시변 시간지연을 가지는 불확실 특이시스템의 지연 종속 강인 H_∞ 필터링

논 문
58-9-23

Delay-dependent Robust H_∞ Filtering for Uncertain Descriptor Systems with Time-varying Delay

김 종 해*
(Jong-Hae Kim)

Abstract – This paper is concerned with the problem of delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain descriptor systems with time-varying delay. The considering uncertainty is convex compact set of polytoic type. The purpose is the design of a linear filter such that the resulting filtering error descriptor system is regular, impulse-free, and asymptotically stable with H_∞ norm bound. By establishing a finite sum inequality based on quadratic terms, a new delay-dependent bounded real lemma (BRL) for delayed descriptor systems is derived. Based on the derived BRL, a robust H_∞ filter is designed in terms of linear matrix inequaltity (LMI). Numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key Words : Robust H_∞ filtering, Descriptor systems, Delay-dependent approach, LMI

1. 서 론

H_∞ 필터링 문제[1-9]는 지난 수십년 동안 꾸준히 연구되어져 왔고, 필터 설계의 목적은 필터링 오차 시스템의 H_∞ 성능을 감소화하는 것이다. 고전적인 칼만 필터링과는 대조적으로 H_∞ 필터링은 외부 잡음 신호의 통계적 정보가 필요하지 않고 외부 잡음 신호나 동적 모델에서의 불확실성에 대하여 민감하지 않다는 장점이 있다. 또한, 시간지연은 측정, 전송 및 계산 지연 등으로 인하여 다양한 공학 시스템에 존재하고 종종 성능과 안정성에 영향을 끼치는 요소가 된다[11]. 따라서, 시간지연을 가지는 H_∞ 필터링 문제에 대한 많은 연구결과가 나오고 있는 실정이다. 시간지연을 가지는 시스템에 대한 필터링 연구는 시간지연에 독립적(delay-independent)인 접근 방법[2,9,10,12,13]과 시간지연에 종속적(delay-dependent)인 접근 방법[3,4,6,7,8,14,15,16]의 두 종류로 분류한다. 일반적으로 시간지연에 독립적인 경우가 시간지연의 항이 비교적 작을 때 시간지연에 종속적인 경우보다 보수적(conservative)이다. 따라서, 시간지연을 가지는 시스템을 위한 지연 종속적인 H_∞ 필터가 존재할 조건과 필터 설계방법에 많은 관심을 가지게 되었다. 하지만, 존재하는 모든 결과[1-10,12-16]는 비특이시스템(non-descriptor systems)에 대한 필터링 문제를 다루고 있다. 최근에 필터링 오차 시스템이 주어진 지연 유계(bound)를 위한 최소의 H_∞ 성능을 얻거나 고정된 H_∞ 성능지수를 위한 최대의 시간지연 유계를 보장하는 지연종속 H_∞ 필터링의 연구 결과[4,8]들이 나오고 있다. Fridman 등[3]은 모델 변형을 통하여 시변 시간지연을 가지는 선형 시스템의 강인 H_∞ 필터링 문제를 다루었다.

Gao와 Wang[4,6]은 교차항(cross terms)을 위한 제약 기법(bounding technique)을 이용하여 시간지연을 가지는 시스템의 지연종속 H_∞ 필터 설계 방법을 제시하였다. 이러한 결과들[3,4,6]은 모델 변형이나 제약기법을 사용하므로 보수적인 문제점을 가진다. 이러한 문제점을 없애기 위하여 Zhang과 Han[8]은 새로운 적분 부등식에 의하여 시변 시간지연을 가지는 불확실 선형시스템에 대한 지연종속 강인 H_∞ 필터 설계 기법을 제안하였다. 하지만, 이러한 방법[3,4,6,8]은 특이시스템에 직접적으로 적용할 수 없다. 특별히 특이시스템을 위한 필터의 존재조건이 볼록최적화(convex optimization)가 가능한 선형행렬부등식으로 표현하고자 하면 특이행렬의 존재로 인하여 수식적인 전개에 상당히 어려움이 존재한다. 따라서, 기존의 접근방법으로는 시변 시간지연을 가지는 불확실 특이시스템을 해결하는데 어려움이 있는 실정이다.

상태공간 모델은 매우 유용하지만 상태 변수가 모든 물리적 의미를 포함하지는 못한다. 따라서, 특이 현상은 선형 동적시스템의 자연스러운 형태이고, 물리적 변수들 사이에 존재하는 대수 제약조건을 표현하는 이론적인 면이나 실용적인 면의 관점에서 동적 시스템의 중요한 종류중의 하나이다[17]. 또한, 특이시스템의 안정성과 제어문제는 특이시스템의 특별한 성질로 인하여 대규모 시스템, 특이 섭동 이론, 제약조건이 있는 기계 시스템 등에 광범위하게 적용되어지고 있다. 그러나, 시변 시간지연을 가지는 불확실 특이시스템에 대한 강인 H_∞ 필터링 문제를 다루는 결과는 없는 실정이다.

