이산 및 분산 시변 지연을 가진 뉴럴 네트워크에 대한 새로운 시간지연 종속 안정성 판별법

논 문
58-9-25

New Delay-dependent Stability Criterion for Neural Networks with Discrete and Distributed Time-varying Delays

박 명 진* · 권 오 민† · 박 주 현** · 이 상 문***
(Myeong-Jin Park · Oh-Min Kwon · Ju-Hyun Park · Sang-Moon Lee)

Abstract – In this paper, the problem of stability analysis for neural networks with discrete and distributed time-varying delays is considered. By constructing a new Lyapunov functional, a new delay-dependent stability criterion for the network is established in terms of LMIs (linear matrix inequalities) which can be easily solved by various convex optimization algorithms. Two numerical example are included to show the effectiveness of proposed criterion.

Key Words : Neural network, Interval time-varying delays, Lyapunov method, Linear matrix inequality (LMI)

1. 서 론

우리가 다루려고 하는 뉴럴 네트워크(Neural Network)는 생물학적 뉴런(neuron)처럼 행동하는 상호 요소들의 네트워크이고 뉴런은 수학적으로 미분 방정식이나 차분 방정식의 시스템에 의해 설명할 수 있다. 각 단일의 뉴런은 구조가 간단하지만, 그들 중 일부는 서로 연결되어 네트워크를 형성하고 있기 때문에 전체 네트워크는 충분한 역동성을 갖고 많은 분야에 응용되고 있으며, 전자회로 시뮬레이션을 통해 또는 컴퓨터 프로그램에 의해 구현될 수 있다.

최근 뉴럴 네트워크는 패턴인식, 신호처리, 고정점 계산(fixed-point computations) 등뿐만 아니라 특정 최적화 문제 해결과 같은 다양한 분야에서 성공적으로 응용이 되고 있다 [3, 10, 13]. 이러한 응용은 뉴럴 네트워크의 평형점(equilibrium point)의 존재에 의존되고 관련 네트워크의 평형점의 안정성이 요구되어지기 때문에 뉴럴 네트워크의 안정성 문제는 큰 관심을 받고 있으며 주목할 만한 연구결과가 보고되고 있다.

뉴럴 네트워크의 구현에 있어서 이산 지연은 앰프의 유한한 스위칭 속도와 뉴런의 내재된 의사소통 과정에서 종종 발생하게 되어, 쉽게 진동을 일으키거나 시스템을 불안정하게 만들 수 있는 원인으로 알려져 있다 [10, 13]. 따라서 뉴럴 네트워크의 안정성 분석 이론 연구의 중요한 주제가 되었고 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다 [1, 2, 4, 7, 12].

또한, 주목해야할 것은 뉴럴 네트워크 내의 신호 전달 과정에 있어서 특정주기 동안 분산되어 있는 시간 지연, 즉 분산 지연으로 뉴럴 네트워크 모델에 포함되어야 할 것이다. 이런 측면에서 이산 및 분산 지연이 고려된 뉴럴 네트워크의 안정성을 분석하는 연구가 최근 이루어지고 있다. 이 연구에 있어서 주요 관심사는 안정성 판별의 알맞은 영역 또는 안정성을 보장할 수 있는 최대 허용 시간 지연 유계를 얻는 것이다 [6, 9, 11].

본 논문에서는 이산 및 분산 시변 지연이 고려된 뉴럴 네트워크의 지연의존 안정성 분석에 대한 문제를 되짚어 보고 새로운 안정성 판별법을 제안하고자 한다. 지연구간을 두 구간으로 세분하는 새로운 Lyapunov 함수를 구성하고, 이산 시간지연이 세분된 구간에 존재할 때 안정화 조건을 분리하고 적절한 자유 행열을 도입하여 기존의 결과보다 우수한 성능을 얻도록 하는 안정화 조건을 선형행렬부등식(Linear Matrix Inequality: LMI)으로 유도한다. 이와 같이 유도하면 효율적인 convex 최적화 기법을 통해서 쉽게 해를 구할 수 있는 장점이 있다 [14]. 수치예제를 통해 제안된 안정성 판별법의 우수성을 보이고 결론을 맺는다.

