실을 인식하였고, 0에서 5/9까지의 길이를 5개로 분할하여 1/9 단위 분수의 길이를 구한 뒤, 단위 분수를 반복적으로 사용하여 9/9의 위치를 알아내었다.

A와 B의 사례를 통해서 단위의 형태, 반복을 통한 축적, 단위의 분할, 영점에 초점을 맞추기 등이 길이 측정의 이해에 결정적인 요소들임을 확인할 수 있었다 (Jaslow & Vik, 2006; Stephen & Clements, 2003).

분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있는 아동 G는 측정 문제를 다음과 같이 부분-전체의 의미로 해석하는 오류를 범하였다.

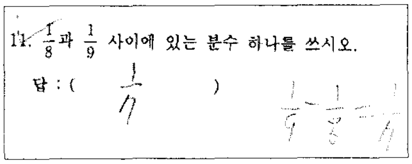
R : 3분의 2가 의미하는 것이 무엇이라고 생각하나요?
G : 세 개로 똑같이 나누었을 때 2개요.
R : 4번은 3분의 2가 아니라고 생각해요?
G : 네
R : 그럼, 뭘 나타낸다고 생각해요?
G : 5분의 2, 아니 4분의 2
R : 왜요?
G : 여기서 여기를 네 개로 똑같이 나누었으니까요.
R : (수직선 위의 1을 가리키며) 여기가 1인 것은 상관없는 거예요?
G : (웃으며 고개를 끄덕인다.)



<그림 16> G의 측도 문제

G는 수직선이 4개 눈금으로 등분할되어 있으므로 두 번째 점은 2/4라고 생각하였다. 부분-전체의 관계에 기초하여 측도 문제를 해석한 것이다. G는 단위, 단위화, 길이 단위의 반복과 같은 측정에서 중요한 개념을 정확하게 이해하고 있지 않았다.

측도의 11번 문제 또한 맞은 아동이 한 명도 없었다. $\frac{1}{8}$과 $\frac{1}{9}$ 사이에 있는 분수를 쓰는 문제에 아동 B, C, G는 어떤 답도 적지 못하였고, A는 1/7, E는 2/8, F는 7/8이라고 답하였다. A, E, F 모두 1/8보다 큰 분수를 답으로 적었다. A는 $\frac{1}{9}-\frac{1}{8}=\frac{1}{7}$이므로 $\frac{1}{7}$이라고 답하였다. A는 9가 8보다 크기 때문에 1/9이 1/8보다 크다고 생각했으며, 9, 8 다음으로 작은 수가 7이므로 1/9-1/8 =1/7이라고 생각하였다.



<그림 17> A의 측도 문제 풀이

분수에 대한 아동의 이해가 분수의 하위개념에 관한 문제해결에 어떤 영향을 주는지 살펴본 결과 대부분의 아동이 자신의 개념구조에 기초하여 문제를 해결하려고 하였다. 특히 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있는 아동들과 분수의 다양한 하위개념을 이해하고 있는 아동들 간에 차이가 발견되었다. 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있는 아동들은 모든 문제를 부분-전체의 관계로만 해석하여 푸는 반면, 분수의 다양한 하위개념을 이해하고 있는 아동들의 경우 문제 상황에 적합한 분수의 하위개념을 이용하여 문제를 해결하였다. 또한 다양한 분수의 하위개념을 이해하고 있는 아동의 경우라 할지라도 그 아동이 분수의 특정 하위개념을 이해하고 있지 않은 경우에는 그 특정 하위개념의 문제를 해결하지 못하거나, 해결하였더라도 정확하게 자신의 생각을 정당화하지 못하였다. 그리고 분수의 하위개념에 대하여 서로 다른 의미로 이해하고 있는 아동들 간의 문제 해결 방식에서의 차이점이 발견되었지만, 같은 하위개념을 이해하고 있는 아동들 간에도 문제 해결 방식에는 약간의 차이가 나타났다.

6) 분수의 연산

이분모 분수의 덧셈, 뺄셈, 나눗셈 문제는 아동 C를 제외한 5명의 아동이 오답을 제시하였으며, 분수의 곱셈 문제는 B, E 2명이 틀렸다. 연산자의 의미로 분수를 이

해하고 있는 A의 경우 분수의 덧셈, 뺄셈, 나눗셈 문제는 풀지 못한 반면, 곱셈 문제는 정확하게 해결하였다. 대부분의 아동들이 자연수의 연산과정을 분수의 연산과정에 동일하게 적용하는 모습을 보여주었다.