본 논문에서는 시변 시간지연과 폴리토프 형태의 불확실성을 가지는 특이시스템의 지연 종속 강인 H_∞ 필터 설계방법을 제안한다. 먼저, 자승항을 기초로 하는 유한 합 부등식을 이용하여 새로운 유계 실수정리(bounded real lemma)를 구한다. 구한 유계 실수정리를 기초로 하여 필터가 존재할

* 정 회 원 : 선문대학교 전자공학과 부교수・공박
E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr
접수일자 : 2009년 4월 9일
최종완료 : 2009년 6월 29일

충분조건과 설계방법을 선형행렬부등식 기법에 의하여 제시한다. 또한, 수치 예제를 통하여 제안한 필터 설계방법이 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템도 포함하는 일반적인 알고리듬임을 보인다.

본 논문에서 사용하는 표기는 일반적인 기호를 사용한다. I, 0과 R^r은 적절한 차원을 가지는 단위행렬, 영행렬과 $r\times 1$ 차원을 가지는 실수 벡터를 각각 의미한다. $*$는 대칭 행렬(symmetric matrix)의 주 대각선 아래에 놓이는 요소이고, $diag\{\bullet\}$는 블록 대각 행렬을 의미한다.

2. 문제설정

시변 시간지연을 불확실성 특이시스템

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= Ax(t)+A_d x(t-d(t))+Bw(t) \\ y(t) &= Cx(t)+C_d x(t-d(t))+Dw(t) \\ z(t) &= Lx(t)+L_d x(t-d(t))+Gw(t) \\ x(t) &= \phi(t), \quad t=[-d,0] \end{aligned} \tag{1}$$

을 다룬다. 여기서, $x(t)\in R^n$는 상태변수, $y(t)\in R^m$는 측정변수, $z(t)\in R^p$는 추정되어지는 변수, $w(t)\in R^q$는 잡음 신호, $\phi(t)$는 $[-d,0]$의 구간에서 연속인 초기함수, E는 $rank(E)=r\le n$을 만족하는 특이행렬이고 모든 시스템 행렬은 적절한 차원을 가진다. 시변 시간지연항은

$$0\le d(t)<d<\infty, \quad \dot{d}(t)\le\mu\le 1 \tag{2}$$

를 만족한다. 시스템 행렬은 모르지만 폴리토프형의 알고 있는 블록 컴팩트 집합인

$$X:=(E,A,A_d,B,C,C_d,D,L,L_d,G)\in\Omega \tag{3}$$

에 속한다고 가정한다. 여기서 Ω는

$$\Omega:=\left\{X(\lambda)=\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\chi_i,\ \sum_{i=1}^{l}\lambda_i=1,\ \lambda_i\ge 1\right\}$$

이고 $\chi_i:=(E_i,A_i,A_{di},B_i,C_i,C_{di},D_i,L_i,L_{di},G_i)\in\Omega$, $(i=1,\ldots,l)$이며, χ_i는 다면 정의역(polyhedral domain) Ω의 i번째 꼭지점(vertex)을 표시한다.

본 논문의 목적은 지연 특이시스템 (1)을 위하여 선형 시불변이고 점근적으로 안정한 필터인

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A_f\hat{x}(t)+B_f y(t), \quad \hat{x}(0)=0 \\ \hat{z}(t) &= C_f\hat{x}(t)+D_f y(t) \end{aligned} \tag{4}$$

를 설계하는 것이다. 따라서 결정하여야 할 필터 변수는 $A_f\in R^{n\times n}$, $B_f=R^{n\times m}$, $C_f=R^{p\times n}$와 $D_f\in R^{p\times m}$이다. 보조 상태 벡터를 $\tilde{x}(t):=[x(t)^T\ \ \hat{x}(t)^T]^T$로 두고, 추정오차를 $\tilde{z}(t):=z(t)-\hat{z}(t)$로 정의하면, 필터링 오차 특이시스템은

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) &= \tilde{A}\tilde{x}(t)+\tilde{A}_d\Phi\tilde{x}(t-d(t))+\tilde{B}w(t) \\ \tilde{z}(t) &= \tilde{L}\tilde{x}(t)+\tilde{L}_d\Phi\tilde{x}(t-d(t))+\tilde{G}w(t) \\ \tilde{x}(t) &= [\phi(t)^T\ \ 0]^T, \quad t\in[-d,0] \end{aligned} \tag{5}$$

와 같고, 여기서 변수들은

$$\begin{aligned} &\tilde{E}=\begin{bmatrix}E&0\\0&I\end{bmatrix},\quad \tilde{A}=\begin{bmatrix}A&0\\B_fC&A_f\end{bmatrix},\quad \tilde{A}_d=\begin{bmatrix}A_d\\B_fC_d\end{bmatrix} \\ &\Phi=[I\ \ 0],\quad \tilde{B}=\begin{bmatrix}B\\B_fD\end{bmatrix},\quad \tilde{L}=[L-D_fC\ \ -C_f] \\ &\tilde{L}_d=L_d-D_fC_d,\quad \tilde{G}=G-D_fD. \end{aligned} \tag{6}$$

으로 정의한다. 다음은 특이시스템을 위한 정의를 소개한다.