기호	
$\mathbf{R}^n$	: n차원의 유클리드 공간
$\mathbf{R}^{m\times n}$	: $m\times n$ 실수 행렬의 집합
$\Vert \cdot \Vert$	: 유클리드 벡터 놈
X, Y	: 양한정 대칭행렬
	$X > Y (X \geq Y) \rightarrow X - Y$ 양한정(반양한정)
$diag\{\cdots\}$	: 대각행렬
$\star$	: 대칭행렬 주대각의 하부 원소

† 교신저자, 정회원 : 충북대학교 전기공학과 조교수
E-mail : madwind@chungbuk.ac.kr
* 준 회 원 : 충북대학교 전기공학과 석사과정
** 정 회 원 : 영남대학교 전기공학과 부교수
*** 정 회 원 : 대구대학교 전자공학부 전임강사
접수일자 : 2009년 7월 1일
최종완료 : 2009년 8월 4일

2. 문제설정

우리는 다음과 같이 이산 및 분산 시변 지연이 고려된 뉴럴 네트워크를 고려한다.

$$\dot{y}(t) = -Ay(t) + W_0 g(y(t)) + W_1 g(y(t-h(t))) + W_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} g(y(t))ds + b. \tag{1}$$

여기에서, $y(t)=[y_1(t),...,y_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$는 뉴런 상태 벡터, $g(t)=[g_1(y_1(t)),...,g_n(y_n(t))]^T \in \mathbf{R}^n$는 뉴런의 활성화 함수, $g(y(t-h(t))=[g_1(y_1(t-h(t))),...,g_n(y_n(t-h(t)))]^T \in \mathbf{R}^n$는 지연된 뉴런의 활성화 함수, $A=diag\{a_i\} \in \mathbf{R}^{n\times n}$는 양한정 대각행렬, $W_0=(w_{ij}^0)_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $W_1=(w_{ij}^1)_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, 그리고 $W_2=(w_{ij}^2)_{n\times n} \in \mathbf{R}^{n\times n}$는 상호연결 행렬로 뉴런의 가중치 계수, $b=[b_1,b_2,...,b_n]^T \in \mathbf{R}^n$는 일정한 입력 벡터, n은 뉴럴 네트워크 내의 뉴런의 수를 의미한다. 그리고 $h(t)$, $\tau(t)$는 다음의 시변 연속 함수를 만족하는 지연이다.

$$0 \le h(t) \le h_U,\ \dot{h}(t) \le h_D,\ 0 \le \tau(t) \le \tau_U \tag{2}$$

여기에서, h_U, τ_U는 양의 스칼라이고 h_D는 임의 일정한 스칼라이다.

활성화 함수 $g_i(y_i(t)), i=1,...,n$는 식 (3) 과 같이 감소하지 않고 전역적 Lipschiz 조건을 만족한다고 가정한다.

$$0 \le \frac{g_i(\xi_i)-g_j(\xi_j)}{\xi_i-\xi_j} \le l_i,\ \xi_i,\ \xi_j \in \mathbf{R}, \quad \xi_i \ne \xi_j,\ i=1,...,n \tag{3}$$

여기에서, $l_i, i=1,...,n$는 양의 일정한 값들이다.

Brouwer의 고정점(fixed-point) 이론을 적용하면 시스템 (1)에 대한 평형점이 적어도 하나는 존재한다는 것을 쉽게 증명할 수 있다 [4].

간단하게 시스템 (1)의 안정성 분석을 위해 평형점 $y^*=[y_1^*,...,y_n^*]^T$을 $x(\cdot)=y(\cdot)-y^*$ 변환을 이용하여 원점으로 이동시키면, 시스템 (1)은 다음과 같은 형태가 된다.

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 f(x(t-h(t))) + W_2 \int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(t))ds \tag{4}$$

여기에서, $x(t)=[x_1(t),...,x_n(t)]^T \in \mathbf{R}^n$는 변환된 시스템의 상태 벡터이고, $f(t)=[f_1(x(t)),...,f_n(x(t))]^T$과 $f_i(x_j(t))=g_j(x_j(t)+y_j^*)-g_j(y_j^*)$, $f_j(0)=0\ (j=1,...,n)$임을 유념하자.

(3)으로부터 $f_j(\cdot)$는 다음의 조건을 만족하고

$$0 \le \frac{f_j(\xi_j)}{\xi_j} \le l_i,\ \forall \xi_j \ne 0,\ j=1,...,n \tag{5}$$

식 (5) 는 다음의 부등식과 등가이다.

$$f_j(\xi_j)[f_j(\xi_j)-l_j\xi_j] \le 0,\ f_j(0)=0,\ j=1,...,n \tag{6}$$

본 논문의 목적은 (2)을 만족하는 지연이 고려된 시스템 (4)의 지연의존 안전성을 분석하는 것이다.

주요 결과를 유도하기 전에 다음의 사실과 보조정리를 제시한다.

사실 1. (Schur Complement) 일정한 값의 대칭행렬 $\Sigma_1<0, \Sigma_2, \Sigma_3$이 주어지고, $\Sigma_1+\Sigma_3^T\Sigma_2^{-1}\Sigma_3<0$이면 다음을 만족한다.