① $\frac{5}{8}+\frac{4}{5}=\frac{9}{13}$ ② $\frac{13}{15}-\frac{4}{5}=\frac{9}{10}$

<그림 17> F의 분수의 덧셈, 뺄셈 문제 풀이

<그림17>에서 알 수 있듯이 F는 이분모 분수의 덧셈과 뺄셈 문제를 자연수로 생각하여 계산하였다. 분모는 분모끼리, 분자는 분자끼리 더하거나 빼는 방법을 이용하여 분수의 덧셈과 뺄셈을 계산한 것이다. 이것은 분수 학습에서 이전에 학습한 자연수의 지식으로 인하여 나타나는 대표적인 오류이다. 이 결과는 Mack (1990) 등 많은 선행 연구들의 결과와 일치하는 것이다.

분수에 대한 아동의 이해가 분수의 사칙연산에 어떤 영향을 주는지 살펴본 결과 분수 개념에 대한 아동의 이해와 분수의 사칙연산 사이의 특별한 연결성은 발견되지 않았다. Behr et al. (1983)에 의하면 연산자 하위개념은 분수의 곱셈적 연산의 이해 발달에 유용하며, 측도 하위개념은 분수의 덧셈적 연산에 필요하므로 분수의 하위개념과 사칙연산 사이에는 잠재된 연결성을 가지고 있다. 그러나 본 연구에서는 분수에 대한 아동의 이해와 분수의 사칙연산 사이의 특정한 연결성은 발견되지 않았다. 몇몇의 연구에서는 Behr et al. (1983)이 제시한 이론적 모델이 분수에 대한 어른의 관점을 나타낸 것이지 분수에 대한 아동의 지식 구성을 나타내는지에 대해서는 명확하지 않다고 하였다(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2006).

7) 동치 분수

분수 문제 15번의 (1)은 B, E 2명이 틀렸고, (2)는 A, B, E 3명이 틀렸고, 16번은 B만 틀렸다. 틀린 아동은 모두 어떤 답도 적지 않았다. 동치 분수 문제는 가장 정답률이 높은 문제로, 부분-전체의 관계로 분수를 이해하고 있는 아동 E, G도 모두 맞았다. 동치 문제를 틀린 모든 아동이 면담과정에서 문제를 해결하였다.

Charalambous & Pitta-Pantazi (2006)의 연구에 의하면 부분-전체/분할 개념과 비, 동치 분수 간에는 높은 상호관련성을 가지고 있다. 그러나 본 연구결과에서는 분수에 대한 아동의 이해와 동치 분수 간의 특별한 연결성은 발견되지 않았다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 4, 5학년 6명의 아동을 대상으로 분수를 어떤 의미로 이해하고 있는지 조사하고, 분수에 대한 아동의 이해가 분수의 문제해결에 어떤 영향을 주는지 알아보았다. 아동이 작성한 분수 표상, 상황, 의미 예시와 개별 면담 자료를 기초로 분석한 결과 분수에 대한 아동의 이해는 부분-전체, 비, 연산자, 몫, 측정, 연산결과로 범주화되었다. 4학년인 A, B와 5학년인 C는 분수를 부분-전체의 하위개념뿐만 아니라 그 외 다양한 하위개념으로 이해하고 있었고, 4학년 E와 5학년 G는 분수를 부분-전체의 하위개념으로만 이해하고 있었다. 5학년인 F는 분수의 부분-전체의 하위개념도 정확하게 이해하고 있지 않았으며, 분수를 덧셈과 뺄셈 같은 특정 연산의 결과로만 이해하고 있었다.

대부분의 아동이 분수를 부분-전체의 관계로 이해하고 있는 것은 많은 선행연구의 결과와 일치한 것이다. 이는 교육과정에서 분수를 부분-전체의 개념으로 도입하기 때문이다. 현재 분수 학습에서 부분-전체 관계의 이해는 다른 하위개념 이해의 기초로 매우 중요하므로 부분-전체의 개념으로 분수를 도입해야 한다는 의견(English & Harlford, 1995)이 있는 반면, 분수의 역사발생학적 측면을 고려하여 측정의 개념으로 분수를 도입해야 한다는 의견(서동엽, 2005)과 다양한 분수의 개념으로 도입해야 한다는 의견(Moseley, 2005) 등 다양한 의견이 논쟁 중에 있다. 이는 분수에 대한 아동의 초기 개념이 이후의 분수 학습에 큰 영향을 주기 때문이다.