정의 1[18]: 특이시스템 $E\dot{x}(t)=Ax(t)$에 대하여,

(i) $\det(sE-A)$이 항등적으로 영(identically zero)이 아니면, (E,A)는 정규적(regular)이다.

(ii) $rank(E)=\deg(\det(sE-A))$이면, (E,A)는 임펄스프리(impulse-free)이다.

정의 2[19]: 주어진 양의 상수 $d>0$에 대하여, (E,A)와 $(E,A+A_d)$가 정규적이고 임펄스프리이면, 지연 특이시스템 $E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-d(t))$은 정규적이고 임펄스프리이다.

정의 3: 식 (4)의 형태를 가지는 강인 H_∞ 필터의 목적은 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규적, 임펄스프리, 점근적 안정성 및 $x(t)$의 초기조건이 영인 경우에 대하여 H_∞ 성능지수

$$J_H=\int_0^\infty(\tilde{z}(t)^T\tilde{z}(t)-\gamma^2w(t)^Tw(t))dt<0 \tag{7}$$

을 만족하는 것이다.

논문의 전개를 위하여 $\xi(t):=[\tilde{x}(t)^T\ \ \tilde{x}(t-d(t))^T\Phi^T\ \ w(t)^T]^T$로 두면

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) &= [\tilde{A}\ \ \tilde{A}_d\ \ \tilde{B}]\xi(t):=\Gamma_1\xi(t) \\ \tilde{z}(t) &= [\tilde{L}\ \ \tilde{L}_d\ \ \tilde{G}]\xi(t):=\Gamma_2\xi(t) \end{aligned} \tag{8}$$

과 같다. 여기서, 지연 특이시스템의 유계 실수정리를 구하기 위한 보조정리를 소개한다.

보조정리 1: 임의의 상수 행렬 $M\in R^{n\times 2n}$, $M_3\in R^{n\times n}$, $W\in R^{n\times q}$와 양의 정부호(positive-definite) 행렬 $S\in R^{n\times n}$ 및 시변 시간지연 $d(t)$에 대하여, 아래의 성질

$$-\int_{t-d(t)}^{t}\dot{\tilde{x}}(\theta)^T\tilde{E}^T\Phi^TS\Phi\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(\theta)d\theta\le\xi(t)^T\{\Pi+dY^TS^{-1}Y\}\xi(t) \tag{9}$$

를 만족한다. 여기서, 변수들은

$$\Pi := \begin{bmatrix} M^T E\Phi + \Phi^T E^T M & -M^T E + \Phi^T E^T M_3 & \Phi^T E^T W \\ * & -M_3^T E - E^T M_3 & -E^T W \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$
$$Y := [M\, M_3\, W]$$

이다.

증명: Zhang과 Han[8]의 보조정리 2와 유사하게, 행렬을 $C = \begin{bmatrix} S^{1/2} & S^{-1/2} Y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$으로 두면 $C^T C = \begin{bmatrix} S & Y \\ Y^T & Y^T S^{-1} Y \end{bmatrix} \geq 0$이 되고, 아래의 식

$$\int_{t-d(t)}^{t} \begin{bmatrix} \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(\theta) \\ \xi(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} S & Y \\ Y^T & Y^T S^{-1} Y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(\theta) \\ \xi(t) \end{bmatrix} d\theta \geq 0 \quad (11)$$

을 만족한다. 식 (11)의 항에서 $2\int_{t-d(t)}^{t} \xi(t)^T Y^T \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(\theta) d\theta = 2\xi(t)^T Y^T [E\Phi \quad -E \quad 0]\xi(t)$를 만족하므로 식 (11)을 정리하면 식 (9)가 된다. ■

3. 강인 H_∞ 필터 설계

본 절에서는 정의 3을 만족하는 지연 특이시스템에 대한 새로운 지연종속 유계 실수정리를 제안한다. 그리고 구한 결과를 이용하여 강인 H_∞ 필터가 존재할 조건과 설계방법을 선형행렬부등식 접근방법으로 제시한다.

정리 1: 선형행렬부등식

$$\overline{\Xi} = \begin{bmatrix} \Xi & \Theta \\ * & \Lambda \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S, Q, 양의 상수 ρ와 행렬 M, M_3, W, $\tilde{Z}$가 존재하면, 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정의 3을 만족한다. 여기서, $\tilde{R} \in R^{2n \times 2n}$는 $\tilde{E}^T \tilde{R} = 0$을 만족하는 적절한 차원을 가지는 행렬이고 변수들은