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_3^T \\ \Sigma_3 & -\Sigma_2 \end{bmatrix} < 0, \text{ 또는 } \begin{bmatrix} -\Sigma_2 & \Sigma_3 \\ \Sigma_3^T & \Sigma_1 \end{bmatrix} < 0$$

사실 2. 실수 벡터 a, b와 적절한 차원을 갖는 임의 행렬 $Q>0$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\pm 2a^Tb \le a^TQa + b^TQ^{-1}b$$

제약 조건이 완화된 안정성 판별법을 유도하기 위해 적분 형태의 상한 유계를 유도하는 다음의 보조정리를 사용한다.

보조정리 1.[8] 임의의 상수행렬 $M \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $M=M^T>0$, 그리고 스칼라 $\gamma>0$가 주어지면 벡터 함수 $x:[0,\gamma]\to\mathbf{R}^n$는 다음과 같이 정의되는 적분 관계로 정의된다.

$$\left(\int_0^\gamma x(s)ds\right)^T M \left(\int_0^\gamma x(s)ds\right) \le \gamma \int_0^\gamma x^T(s)Mx(s)ds \tag{7}$$

보조정리 2. 스칼라 $h(t)\ge 0$와 임의의 상수행렬 $Q \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $Q=Q^T>0$에 대하여 다음의 부등식을 적용한다.

$$-\int_{t-h(t)}^{t} \dot{x}^TQ\dot{x}(s)ds \le h(t)\zeta^T(t)\mathbf{X}Q^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t) + 2\zeta^T(t)\mathbf{X}[x(t)-x(t-h(t))] \tag{8}$$

여기에서, $\mathbf{X}$는 적절한 차원을 갖는 고정되지 않은 가중치 행렬이고 $\zeta^T(t)$는 다음과 같다.

$$\zeta^T(t) = [x^T(t)\ x^T(t-h(t))\ x^T\!\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\ x^T(t-h_U)\ \dot{x}^T(t)\ f(x(t))\ f(x(t-h(t)))\ \int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s))ds] \tag{9}$$

증명. 사실 2를 사용하여 다음의 부등식을 적용하면

$$-2\int_{t-h(t)}^{t} (\mathbf{X}^T\zeta(t))^T\dot{x}(t)ds \le \int_{t-h(t)}^{t} [\zeta^T(t)\mathbf{X}Q^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t) + \dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)]ds \tag{10}$$

다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}&-\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^T(s)Q\dot{x}(s)ds \qquad (11)\\ &\le \int_{t-h(t)}^{t}\zeta^T(t)\mathbf{X}Q^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t)ds+2\int_{t-h(t)}^{t}(\mathbf{X}^T\zeta(t))^T\dot{x}(s)ds\\ &= h(t)\zeta^T(t)\mathbf{X}Q^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t)+2\zeta^T(t)\mathbf{X}[x(t)-x(t-h(t))]\end{aligned}$$

이로써 증명을 마친다. ■

3. 주요결과

본 장에서는 시변 지연 (2)가 고려된 뉴럴 네트워크 (4)의 새로운 지연의존 안정성 판별법을 유도할 것이다. 주요 결과를 소개하기 전에 유도되는 행렬을 간단하게 하기 위해 다음과 같이 기호를 정의한다.