본 연구 결과 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있는 아동들과 분수의 다양한 하위개념을 이해하고 있는 아동들 간의 차이가 발견된 만큼, 아동들에게 분수의 다양한 개념을 접할 수 있는 기회를 제공해야 하며, 분수 학습에 관한 현재 교육과정이 분수의 다양한 의미를 통합하여 이해할 수 있도록 조직되어야 한다. 분수의 다양

한 개념들의 도입 시기와 구체적인 내용 체계 및 조직에 대해서는 앞으로 많은 논의가 필요할 것이다.

분수에 대한 아동의 이해가 분수의 하위개념에 관한 문제해결에 어떤 영향을 주는지 살펴본 결과 대부분의 아동이 자신이 이해하고 있는 분수의 하위개념에 기초하여 문제를 해결하는 모습이 나타났다. 특히 다양한 분수의 하위개념을 이해하고 있는 아동들과 그렇지 않은 아동들 간의 차이가 발견되었다. 분수를 부분-전체의 의미로만 이해하고 있는 아동들은 모든 문제를 부분-전체의 관계로만 해석하여 푸는 반면, 분수의 다양한 하위개념을 이해하고 있는 아동들의 경우 문제 상황에 적합한 분수의 하위개념을 이용하여 문제를 해결하였다. 그러나 다양한 분수의 하위개념을 이해하고 있는 아동의 경우라 할지라도 그 아동이 분수의 특정 하위개념을 이해하고 있지 않은 경우에는 그 특정 하위개념의 문제를 해결하지 못하거나, 해결하였더라도 정확하게 자신의 생각을 정당화하지 못하였다. 그리고 분수의 하위개념에 대하여 서로 다른 의미로 이해하고 있는 아동들 간의 문제 해결 방식에서의 차이점이 발견되었지만, 같은 하위개념을 이해하고 있는 아동들 간에도 문제 해결 방식에는 약간의 차이가 나타났다.

본 연구에서는 분수의 하위 개념과 분수의 하위개념에 관한 문제 해결 사이에는 강한 연결성이 발견된 반면, 분수에 대한 아동의 이해와 분수의 사칙연산, 동치분수 문제해결 사이에는 특정한 연결성이 발견되지 않았다. 이 결과는 사례 연구의 특성상 본 연구에 참여한 아동들에게 특정한 연결성이 발견되지 않았기 때문일 수도 있으며, 본 연구에서 사용한 분수의 사칙연산과 동치 문제의 문항의 수가 분수의 하위개념 문항에 비하여 적고, 다양한 문맥이 포함된 문장제이기 보다는 절차적 지식을 이용하여 해결하는 문제들을 제시한 것이 그 이유로 생각된다. 따라서 향후 연구에서는 분수의 하위개념과 분수의 사칙연산, 동치 개념 사이의 연결성을 알아볼 수 있는 다양한 문항을 개발하여 분수에 대한 아동의 개념 구성과 사칙연산, 동치 개념 사이의 연결성을 조사할 것을 제언하는 바이다.

본 연구 결과 많은 아동들이 분수의 사칙연산 과정에서 자연수의 연산과정을 분수의 연산과정에 적용하는 오류를 범하였다. 자연수에 대한 아동의 지식은 분수의 문제해결에 중요한 비계 역할을 하기도 하였지만, 종종 잘못된 문제해결 과정을 이끌기도 하였다(Pearn & Stephens, 2007). 따라서 분수의 개념적 이해 발달을 위해서는 아동들이 범자연수와 분수를 구별하고 통합해야 할 것이다(Amato, 2005) 그리고 분수에 대한 아동의 개념적 이해를 돕기 위해서는 분수 연산의 절차적 기능과 계산 알고리즘을 강조하는 기존의 교육과정과 교수법이 분수의 다양한 하위개념과 분수의 사칙연산의 의미 이해를 강조하도록 변화되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

강흥규 · 고정화 (2003). 양의 측정을 통한 자연수와 분수 지도의 교수학적 의의. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 5(3), pp.385-399.