$$\Xi := \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ * & \Xi_{22} & -E^T W \\ * & * & -\rho I \end{bmatrix}, \quad \Theta := \begin{bmatrix} dM^T & \tilde{L}^T & d\tilde{A}^T \Phi^T S \\ dM_3^T & \tilde{L}_d^T & d\tilde{A}_d^T \Phi^T S \\ dW^T & \tilde{G}^T & d\tilde{B}^T \Phi^T S \end{bmatrix}$$
$$\Lambda := diag\{-dS, -I, -dS\}, \quad \rho := \gamma^2$$
$$\Xi_{11} = \tilde{A}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T + \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{A} + \tilde{A}^T P \tilde{E} + \tilde{E}^T P \tilde{A} + M^T E\Phi + \Phi^T E^T M + Q$$
$$\Xi_{12} := \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{A}_d + \tilde{E}^T P \tilde{A}_d - M^T E + \Phi^T E^T M_3$$
$$\Xi_{13} := \tilde{Z} \tilde{R}^T \tilde{B} + \tilde{E}^T P \tilde{B} + \Phi^T E^T W$$
$$\Xi_{22} := -M_3^T E - E^T M_3 - (1-\mu)\overline{Q}$$

와 같다.

증명: 적절한 리아푸노프 함수(Lyapunov function)를

$$V(\tilde{x}(t)) = V_1(\tilde{x}(t)) + V_2(\tilde{x}(t)) + V_3(\tilde{x}(t)) \quad (13)$$

과 같이 설정하고, 각 함수들은

$$V_1(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T \tilde{E}^T P \tilde{E} \tilde{x}(t)$$
$$V_2(\tilde{x}(t)) = \int_{-d(t)}^{0} \int_{t+\tau}^{t} \dot{\tilde{x}}(\theta)^T \tilde{E}^T \Phi^T S \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(\theta) d\theta d\tau \quad (14)$$
$$V_3(\tilde{x}(t)) = \int_{t-d(t)}^{t} \tilde{x}(\theta)^T Q \tilde{x}(\theta) d\theta$$

로 정의하고, 여기서 양의 정부호 행렬 P, S와 Q는 구할 변수들이다. 필터링 오차 특이시스템 (5)에 대하여 리아푸노프 함수 (13)을 시간에 대하여 미분을 하고 보조정리 1을 사용하면

$$\dot{V}_1(\tilde{x}(t)) = \xi(t)^T \{\Sigma \Gamma_1 + \Gamma_1^T \Sigma^T\} \xi(t)$$
$$\dot{V}_2(\tilde{x}(t)) = d\dot{\tilde{x}}(t)^T \tilde{E}^T \Phi^T S \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(t) - \int_{t-d(t)}^{t} \dot{\tilde{x}}(\theta)^T \tilde{E}^T \Phi^T S \Phi \tilde{E} \dot{\tilde{x}}(\theta) d\theta$$
$$\leq d\xi(t)^T \Gamma_1^T \Phi^T S \Phi \Gamma_1 \xi(t) + \xi(t)^T \{\Pi + dY^T S^{-1} Y\} \xi(t)$$
$$\dot{V}_3(\tilde{x}(t)) = \tilde{x}(t)^T Q \tilde{x}(t) - (1-\mu)\tilde{x}(t-d(t))^T Q \tilde{x}(t-d(t)) \quad (15)$$
$$\leq \tilde{x}(t)^T Q \tilde{x}(t) - (1-\mu)\tilde{x}(t-d(t))^T \Phi^T \overline{Q} \Phi \tilde{x}(t-d(t))$$
$$= \xi(t)^T \Gamma_3 \xi(t)$$

와 같고, 여기서 $\Sigma = diag\{\tilde{E}^T P, 0, 0\}$, $\Gamma_3 = diag\{Q, -(1-\mu)\overline{Q}, 0\}$이고 $Q = diag\{\overline{Q}, \overline{Q}\}$이다. $\tilde{E}^T \tilde{R} = 0$이므로

$$2\dot{\tilde{x}}(t)^T \tilde{E}^T \tilde{R} \tilde{Z}^T \tilde{x}(t) = 0 \quad (16)$$

을 유도할 수 있다. 식 (15)와 H_∞ 성능지수 (7)을 이용하면

$$\dot{V}(\tilde{x}(t)) + \tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \quad (17)$$
$$\leq \xi(t)^T \begin{Bmatrix} \Sigma \Gamma_1 + \Gamma_1^T \Sigma^T + d\Gamma_1^T \Phi^T S \Phi \Gamma_1 + \Pi \\ + dY^T S^{-1} Y + \Gamma_2^T \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4 \end{Bmatrix} \xi(t) < 0$$

이 된다. 여기서, $\Gamma_4 = diag\{0, 0, -\rho I\}$. 초기조건이 영이므로, 식 (16)과 (17)로부터

$$J = \int_{0}^{\infty} (\tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \rho w(t)^T w(t)) dt \quad (18)$$
$$\leq \int_{t=0}^{\infty} (\tilde{z}(t)^T \tilde{z}(t) - \rho w(t)^T w(t) + \dot{V}(\tilde{x}(t))) dt$$
$$= \int_{0}^{\infty} (\xi(t)^T \overline{\Xi} \xi(t)) dt$$