$$\begin{aligned}&\Sigma=[\Sigma_{(i,j)}],(i,j=1,\ldots,8)\\ &\Sigma_{(1,1)}=G_{11}+N_{11}-P_1A-A^TP_1^T,\Sigma_{(1,2)}=0,\Sigma_{(1,3)}=G_{12},\\ &\Sigma_{(1,4)}=0,\Sigma_{(1,5)}=R_1-P_1-A^TP_2^T,\Sigma_{(1,6)}=N_{12}+LH_1+P_1W_0,\\ &\Sigma_{(1,7)}=P_1W_1,\Sigma_{(1,8)}=P_1W_2,\Sigma_{(2,2)}=-(1-h_D)N_{11},\Sigma_{(2,3)}=0,\\ &\Sigma_{(2,4)}=0,\Sigma_{(2,5)}=0,\Sigma_{(2,6)}=0,\Sigma_{(2,7)}=-(1-h_D)N_{12}+LH_2,\\ &\Sigma_{(2,8)}=0,\Sigma_{(3,3)}=G_{22}-G_{11},\Sigma_{(3,4)}=-G_{12},\Sigma_{(3,5)}=0,\Sigma_{(3,6)}=0,\\ &\Sigma_{(3,7)}=0,\Sigma_{(3,8)}=0,\Sigma_{(4,4)}=-G_{22},\Sigma_{(4,5)}=0,\Sigma_{(4,6)}=0,\Sigma_{(4,7)}=0,\\ &\Sigma_{(4,8)}=0,\Sigma_{(5,5)}=\frac{h_U}{2}(Q_1+Q_2)-P_2-P_2^T,\Sigma_{(5,6)}=K+P_2W_0,\\ &\Sigma_{(5,7)}=P_2W_1,\Sigma_{(5,8)}=P_2W_2,\Sigma_{(6,6)}=N_{22}-2H_1+\tau_D^2R_2,\Sigma_{(6,7)}=0,\\ &\Sigma_{(6,8)}=0,\Sigma_{(7,7)}=-(1-h_D)N_{22}-2H_2,\Sigma_{(7,8)}=0,\Sigma_{(8,8)}=-R_2,\\ &\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1^T & X_2^T & 0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}^T,\\ &\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0 & Y_1^T & Y_2^T & 0&0&0&0&0\end{bmatrix}^T,\\ &\Gamma=\begin{bmatrix}\mathbf{X} & -\mathbf{X}+\mathbf{Y} & -\mathbf{Y} & 0&0&0&0&0\end{bmatrix},\\ &\overline{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}0 & \overline{X}_1^T & \overline{X}_2^T & 0&0&0&0&0\end{bmatrix}^T,\\ &\overline{\mathbf{Y}}=\begin{bmatrix}0 & \overline{Y}_1^T & 0 & \overline{Y}_2^T & 0&0&0&0\end{bmatrix}^T,\\ &\overline{\Gamma}=\begin{bmatrix}0 & -\overline{\mathbf{X}}+\overline{\mathbf{Y}} & \overline{\mathbf{X}} & -\overline{\mathbf{Y}} & 0&0&0&0\end{bmatrix},\\ &\Pi_1=\begin{bmatrix}0&0&I&0&0&0&0&0\\0&0&0&I&0&0&0&0\end{bmatrix},\\ &\Pi_2=\begin{bmatrix}I&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&I&0&0&0&0&0\end{bmatrix},\\ &\Xi_1=\Sigma+\left(\frac{h_U}{2}\right)^{-1}\Pi_1^T\begin{bmatrix}-Q_2 & Q_2\\ \star & -Q_2\end{bmatrix}\Pi_1,\\ &\Xi_2=\Sigma+\left(\frac{h_U}{2}\right)^{-1}\Pi_2^T\begin{bmatrix}-Q_1 & Q_1\\ \star & -Q_1\end{bmatrix}\Pi_2\end{aligned} \qquad (12)$$

본 논문에서 제안하는 지연의존 안정성 판별법은 다음과 같다.

정리 1. 스칼라 $h_U>0$, $\tau_U>0$, h_D와 $L=diag\{l_1,\ldots,l_n\}$이 주어지고, 다음의 LMI (13)-(16)을 만족하는 양한정 대각행렬 $K=diag\{k_1,\ldots,k_n\}$, $H_1=diag\{h_{1i},\ldots,k_{1n}\}$, $H_2=diag\{h_{2i},\ldots,k_{2n}\}$, 양한정 행렬 $R_i(i=1,2)$, $Q_i(i=1,2)$, $\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ \star & N_{22}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ \star & G_{22}\end{bmatrix}$, 그리고 임의 행렬 P_i, X_i, Y_i, $\overline{X}_i$, $\overline{Y}_i$, $(i=1,2)$가 존재하면, $0\le h(t)\le h_U$, $0\le\tau(t)\le\tau_U$, 및 $\dot{h}(t)\le h_D$에 대하여 시스템 (1)의 평형점은 전역적으로 점근적 안정하다.

$$\begin{bmatrix}\Xi_1+\Gamma+\Gamma^T & \frac{h_U}{2}\mathbf{X}\\ \star & -\frac{h_U}{2}Q_1\end{bmatrix}<0, \qquad (13)$$

$$\begin{bmatrix}\Xi_1+\Gamma+\Gamma^T & \frac{h_U}{2}\mathbf{Y}\\ \star & -\frac{h_U}{2}Q_1\end{bmatrix}<0, \qquad (14)$$

$$\begin{bmatrix}\Xi_2+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^T & \frac{h_U}{2}\overline{\mathbf{X}}\\ \star & -\frac{h_U}{2}Q_2\end{bmatrix}<0, \qquad (15)$$

$$\begin{bmatrix}\Xi_2+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^T & \frac{h_U}{2}\overline{\mathbf{Y}}\\ \star & -\frac{h_U}{2}Q_2\end{bmatrix}<0 \qquad (16)$$

증명. 양한정 대각행렬 $K=diag\{k_1,\ldots,k_n\}$, 양한정 행렬 $R_i(i=1,2)$, $Q_i(i=1,2)$, $\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ \star & N_{22}\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ \star & G_{22}\end{bmatrix}$에 대하여 다음과 같은 Lyapunov 함수를 정의한다.