권성룡 (2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 5(2), pp.259-273.

박교식 · 송상헌 · 임재훈 (2004). 우리나라 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈의 의미 이해에 관한 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 6(3), pp.235-249.

방정숙 · Yeping Li (2008). 예비 초등 교사들의 분수 나눗셈에 대한 지식 분석. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47(3), pp.291-310.

백선수 · 김원경 (2005). 분수의 곱셈에서 비형식적 지식의 형식화 사례 연구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 7(2), pp.139-168.

오영열 (2004). 초등수학에 대한 예비교사들의 이해: 분수의 곱셈을 중심으로. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 6(3), pp.267-281.

오유경 · 김진호 (2009). 분수 개념에 대한 초등학생들의 비형식적 지식 분석: 1-3학년 중심으로. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 23(1), pp.145-174.

임재훈 · 김수미 · 박교식 (2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 7(2), pp.103-121.

정은실 (2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. 대한수학교육학회지 <학교수학>, 8(2),

pp.123-138.

서동엽 (2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. 대한수학교육학회지 <수학교육학연구>, 15(3), pp.233-249.

한혜숙 (2009). Lesh 표상 변환(Translation) 모델을 적용한 3학년 학생들의 분수개념 학습. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 23(1), pp.129-144.

Amato, S. A. (2005). Developing students' understanding of the concept of fractions as numbers. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp.49-56. Melbourne: PME.

________________ (2006). Improving student teachers' understanding of fractions. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp. 41-48. Prague: PME.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*(pp.91-125), NY: Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, pp.323-341.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*(pp.296-333). Reston, Virginia : NCTM.

________________________________ (1993). Rational numbers: Toward a semantic analysis-emphasis on the operator construct. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.13-47). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Behr, M. J., Khoury, H. A., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1997). Conceptual units analysis of preservice elementary school teachers' strategies on a rational-number-as-operator task. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(1), pp.48-69.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum. Part 1: Rationals as measurements. *Journal of Mathematical Behavior*, 23, pp.32-42.

Carraher, D. W. (1996). Learning about fraction. In L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. A. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Thories of mathematical learning*(pp. 241-266). NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Charalambous, C. Y., & Pitta-Pantazi, D. (2006). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, 64, pp.293-316.

Charles, K., & Nason, R. (2001). Young children's partitioning strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 43, pp. 91-221.

Clarke, D. M., & Sukenik, M. (2006). Assessing fraction understanding using task-based interviews. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková, (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, pp.337-344. Prague: PME.

Cramer, K. A., Post, T. R., & del Mas, R. C. (2002). Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students : A comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum, *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(2), pp. 111-144.

Empson, S., Junk, D., Dominguez, H., & Turner, E. (2005). Fractions as the coordination of multiplicatively related quantities: A cross-sectional study of children's thinking. *Educational Studies in*

Mathematics, **63**, pp.1-28.

English, L. D., & Halford, G. S. (1995). *Mathematics education models and processes.* NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Freudentahl, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht : D. Reidel Publishing Company.

Gearhart, M., Saxe, G. B., Seltzer, M., Schlackman, J., Cing, C. C., Nasir, N., Fall, R., Bennett, T., Rhine, S., & Sloan, T. F. (1999). Opportunities to learn fractions in elementary mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30(3)**, pp.286-315.

Horne, M., & Mitchell, A. (2008). Fraction number line tasks and the additively concept of length measurement. In M. Goos, R. Brown, & K. Makar (Eds.) *Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*(pp.353-360). MERGA.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, **39(1)**, pp.33-62.

Jaslow, L., & Vik, T. (2006). Using children's understandings of linear measurement to inform instruction. In S. Z. Smith, & M. E. Smith (Eds.), *Teachers engaged in research: Inquiry into mathematics classrooms, grades pre-K-2.* Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Johanning, D. I. (2008). Learning to use fractions: Examining middle school students' emerging fraction literacy. *Journal for Research in Mathematics Education*, **39(3)**, pp.281-310.

Keijzer, R., & Terwel, J. (2002). Audrey's acquisition of fractions: A case study into the learning of formal mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, **47**, pp.53-73.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.* Windsor: Berkshire.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement : Papers from a research workshop*(pp.101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

__________ (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.). *Number concept and operations in the middle grades*(pp. 162-181). Reston, VG: Lawrence Erlbaum Associates.