과 같이 된다. 따라서, $\overline{\Xi} < 0$을 만족하면 식 (12)는 $J < 0$을 보장한다. 즉, $\|\tilde{z}(t)\|_2^2 < \gamma^2 \|w(t)\|_2^2$을 의미한다. 한편, 식 (12)는 아래의 행렬부등식

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & dM^T & d\tilde{A}^T \Phi^T S \\ * & \Xi_{22} & dM_3^T & d\tilde{A}_d^T \Phi^T S \\ * & * & -dS & 0 \\ * & * & * & -dS \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

를 만족하고, $w(t) = 0$인 필터링 오차 특이시스템 (5)의 점근

적 안정성을 만족하는 $\dot{V}(\tilde{x}(t))<0$을 의미한다. 또한, 정의 1과 2에 의하여 $w(t)=0$인 필터링 오차 특이시스템 (5)가 정규적이고 임펄스플리임을 직접적으로 보일 수 있다. ■

아래의 정리는 폴리토프형 불확실성 (3)을 가지는 필터링 오차 특이시스템 (5)를 고려하기 위하여 유도된 것이다.

정리 2: 아래의 선형행렬 부등식

$$\tilde{\Xi}_{1i}=\begin{bmatrix}\Xi_i & \Theta_i \\ * & \Lambda\end{bmatrix}<0 \tag{20}$$

을 만족하는 양의 정부호 행렬 P, S, Q, 양의 상수 ρ와 행렬 M, M_3, W, $\tilde{Z}$가 존재하면, 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정의 3을 만족한다. 여기서. $\tilde{R}_i \in R^{2n\times 2n}$는 $\tilde{E}_i^T\tilde{R}_i=0$을 만족하는 행렬이고, 변수들은

$$\Xi_i:=\begin{bmatrix}\Xi_{11i} & \Xi_{12i} & \Xi_{13i} \\ * & \Xi_{22i} & -E_i^TW \\ * & * & -\rho I\end{bmatrix},\quad \Theta_i:=\begin{bmatrix}dM^T & \tilde{L}_i^T & d\tilde{A}_i^T\Phi^TS \\ dM_3^T & \tilde{L}_{di}^T & d\tilde{A}_{di}^T\Phi^TS \\ dW^T & \tilde{G}_i^T & d\tilde{B}_i^T\Phi^TS\end{bmatrix}$$

$$\Lambda:=diag\{-dS,-I,-dS\}$$

$$\Xi_{11i}:=\tilde{A}_i^T\tilde{R}_i\tilde{Z}^T+\tilde{Z}\tilde{R}_i^T\tilde{A}_i+\tilde{A}_i^TP\tilde{E}_i+\tilde{E}_i^TP\tilde{A}_i+M^TE_i\Phi+\Phi^TE_i^TM+Q$$

$$\Xi_{12i}:=\tilde{Z}\tilde{R}_i^T\tilde{A}_{di}+\tilde{E}_i^TP\tilde{A}_{di}-M^TE_i+\Phi^TE_i^TM_3$$

$$\Xi_{13i}:=\tilde{Z}\tilde{R}_i^T\tilde{B}_i+\tilde{E}_i^TP\tilde{B}_i+\Phi^TE_i^TW$$

$$\Xi_{22i}:=-M_3^TE_i-E_i^TM_3-(1-\mu)\overline{Q}$$

로 정의한다.

증명: 정리 1로부터 직접 얻을 수 있다. ■

아래의 정리 3에서는 강인 H_∞ 필터가 존재할 충분조건과 필터 설계방법을 정리 2를 기초로 하여 제안한다.

정리 3: 시변 시간지연을 가지는 특이시스템 (1)과 폴리토프형 불확실성 (3)을 고려하자. 아래의 행렬부등식

$$\tilde{\Xi}_{2i}=\begin{bmatrix}\Psi_{1i} & \Psi_{2i} \\ * & \Lambda\end{bmatrix}<0 \tag{21}$$

$$F-P_1<0 \tag{22}$$

를 만족하는 양의 정부호 행렬 P_1, F, S, $\overline{Q}$, $\tilde{Q}$, 양의 상수 ρ와 행렬 M_1, $\tilde{M}_2$, M_3, Z, W, $\overline{A}_f$, $\overline{B}_f$, $\overline{C}_f$, $\overline{D}_f$가 존재하면, 강인 H_∞ 필터 (4)가

$$A_f=\overline{A}_fF^{-1},\quad B_f=\overline{B}_f,\quad C_f=\overline{C}_fF^{-1},\quad D_f=\overline{D}_f \tag{23}$$