$$V=\sum_{i=1}^{4}V_i \qquad (17)$$

여기에서,

$$\begin{aligned}V_1&=x^T(t)R_1x(t)+2\sum_{i=1}^{n}k_i\int_0^{x_i(t)}f_i(s)ds,\\ V_2&=\int_{t-h(t)}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ f(x(s))\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ \star & N_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(s)\\ f(x(s))\end{bmatrix}ds,\\ V_3&=\int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t}\begin{bmatrix}x(s)\\ x\left(s-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ \star & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(s)\\ x\left(s-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}ds,\\ V_4&=\int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t}\int_s^t\dot{x}^T(u)Q_1\dot{x}(u)duds+\int_{t-h_U}^{t-\frac{h_U}{2}}\int_s^t\dot{x}^T(u)Q_2\dot{x}(u)duds\\ &\quad+\tau_D\int_{t-\tau_D}^{t}\int_s^t f^T(x(u))R_2f(x(u))duds.\end{aligned} \qquad (18)$$

$V_i(i=1,\ldots,4)$의 시간에 대한 미분은 다음과 같다.

$$\dot{V}_1=2x^T(t)R_1\dot{x}(t)+2f^T(x(t))K\dot{x}(t), \qquad (19)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_2\le&\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x(t))\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ \star & N_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ f(x(t))\end{bmatrix}\\ &-(1-h_D)\begin{bmatrix}x(t-h(t))\\ f(x(t-h(t)))\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}N_{11} & N_{12}\\ \star & N_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-h(t))\\ f(x(t-h(t)))\end{bmatrix},\end{aligned} \qquad (20)$$

$$\begin{aligned}\dot{V}_3=&\begin{bmatrix}x(t)\\ x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ \star & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\\ x(t-h_U)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ \star & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\\ x(t-h_U)\end{bmatrix},\end{aligned} \qquad (21)$$

$$\dot{V}_4 = \frac{h_U}{2}\dot{x}^T(t)Q_1\dot{x}(t) - \int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)ds + \frac{h_U}{2}\dot{x}^T(t)Q_2\dot{x}(t) - \int_{t-h_U}^{t-\frac{h_U}{2}}\dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)ds + \tau_D^2 f^T(x(t))R_2 f(x(t)) - \tau_D\int_{t-\tau_D}^{t} f^T(x(s))R_2 f(x(s))ds. \tag{22}$$

보조정리 1을 사용하여 $\dot{V}_4$의 마지막 적분 형태로부터 다음을 얻고

$$\begin{aligned} &-\tau_D\int_{t-\tau_D}^{t} f^T(x(s))R_2 f(x(s))ds \\ &\le -\left(\int_{t-\tau_D}^{t} f(x(s))ds\right)^T R_2\left(\int_{t-\tau_D}^{t} f(x(s))ds\right) \\ &\le -\left(\int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s))ds\right)^T R_2\left(\int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s))ds\right) \end{aligned} \tag{23}$$

보조정리 1과 2를 사용하여 $\dot{V}_4$의 나머지 두 적분 형태를 $0 \le h(t) \le \frac{h_U}{2}$ 와 $\frac{h_U}{2} \le h(t) \le h_U$으로 나누어 고려하여 다음과 같이 어림한다.

(i) $0 \le h(t) \le \frac{h_U}{2}$일 경우:

$\dot{V}_4$의 나머지 두 적분 의 상한값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)ds \\ &= -\int_{t-h(t)}^{t}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)ds - \int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t-h(t)}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)ds \\ &\le h(t)\zeta^T(t)\mathbf{X}Q_1^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t) + 2\zeta^T(t)\mathbf{X}[x(t) - x(t-h(t))] \\ &\quad + \left(\frac{h_U}{2} - h(t)\right)\zeta^T(t)\mathbf{Y}Q_1^{-1}\mathbf{Y}^T\zeta(t) \\ &\quad + 2\zeta^T(t)\mathbf{Y}\left[x(t-h(t)) - x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\right], \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} &-\int_{t-h_U}^{t-\frac{h_U}{2}}\dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)ds \\ &\le \left(\frac{h_U}{2}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x\left(t-\frac{h_U}{2}\right) \\ x(t-h_U)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -Q_2 & Q_2 \\ \star & -Q_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x\left(t-\frac{h_U}{2}\right) \\ x(t-h_U)\end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{25}$$

여기에서, $\zeta^T(t)$는 (9), $\mathbf{X}$와 $\mathbf{Y}$는 (12)에 정의되어 있다.