__________ (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.49-84), NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Children's cognitive and metacognitive process. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*(pp. 131-156). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

__________ (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. A. Cuoco, & F. R. Curcio (Eds.), *The roles and representations in school mathematics 2001 yearbook*(pp.146-165), National council of teachers of mathematics, Reston : Virginia.

__________ (2002). Part-whole comparisons with unitizing. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions 2002 yearbook*(pp.79-86). Reston, VA: NCTM.

__________ (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding*(2th Ed.) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: building on informal knowledge.

Journal for Research in Mathematics Education, 21(1), pp.16-32.

____________ (1993). Learning rational numbers with understanding: The case of informal knowledge. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research* (pp.85-105). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

____________ (2001). Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding multiplication of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, **32(3)**, pp.267-295.

Merriam, S. B. (1998). Qualitative research and case study applications in education: Revised and expanded from case study research in education. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

Marshall, S. P. (1993). Assessment of rational number understanding: A schema-based approach. In T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research*(pp. 261-288). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational numbers domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, **60**, pp.37-69.

Moss, J., & Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, **30(2)**, pp.122-147.

Noelting, E. (1978). The development of proportional reasoning in the child and adolescent through combination of logic and arithmetic. *Proceeding of the Second Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, pp. 242-277. West Germany.

Pearn, C., & Stephens, M. (2007). Whole number knowledge and number lines help develop fraction concepts. In J. Watson, & K. Beswick (Eds.), *Mathematics: Essential research, essential practice.* (Proceedings of the 30th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia(MERGA), Hobart, **2**, pp.601-610). Sydney: MERGA.

Saxe, G. B., & Gearhart, M. (1999). Rlations between classroom practices and student learning in the domain of fractions. *Cognition and Instruction*, **17(1)**, pp.1-24.

Saxe, G. B., Taylor, E. V., McIntosh, C., & Gearhart, M. (2005). Representing fractions with standard notation: A developmental analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, **36(2)**, pp. 137-157.

Smith III, J. P. (2002). The development of students' knowledge of fractions and ratios. In B. Litwiller, & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp.3-17). Reston, VA: NCTM.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of students' understanding of the numerical value of fraction. *Learning and Instruction*, **14(5)**, pp.503-518.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior*, **22**, pp.237-295.

____________ (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), pp. 129-162.

Stephan, M., & Clements, D. H. (2003). Linear and area measurement in prekindergarten to grade 2. In D. H. Clement, & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement 2003 yearbook*(pp.3-16). Reston, VA: NCTM.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.*

Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Toluk, Z., & Middleton, J. A. (2004). The development of children's understanding of the quotient: A teaching experiment. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 5(10), Article available online http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl/ijmenu.htm.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(4), pp.390-416.

Van de Walle, J. (2006). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (6th ed.). Boston, MA: Allyn & Bacon.

Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Image and definition for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), pp.356-366.

Yanik, H. B., Helding, B., & Flores, A. (2008). Teaching the concept of unit in measurement interpretation of rational numbers. *Elementary Education Online*, 7(3), pp.693-705.

The Impact of Children's Understanding of Fractions on Problem Solving

Kim, Kyungmi
Center for Curriculum and Instruction studies, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail: kyungmi@korea.ac.kr

Whang, Woo Hyung
Dept. of Math. Education, Korea University, Anam-dong, Sungbuk-ku, Seoul, Korea, 136-701
E-mail: wwhang@korea.ac.kr

The purpose of the study was to investigate the influence of children's understanding of fractions in mathematics problem solving. Kieren has claimed that the concept of fractions is not a single construct, but consists of several interrelated subconstructs(i.e., part-whole, ratio, operator, quotient and measure). Later on, in the early 1980s, Behr et al. built on Kieren's conceptualization and suggested a theoretical model linking the five subconstructs of fractions to the operations of fractions, fraction equivalence and problem solving. In the present study we utilized this theoretical model as a reference to investigate children's understanding of fractions. The case study has been conducted with 6 children consisted of 4th to 5th graders to detect how they understand factions, and how their understanding influence problem solving of subconstructs, operations of fractions and equivalence.

Children's understanding of fractions was categorized into "part-whole", "ratio", "operator", "quotient", "measure" and "result of operations". Most children solved the problems based on their conceptual structure of fractions. However, we could not find the particular relationships between children's understanding of fractions and fraction operations or fraction equivalence, while children's understanding of fractions significantly influences their solutions to the problems of five subconstructs of fractions.