과 같이 존재한다. 여기서, $R_i\in R^{n\times n}$은 $E_i^TR_i=0$을 만족하는 행렬이고, 변수들은

$$\Psi_{1i}:=\begin{bmatrix}\psi_{11i} & \psi_{12i} & \psi_{13i} & \psi_{14i} \\ * & \psi_{22i} & \psi_{23i} & \psi_{24i} \\ * & * & \psi_{33i} & \psi_{34i} \\ * & * & * & -\rho I\end{bmatrix}$$

$$\psi_{11i}:=A_i^TR_iZ^T+ZR_i^TA_i+A_i^TP_1E_i+E_i^TP_1A_i +E_i^T\overline{B}_fC_i+C_i^T\overline{B}_f^TE_i+M_1^TE_i+E_i^TM_1+\overline{Q}$$

$$\psi_{12i}:=A_i^TF+C_i^T\overline{B}_f^T+E_i^T\overline{A}_f+E_i^T\tilde{M}_2$$

$$\psi_{13i}:=ZR_i^TA_{di}+E_i^TP_1A_{di}+E_i^T\overline{B}_fC_{di}-M_1^TE_i+E_i^TM_3$$

$$\psi_{14i}:=ZR_i^TB_i+E_i^TP_1B_i+E_i^T\overline{B}_fD_i+E_i^TW$$

$$\psi_{22i}:=\overline{A}_f+\overline{A}_f^T+\tilde{Q},\ \psi_{23i}:=FA_{di}+\overline{B}_fC_{di}-\tilde{M}_2^TE_i$$

$$\psi_{24i}:=FB_i+\overline{B}_fD_i,\ \psi_{33i}:=-M_3^TE_i-E_i^TM_3-(1-\mu)\overline{Q}$$

$$\psi_{34i}:=-E_i^TW$$

$$\Psi_{2i}:=\begin{bmatrix}dM_1^T & L_i^T-C_i^T\overline{D}_f^T & dA_i^TS \\ d\tilde{M}_2^T & -\overline{C}_f^T & 0 \\ dM_3^T & L_{di}^T-C_{di}^T\overline{D}_f^T & dA_{di}^TS \\ dW^T & G_i^T-D_i^T\overline{D}_f^T & dB_i^TS\end{bmatrix},\quad P:=\begin{bmatrix}P_1 & P_2 \\ * & P_3\end{bmatrix}$$

$$F:=P_2P_3^{-1}P_2^T,\quad \tilde{M}:=-M_2P_3^{-1}P_2^T,\quad \tilde{Q}:=P_2P_3^{-1}\overline{Q}P_3^{-1}P_2^T$$

으로 정의한다.

증명: 먼저, 몇 가지 변수를

$$J:=\begin{bmatrix}I & 0 \\ 0 & P_2P_3^{-1}\end{bmatrix},\ T:=diag\{J,I,I,I,I,I\}$$

$$\tilde{R}:=\begin{bmatrix}R_i & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{Z}:=\begin{bmatrix}Z & I \\ 0 & I\end{bmatrix},\ M:=\begin{bmatrix}M_1 & M_2\end{bmatrix} \tag{24}$$

와 같이 정의하고, 필터 변수들을

$$\overline{A}_f:=P_2A_fP_3^{-1}P_2^T,\quad \overline{B}_f:=P_2B_f$$
$$\overline{C}_f:=C_fP_3^{-1}P_2^T,\ \overline{D}_f:=D_f \tag{25}$$

로 두면, 아래의 관계

$$T\tilde{\Xi}_{1i}T^T=\tilde{\Xi}_{2i},\quad i=1,2,\ldots,l \tag{26}$$

을 얻는다. $\tilde{\Xi}_{2i}<0$이면, $\tilde{\Xi}_{1i}<0$을 만족한다. 따라서, 필터링 오차 특이시스템 (5)는 정의 3을 만족한다. $y(t)$에서 $\hat{z}(t)$까지의 전달함수를 $T_{\hat{z}y}=C_f(sI-A_f)^{-1}B_f+D_f$로 정의하면, 식 (25)로부터

$$\begin{aligned}T_{\hat{z}y}&=C_f(sI-A_f)^{-1}B_f+D_f \\ &=\overline{C}_fP_2^{-T}P_3(sI-P_2^{-1}\overline{A}_fP_2^{-T}P_3)^{-1}P_2^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f \\ &=\overline{C}_f(sF-\overline{A}_f)^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f \\ &=\overline{C}_fF^{-1}(sI-\overline{A}_fF^{-1})^{-1}\overline{B}_f+\overline{D}_f\end{aligned} \tag{27}$$

의 관계를 얻는다. 따라서, 식 (23)의 강인 H_∞ 필터를 얻는다. ■

참조 1: 정리 3에서 제안하는 알고리듬은 변수 종속(parameter-dependent) 리아푸노프 함수를 가지는 필터 설계방법으로 쉽게 확장이 가능하다. 또한, 정리 3에서 $\overline{D}_f=0$로 두면 진 유리함수(strictly proper function) 강인 H_∞ 필터를 설계할 수 있다. 또한, 비특이시스템인 $E=I$인 경우에도 정리 3에서 직접 구할 수 있으므로 제안하는 알고리듬은 특이시스템과 비특이시스템을 포함하는 일반적인 지연 특이시스템의 강인 H_∞ 필터링 알고리듬이다.