제약 조건이 완화된 결과들을 유도하기 위한 도구로 임의 행렬 $P_i(i=1,2)$를 고려한 다음의 식을 추가한다.

$$\begin{aligned} 0 = &\ 2[x^T(t)P_1 + \dot{x}^T(t)P_2]\times \\ &[-\dot{x}(t) - Ax(t) + W_0 f(x(t)) + W_1 f(x(t-h(t))) \\ &+ W_2\int_{t-\tau(t)}^{t} f(x(s))ds] \end{aligned} \tag{26}$$

(5)는 다음과 같은 부등식을 의미함으로

$$f_j(x_j(t))[f_j(x_j(t)) - l_j x_j(t)] \le 0 \ (j=1,\dots,n), \tag{27}$$

$$f_j(x_j(t-h(t)))[f_j(x_j(t-h(t))) - l_j x_j(t-h(t))] \le 0 \ (j=1,\dots,n) \tag{28}$$

위의 두 부등식 (27)-(28)로부터 다음의 부등식을 만족하는 양한정 대각행렬 $H_1 = diag\{h_{1i},\dots,k_{1n}\}$, $H_2 = diag\{h_{2i},\dots,k_{2n}\}$이 존재하게 된다.

$$\begin{aligned} 0 \le &-2\sum_{j=1}^{n} h_{1j}f_j(x_j(t))[f_j(x_j(t)) - l_j x_j(t)] \\ &-2\sum_{j=1}^{n} h_{2j}f_j(x_j(t-h(t)))[f_j(x_j(t-h(t))) - l_j x_j(t-h(t))] \\ = &\ 2x^T(t)LH_1 f(x(t)) - 2f^T(x(t))H_1 f(x(t)) \\ &+ 2x^T(t-h(t))LH_2 f(x(t-h(t))) \\ &- 2f^T(x(t-h(t)))H_2 f(x(t-h(t))) \end{aligned} \tag{29}$$

(18)-(29)로부터 S-procedure [14]를 적용하면, $\dot{V} = \Sigma_{i=1}^{4}\dot{V}_i$는 다음과 같은 새로운 상한 유계를 갖게 된다.

$$\dot{V} = \zeta^T(t)\Omega_1\zeta(t). \tag{30}$$

여기에서,

$$\Omega_1 = \Xi_1 + \Gamma + \Gamma^T + h(t)\mathbf{X}Q_1^{-1}\mathbf{X}^T + \left(\frac{h_U}{2} - h(t)\right)\mathbf{Y}Q_1^{-1}\mathbf{Y}^T, \tag{31}$$

이고 Ξ_1, Γ는 (12)에 정의되어 있다.

$h(t)\mathbf{X}Q_1^{-1}\mathbf{X}^T + \left(\frac{h_U}{2} - h(t)\right)\mathbf{Y}Q_1^{-1}\mathbf{Y}^T$의 항은 $h(t)$에 대하여 행렬 $\mathbf{X}Q_1^{-1}\mathbf{X}^T\zeta(t)$와 $\mathbf{Y}Q_1^{-1}\mathbf{Y}^T\zeta(t)$는 convex 조합이므로 다음과 같이 $h(t)=0$, 와 $h(t) = \frac{h_U}{2}$의 값을 대입하여 $\Omega_1 < 0$인 조건과 상응하는 두 개의 유계 LMI로 다룰 수 있다.

$$\Xi_1 + \Gamma + \Gamma^T + \frac{h_U}{2}\mathbf{X}Q_1^{-1}\mathbf{X}^T < 0, \tag{32}$$

$$\Xi_1 + \Gamma + \Gamma^T + \frac{h_U}{2}\mathbf{Y}Q_1^{-1}\mathbf{Y}^T < 0 \tag{33}$$

사실 1을 사용하면 부등식 (32)과 (33)는 LMI (13)과 (14)와 각각 등가이다.

(ii) $\frac{h_U}{2} \le h(t) \le h_U$일 경우:

$\dot{V}_4$의 나머지 두 적분 의 상한값은 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} &-\int_{t-\frac{h_U}{2}}^{t}\dot{x}^T(s)Q_1\dot{x}(s)ds \\ &\le \left(\frac{h_U}{2}\right)^{-1}\begin{bmatrix} x(t) \\ x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix} -Q_1 & Q_1 \\ \star & -Q_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)\end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{34}$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_{t-h_U}^{t-\frac{h_U}{2}} \dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)ds \\
&= -\int_{t-h(t)}^{t-\frac{h_U}{2}} \dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)ds - \int_{t-h_U}^{t-h(t)} \dot{x}^T(s)Q_2\dot{x}(s)ds \\
&\le \left(h(t)-\frac{h_U}{2}\right)\zeta^T(t)\overline{\mathbf{X}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{X}}^T\zeta(t) \\
&\quad +2\zeta^T(t)\overline{\mathbf{X}}\left[x\left(t-\frac{h_U}{2}\right)-x(t-h(t))\right] \\
&\quad +(h_U-h(t))\zeta^T(t)\overline{\mathbf{Y}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{Y}}^T\zeta(t) \\
&\quad +2\zeta^T(t)\overline{\mathbf{Y}}\left[x(t-h(t))-x(t-h_U)\right]
\end{aligned} \tag{35}
$$

여기에서, $\overline{\mathbf{X}}$와 $\overline{\mathbf{Y}}$는 (12)에 정의되어 있다.