We suggested that the focus of teaching should be on the concept of fractions and the meaning of each operations of fractions rather than computational algorithm of fractions.

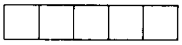
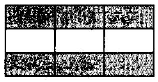
* ZDM classification : C32
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97C30
* Key Words : Fraction, Subconstructions of Fraction, Problem solving

<부록> 평가지

1.  이 전체 구슬의 $\frac{2}{3}$를 나타낸 것이라면, 전체 구슬을 그려보시오.

답 :

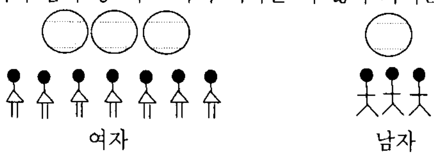
2. $\frac{2}{3}$와 같은 것을 모두 고르시오. 답: (   )

①  ②  ③  ④ 한 대상을 똑같이 세 개의 부분으로 나눈 것 중 두 부분

3. 철수와 영희는 파티를 위해 오렌지 쥬스를 만들고 있다. 다음은 철수와 영희의 쥬스 만드는 방법이다. 오렌지가 가장 많이 들어간 쥬스를 만드는 방법은? 답 : (   )

철수의 방법 : 물 다섯 컵에 오렌지 원액 두 컵을 넣기
영희의 방법 : 물 여덟 컵에 오렌지 원액 네 컵을 넣기

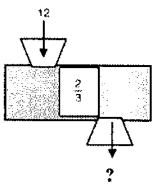
4. 여자와 남자 중 어느 쪽이 피자를 더 많이 가지는가? 답 : (   )



5. 어떤 연산도 하지 않고, 다음 문장이 맞은 것인지 알아보시오.
다음 문장이 맞으면 O, 틀리면 × 표시를 하시오. 답 : (   )

"어떤 수를 4로 나누고 그 결과에 3을 곱한 결과는 그 어떤 수에 $\frac{3}{4}$을 곱한 결과와 같을 것이다."

6. 다음 그림은 입력된 양의 $\frac{2}{3}$를 출력하는 기계를 나타낸 것이다. 입력된 양이 12와 같다면 출력되는 양은 얼마인가? 답 : (   )



7. 다음 문장이 맞으면 O, 틀리면 × 표시를 하시오. 답 : (   )

"$\frac{2}{3}$는 2를 3으로 나눈 몫과 같다."

8. 세 개의 피자를 네 명의 아이들이 공평하게 나누려고 한다. 각각의 아이들은 얼마의 피자를 받게 되는가?
답 : ( )

9. 세 개의 피자를 몇 명의 친구들이 공평하게 나누었다. 각각의 친구들이 피자의 $\frac{3}{5}$ 씩 받았다면, 거기에는 몇 명의 친구들이 함께 있었는가? 답 : ( )

10. 다음 각 수직선 위에 1을 정확하게 표시하시오.

(1)

(2)

11. $\frac{1}{8}$과 $\frac{1}{9}$ 사이에 있는 분수 하나를 쓰시오. 답 : ( )

12. 다음 중 수 인 것에 동그라미를 치시오.

A	4	*	1.7	16	0.006	$\frac{2}{5}$	47.5	$\frac{1}{2}$	$	$1\frac{4}{5}$

13. $6\frac{3}{4}\times4\frac{3}{7}$ 의 계산결과에 가장 근접한 값을 고르시오. 답 : ( )

① 18과 24 사이의 값 ② 25와 28 사이의 값
③ 29와 32 사이의 값 ④ 33과 40 사이의 값

14. 다음을 계산하시오.

① $\frac{5}{8}+\frac{4}{5}=$ ② $\frac{13}{15}-\frac{4}{5}=$

③ $\frac{7}{12}\times\frac{6}{11}=$ ④ $2\div\frac{1}{2}=$

15. 다음 빈칸에 알맞은 수를 구하시오.

① $\frac{2}{3}=\frac{\square}{12}$ 답 : ( )

② $\frac{25}{40}=\frac{5}{\square}$ 답 : ( )

16. 오른쪽 그림을 사용하여 왼쪽의 그림과 같은 분수로 나타내어 보시오.