참조 2: 최소 H_∞ 노옴 유계인 γ를 구하기 위하여 선형행렬부등식 형태인 식 (21)과 (22)는

$$\textit{Minimize } \rho \textit{ subjects to LMI (21) and (22)} \tag{28}$$

과 같은 최적화 문제로 변형할 수 있다. 따라서, 식 (28)로부터 γ의 최소값은 $\gamma_{\min}=\sqrt{\rho}$에 의하여 계산할 수 있다. LMI 도구상자[20]에 의하여 필터 변수와 $\gamma_{\min}$은 직접 구할 수 있다.

예제 1: 제안한 강인 H_∞ 필터 설계 알고리듬의 타당성을 확인하기 위하여 시변 시간지연과 불확실성 및 외란을 가지는 이산시간 특이시스템

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix}-2&0\\0&-0.7+\Delta_1(t)\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}-1&-1+\Delta_2(t)\\-1&-1\end{bmatrix}x(t-d(t))\\
&\quad+\begin{bmatrix}-0.5\\2\end{bmatrix}w(t)\\
y(t) &= [0\quad 1]x(t)+[1\quad 2]x(t-d(t))+w(t)\\
z(t) &= [2\quad 1]x(t)\\
|\Delta_1(t)| &\le 0.2,\quad |\Delta_2(t)|\le 0.5
\end{aligned} \tag{29}$$

를 고려한다. 4개의 꼭지점을 가지는 폴리토프형 불확실성의 지연 특이시스템이다. 특이행렬의 존재로 인하여 기존의 결과들[4,6,8]로는 특이시스템 (29)에 직접 적용할 수 없다. 정리 3에 의하여, $E^TR=0$를 만족하는 $R=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$을 선택하면 $d=0.4$일 때 μ의 다른 값들에 대하여 필터링 오차 특이시스템의 $\gamma_{\min}$ 값은 표 1에 주어진다. 표 1을 보면 μ의 값이 증가할수록 $\gamma_{\min}$의 값이 증가함을 알 수 있다. 예를 들어, $\mu=0.6$이고 $d=0.4$일 때의 진 유리함수와 유리함수의 강인 H_∞ 필터는

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix}-20.2065&14.1973\\10.7026&-4.6348\end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}-0.3206\\-0.6606\end{bmatrix}y(t)\\
\hat{z}(t) &= [0.8751\quad -0.1923]\hat{x}(t)
\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix}57.2871&-34.4009\\-45.6826&32.1899\end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}-0.3136\\-0.6169\end{bmatrix}y(t)\\
\hat{z}(t) &= [-14.2363\quad 10.3598]\hat{x}(t)-0.1635y(t)
\end{aligned} \tag{31}$$

과 같이 정리 3으로부터 직접 구할 수 있다. 구한 강인 H_∞ 필터는 시변 시간지연, 외란 및 불확실성에 대해서도 점근적 안정성과 H_∞ 노옴 유계인 γ를 만족한다.

표 1 특이시스템인 경우의 $d=0.4$일 때 μ의 값에 따르는 $\gamma_{\min}$의 값

Table 1 The value of $\gamma_{\min}$ for different μ when $d=0.4$ in the case of singular system

μ	0	0.2	0.4	0.6	0.8
정리 3 ($D_f=0$)	1.5286	1.7626	2.0955	3.0672	4.6337
정리 3 ($D_f\neq 0$)	1.3782	1.5234	1.7361	1.9995	3.8025

표 2 비특이시스템인 경우의 $d=0.4$일 때 μ의 값에 따르는 $\gamma_{\min}$의 값

Table 2 The value of $\gamma_{\min}$ for different μ when $d=0.4$ in the case of non-singular system

μ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
[8]	1.0445	1.1360	1.2138	1.3449	1.4812	1.5453
정리 3	1.0480	1.1288	1.2122	1.3649	1.4781	1.5500

예제 2: 제안한 지연 특이시스템에 대한 강인 H_∞ 필터 설계방법이 비특이시스템에도 직접 적용가능함을 보이기 위하여 시변 시간지연과 불확실성을 가지는 특이시스템 (29)에서 특이행렬을 $E=I$로 두면 $R=0$이 되고, 예제 1과 동일하게 $d=0.4$일 때 μ의 다른 값들에 대하여 필터링 오차 특이시스템의 $\gamma_{\min}$의 값을 구하면 표 2와 같이 얻을 수 있다. 표 2에서 제안한 필터 알고리듬이 Zhang과 Han[8]에서 제시한 알고리듬에서 구한 $\gamma_{\min}$과 거의 유사한 값을 가지므로 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에도 직접 적용가능함을 보인다. 하지만, Zhang과 Han[8]의 필터 설계방법은 특이시스템에 직접 적용할 수 없다는 단점이 있다. 만약 $\mu=0,4$이고 $d=0.4$인 경우에 강인 H_∞ 필터는

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \begin{bmatrix}-4.7033&2.8622\\1.1902&6.0165\end{bmatrix}\hat{x}(t)+\begin{bmatrix}0.1461\\-0.7303\end{bmatrix}y(t)\\
\hat{z}(t) &= [-2.4483\quad 3.3226]\hat{x}(t)-0.0242y(t)
\end{aligned} \tag{32}$$

와 같이 계산된다.