(18)-(23), (26)-(29), (34)-(35)로부터 S-procedure[14]를 적용하면, $\dot{V}=\Sigma_{i=1}^{4}\dot{V}_i$는 다음과 같은 새로운 상한 유계를 갖게 된다.

$$\dot{V}=\zeta^T(t)\Omega_2\zeta(t) \tag{36}$$

여기에서,

$$\Omega_2=\Xi_2+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^T+\left(h(t)-\frac{h_U}{2}\right)\overline{\mathbf{X}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{X}}^T+(h_U-h(t))\overline{\mathbf{Y}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{Y}}^T \tag{37}$$

그리고 Ξ_2, $\overline{\Gamma}$는 (12)에 정의되어 있다.

(32)-(33)과 같은 방법으로, $\frac{h_U}{2}\le h(t)\le h_U$에서 $\Omega_2<0$인 조건과 상응하는 두 개의 유계 LMI로 다룰 수 있다.

$$\Xi_2+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^T+\frac{h_U}{2}\overline{\mathbf{X}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{X}}^T<0, \tag{38}$$

$$\Xi_2+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}^T+\frac{h_U}{2}\overline{\mathbf{Y}}Q_2^{-1}\overline{\mathbf{Y}}^T<0 \tag{39}$$

사실 1을 사용하면 부등식 (38)와 (39)는 LMI (15)와 (16)과 각각 등가이므로, LMI (13)-(16)을 만족한다면 시스템 (1)은 전역적 점근적으로 안정함을 보장할 수 있다. 이로써 증명을 마친다. ■

비평 1. 지연구간 $[0,h_U]$을 $[0,\frac{h_U}{2}]$와 $[\frac{h_U}{2},h_U]$로 나누는 새로운 Lyapunov 함수를 (18)로 제안하였다. 또한 $\dot{V}_3$의 적분 형태로부터 상한 유계를 유도하는 과정에서 다른 논문에서는 고려하지 않은 두 개의 다른 구간인 $0\le h(t)\le\frac{h_U}{2}$과 $\frac{h_U}{2}\le h(t)\le h_U$에 대한 고정되지 않은 가중치 행렬을 소개하였다. 본 연구로부터 지연의존 안정성 판별법에 대한 개선된 실행이 가능한 영역을 얻게 될 것을 기대할 수 있다.

비평 2. (18)의 V_2를 고려하지 않으면, 제안된 안정성 판별법은 $h(t)$의 시간에 대한 미분 정보가 필요하지 않은 식 (4)의 지연의존 안정성 판별법을 쉽게 얻을 수 있다.

4. 수치예제

본 장에서는 수치예제를 통해 본 논문에서 유도된 결과인 정리 1의 우수성을 보이고자 한다.

예제 1. 다음의 값을 갖는 뉴럴 네트워크 (4)를 고려하자.

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3.4\end{bmatrix}, W_0=\begin{bmatrix}-0.9 & -1.5\\ -1.2 & 1\end{bmatrix}, W_1=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6\\ -0.1 & 0.5\end{bmatrix}, W_2=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ -0.2 & 0.1\end{bmatrix},$$
$$L=diag\{1,1\}$$

위의 시스템에 대한 [11]과 [9]에서는 $h(t)=\tau(t)$일 때의 최대 지연 유계는 각각 8.8595와 13.0907이다. 반면, 정리 1을 적용하면 안정성을 보장할 수 있는 지연 유계는 [11]과 [9]보다 큰 값인 14.1925로 얻어진다.

예제 2. 다음의 식과 같이 뉴럴 네트워크 (4)에서 분산지연이 존재하지 않고 이산 지연만 존재하는 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t)=-Ax(t)+W_0f(x(t))+W_1f(x(t-h(t)))$$

여기에서,

$$A=\begin{bmatrix}4.1989 & 0 & 0\\ 0 & 0.7160 & 0\\ 0 & 0 & 1.9985\end{bmatrix}, W_0=\begin{bmatrix}0.4094 & 0.5719 & 0.2503\\ 1.0645 & 0.0410 & -0.9923\\ -0.7439 & 0.6344 & 0.1066\end{bmatrix},$$
$$W_1=\begin{bmatrix}0.3008 & 0 & 0\\ 0 & 0.3070 & 0\\ 0 & 0 & 0.3068\end{bmatrix}, L=diag\{0.4911, 0.9218, 0.6938\}$$

표 1에 최근의 연구와 우리의 새로운 판별법을 적용한 최대 지연 허용 유계의 결과를 비교하였다. 표 1로부터 [5]의 결과보다 더 큰 지연 유계의 값을 가짐을 확인할 수 있다.

표 1 h_D에 따른 지연 유계 h_U (예제 2)

Table 1 Delay bounds h_U with different h_D (Example 2)

h_D	0.8	0.9	unknown
Hua et al.[5]	8.704	4.606	4.145
이론 1	15.379	7.991	7.478

5. 결 론

본 논문은 이산 및 분산 시변 지연이 고려된 뉴럴 네트워크에 대한 새로운 지연의존 안정성 판별법을 제안하였다. 뉴럴 네트워크 (1)의 제약조건이 완화된 안정성 판별법을 얻기 위하여 지연구간을 세분하는 새로운 Lyapunov 함수를 제안하였고, 각 구간별로 고정되지 않은 가중치 행렬이 고려된 적분 형태의 유계 방법이 안정성 판별법의 알맞은 영역을 개선하기 위해 사용되었다. 또한 수치예제를 통하여 소개한 판별법의 우수성과 기존의 결과들보다 개선되었음을 보였다.

감사의 글

This work is the outcome of a Manpower Development Program for Energy & Resources supported by the Ministry of Knowledge and Economy (MKE)

참 고 문 헌

[1] S. Arik, "An analysis of global asymptotic stability of delayed cellular neural networks", IEEE Transactions on Neural Networks, vol.13, pp.1239-1242, 2002.

[2] S. Arik, "An improved global stability result for delayed cellular neural networks", IEEE Transactions on Circuits and Systems I : Regular Papers, vol.49, pp.1211-1214, 2002.

[3] B. Cannas, S. Cincotti and F. Pilo, "Learning of chua's circuit attractors by locally recurrent neural networks", Chaos Solitons & Fractals, vol.12, pp.2109-2115, 2001.

[4] J. Cao, "Global asymptotic stability of neural networks with transmission delays", International Journal of System Science, vol.31 pp.1313-1316, 2000.

[5] C.C. Hua and X. Guan, "New results on stability analysis of neural networks with time-varying delays", Physics Letters A, vol.352, pp.335-340, 2006.

[6] C.H. Lien, "Global asymptotic stability for cellular neural networks with discrete and distributed time-varying delays", Chaos Solitons & Fractals, vol.34, pp.1213-1219, 2007.

[7] H. Cho and J.H. Park, "Novel delay-dependent robust stability criterion of delayed cellular neural networks", Chaos, Solitons & Fractals, vol.32, pp.1194-1200, 2007.

[8] K. Gu, An integral inequality in the stability problem of time-delay systems, Proceedings of39th IEEE Conference on Decision and Control, pp.2805-2810, 2000.

[9] K. Ma, L. Yu, "Global exponential stability of cellular neural networks with time-varying discrete and distributed delays", Neurocomputing, doi:10.1016/j.neucom.2008.10.00 1, 2008.

[10] K. Otawara, L.T. Fan and K. Yoshida, "An articial neural network as a model for chaotic behavior of a three-phase fluidized bed", Chaos Solitons & Fractals, vol.13, pp.353-362, 2002.

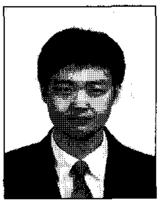
[11] S. Mohamad, "Global exponential stability in DCNNs with distributed delays and unbounded activations", Journal of Computational and Applied Mathematics, vol.205, pp.161-173, 2007.

[12] J.H. Park, "A new stability analysis of delayed cellular neural networks", Applied Mathematics and Computation, vol.181, pp.200-205, 2006.

[13] M. Ramesh and S. Narayanan. "Chaos control of bonhoeffervan der pol oscillator using neural networks", Chaos Solitons & Fractals, vol.12, pp.2395-2405, 2001.

[14] S. Boyd, L.EI Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. SIAM, Philadelphia, 1994.

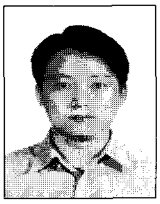
저 자 소 개



박 명 진 (朴 明 眞)

1982년 4월 7일생. 2009년 충북대학교 전기공학과 졸업(공학). 현재 충북대학교 전기공학과 석사과정

E-mail : netgauss@chungbuk.ac.kr



권 오 민 (權 五 珉)

1974년 7월 13일생. 1997년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2004년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공박). 현재 충북대학교 전기공학과 조교수.

Tel : 043-261-2422

Fax : 043-263-2419

E-mail : madwind@chungbuk.ac.kr

박 주 현 (朴 柱 炫)

1968년 1월 11일생. 1990년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 1997년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공박). 현재 영남대학교 전기공학과 부교수

Tel : 053-810-2491

Fax : 053-810-4767

E-mail : jessie@ynu.ac.kr

이 상 문 (李 相 文)

1973년 6월 15일생. 1999년 경북대학교 전자공학과 졸업(공학). 2006년 포항공과대학교 전기전자공학부 졸업(공박). 현재 대구대학교 전자공학부 전임강사.

E-mail : moony@daegu.ac.kr