4. 결 론

본 논문에서는 시변 시간지연을 가지는 불확실성 특이시스템을 위한 지연 종속 강인 H_∞ 필터 설계방법을 제안하였다. 먼저, 시변 시간지연을 가지는 특이시스템의 유계 실수정리를 구하였고 이를 기반으로 강인 H_∞ 필터가 존재할 충분조건과 설계방법을 최적화가 가능한 선형행렬부등식 접근방법으로 제시하였다. 특이행렬을 가지는 지연 특이시스템을 위한 강인 H_∞ 필터의 조건을 선형행렬부등식으로 표현하는 것이 기존의 방법으로는 상당히 어려운 문제이지만 본 논문에서 제안하는 알고리듬을 이용하면 특이시스템 뿐만 아니라 비특이시스템에 대해서도 직접 적용할 수 있는 일반적인 알고리듬이 된다. 마지막으로 예제를 통하여 제안한 강인 H_∞ 필터 설계방법의 타당성을 확인하였다.

참 고 문 헌

[1] A. Elsayed and M. J. Grimble, "A new approach to H_∞ design of optimal digital linear filters," *IMA J. Math. Control Inform.*, vol. 6, pp. 233-251, 1989.

[2] C. E. de Souza, R. Palhares, and P. L. D. Peres, "Robust H_∞ filter design for uncertain linear systems with multiple time-varying state delays," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, pp. 569-576, 2001.

[3] E. Fridman, U. Shaked, and L. Xie, "Robust H_∞ filtering of linear systems with time varying delay," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 48, pp. 159-165, 2003.

[4] H. Gao and C. Wang, "Delay-dependent robust H_∞ and L_2-L_∞ filtering for a class of uncertain nonlinear time-delay systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 48, pp. 1661-1666, 2003.

[5] S. Xu, J. Lam, and Y. Zou, "H_∞ filtering for singular systems," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 48, pp. 2217-2222, 2003.

[6] H. Gao and C. Wang, "A delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, pp. 1631-1640, 2004.

[7] M. M. Zhang and Q. L. Han, "Delay-dependent robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems with time-varying delay based on a finite sum inequality," *IEEE Trans. Circuits and Systems II*, vol. 53, pp. 1466-1470, 2006.

[8] X. M. Zhang and Q. L. Han, "Robust H_∞ filtering for a class of uncertain linear systems with time-varying delay," *Automatica*, vol. 44, pp. 157-166, 2008.

[9] E. Fridman and U. Shaked, "A new H_∞ filter design for linear time delay systems," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, pp. 2839-2843, 2001.

[10] Z. Wang and K. J. Burnham, "Robust filtering for a class of stochastic uncertain nonlinear time-delay systems via exponential state estimation," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 49, pp. 794-804, 2001.

[11] K. Gu, V. L. Kharitonov, and J. Chen, *Stability of Time-delay Systems*, Birkhauser, Boston, 2003.

[12] A. Pila, U. Shaked, and C. E. de Souza, "H_∞ filtering for continuous-time linear systems with delay," *IEEE Trans. Automat. Control*, vol. 44, pp. 1412-1417, 1999.

[13] J. H. Kim, S. J. Ahn, and S. Ahn, "Guaranteed cost and H_∞ filtering for discrete-time polytopic uncertain systems with time-delay," *J. Franklin Inst.*, vol. 342, pp. 365-378, 2005.

[14] W. Zhang, L. Yu, and X. Jiang, "Delay-dependent generalized H_2 filtering for uncertain systems with multiple time-varying state delays," *Signal Processing*, vol. 87, pp. 709-724, 2007.

[15] M. S. Mahmoud, "Delay-dependent H_∞ filtering of a class of switched discrete-time state delay systems," *Signal Processing*, vol. 88, pp. 2709-2719, 2008.

[16] Y. He, G. Liu, D. Rees, and M. Wu, "H_∞ filtering for discrete-time systems with time-varying delay," *Signal Processing*, vol. 89, pp.275-282, 2009.

[17] C. E. de Souza, K. A. Barbosa, and M. Fu, "Robust filtering for uncertain liner discrete-time descriptor systems," *Automatica*, vol. 44, pp. 792-798, 2008.

[18] I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda, "H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach," *Automatica*, vol. 33, pp. 669-673, 1997.

[19] Z. G. Wu and W. N. Zhou, "Delay-dependent robust stabilization for uncertain singular systems with state delay," *Acta Automatica Sinica*, vol. 33, pp. 714-718, 2007.

[20] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, *LMI Control Toolbox*, MA, The MathWorks Inc., 1995.

저 자 소 개

김 종 해 (金 鍾 海)

1993년 경북대학교 전자공학과 졸업. 1998년 동 대학원 전자공학과 졸업(공박). 1998년~2002년 경북대학교 센서기술연구소 전임연구원. 2000년~2001년 일본 오사카대학 객원연구원. 2002년~현재 선문대학교 전자공학과 부교수.

Tel : 041-530-2352

E-mail : kjhae@sunmoon.ac.kr