

집중질량을 갖는 변단면 보강 후판의 자유진동해석

Free Vibration Analysis of Stiffened Tapered Thick Plates with Concentrated Masses

이 용 수† · 김 일 중* · 오 숙 경**

Yong-Soo Lee, Il-Jung Kim and Soog-Kyoung Oh

(2009년 5월 15일 접수 ; 2009년 7월 6일 심사완료)

Key Words : Concentrated Mass(집중질량), Free Vibration(자유진동), Tapered Ratio(변단면률)

ABSTRACT

Recently, as high-rise buildings increase steeply, sub-structures of them are often supported on elastic foundation(in a case of pasternak foundation or winkler foundation). And there are many machines in sub-structures of buildings and slabs of sub-structures are affected by vibration which they make. This paper deals with vibration of plates on elastic foundation. Machines on plates are considered as concentrated mass. This paper has the object of investigating natural frequencies of tapered thick plate on pasternak foundation by means of finite element method and providing kinetic design data for mat of building structures. Free vibration analysis that tapered thick plate with Concentrated Masses in this paper. Finite element analysis of rectangular plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is supported on pasternak foundation. The Winkler parameter is varied with 10, 10², 10³ and the shear foundation parameter is 5, 10. This paper is analyzed varying thickness by taper ratio. The taper ratio is applied as 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0. And the Concentrated Mass is applied as P1, Pc, P2 respectively.

기 호 설 명

$\bar{a} \times \bar{b}$: 판의 크기
 E : 탄성계수
 G : 전단탄성계수
 h : 판 두께
 WFP : Winkler 지반 파라미터
 ρ : 단위 체적당 질량
 ν : 푸아송 비
 w : 수직처짐

P1, Pc, P2 : 위치에 따른 집중질량
 m : 판 전체 질량
 SFP : 전단지반 파라미터
 θ_x : x 방향 회전각
 θ_y : y 방향 회전각
 ω : 판의 고유진동수

1. 서 론

건축 및 토목구조물을 포함한 각종 구조체 및 설비 기기 등은 기하학적인 다양한 형태를 갖고 있다. 또한 이러한 구조물은 지진뿐 아니라 기계적인 동적 진동에 노출되어 있는 경우가 많다. 따라서 지진동이나 기계화에 따른 기계진동과 구조물에 작용하는 진동에 관한 연구의 필요성이 증대되고 있다.

† 교신저자 ; 정희원, 원광대학교 건축공학부
E-mail : struct@wonkwang.ac.kr
Tel : (063)530-9273, Fax : (063)537-0226

* 정희원, 전북과학대학 건축토목계열

** 정희원, 원광대학교

이 연구에서는 MAT형태의 구조체 즉, 건축물의 기초, 진동체의 바닥, 교량의 상판등 구조체 판의 두께가 판의 길이에 따라 선형적으로 변화하는 판을 고려하였으며, 판의 변화는 길이의 변화에 따른 판의 두께 변화를 준 변단면으로 고려하였으며, 지반은 탄성지반으로 이상화 하였다. 또한 기계진동등과 같은 외부 진동에 대한 영향을 파악하기 위해 판에 집중질량을 작용시켰다. 또한 판에 집중질량이 작용하는 위치에 보강재를 두어 이에 따른 진동특성의 변화를 파악하여 변단면 판의 진동 특성을 규명하고자 한다.

그 동안의 연구를 보면 1985년 Rayleigh-Ritz법을 이용하여 비균질 지반에 지지된 판의 동적 해석⁽³⁾을 행하였으며, 같은 해 Modal Constraint법을 이용하여 판의 동적 해석⁽⁵⁾을 행하였다. 1993년 집중질량을 받는 판의 진동 특성⁽⁴⁾에 대해 발표되었다. 2003년에는 Timoshenko Beam Function을 이용한 변단면 후판의 진동해석⁽⁶⁾이 이루어졌다.

국내에서는 변단면 후판에 관한 연구는 활발하지 않은 상태이다. 우선 후판에 관한 연구를 살펴보면 1994년 전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석에 관한 연구가 이루어 졌다, 2003년에는 비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 판의 자유진동해석⁽¹¹⁾이 수행된 바 있었다.

2. 유한요소법에 의한 변단면 후판의 고유진동

가상 일의 원리를 이용하여 탄성지반에 집중질량을 받는 변단면 후판의 진동방정식을 얻는다.

2.1 탄성 지반

탄성지반은 Fig. 1과 같이 지반을 수직 스프링으로 이상화한 Winkler 지반과 변위의 연속성을 고려하기 위한 전단층으로 이상화 한 Pasternak 지반 모형을 사용하였다.

Pasternak 지반을 구성하는 Winkler 지반 매개변수(WFP)와 전단지반매개변수(SFP)는 다음과 같이 정의된다.

$$WFP = \frac{k_w a^4}{D}, \quad SFP = \frac{k_g a^2}{D} \quad (1)$$

여기서,

k_w : Winkler 지반 강성

k_g : 전단지반 강성

a : 판의 길이

b : 판의 폭

D : 판의 휨 강성

2.2 변단면 후판요소

판은 Fig. 2와 같이 두께 h 가 판의 길이에 따라 x 방향에 대해 선형적으로 변하는 변단면 후판으로 두께에 대한 함수는 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \quad (2)$$

여기서, h_0 는 $X=0$ 일 때 판의 두께,

$$\bar{\xi} = \frac{X}{a}, \quad f(\xi) = 1 + \alpha \bar{\xi},$$

$$\alpha = (h - h_0) / h_0 : \text{Tapered Ratio}$$

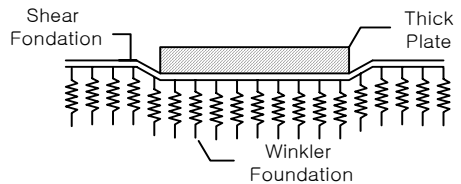


Fig. 1 Modeling of pasternak foundation

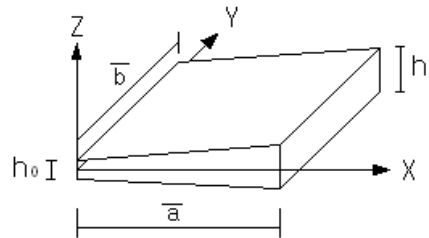


Fig. 2 Tapered thick plate

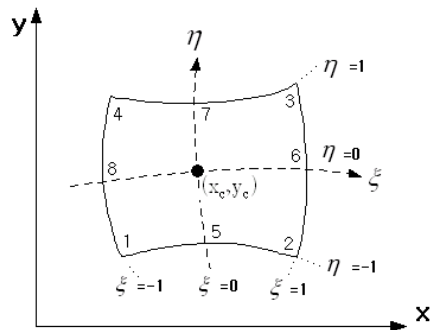


Fig. 3 8-node isoparametric element

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \tag{3}$$

여기서, $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu)$
 ν : 푸아송 비

2.3 변위함수 구성

(1) 판요소의 변위 함수

Fig. 3과 같이 판 요소의 크기를 $2a \times 2b$ 로 정의하고 판 요소의 중심(x_c, y_c)를 요소 좌표계의 원점에 일치시킨 후 무차원 좌표계를 사용하면 $\xi = (x - x_c)/a$, $\eta = (y - y_c)/b$ 가 되고 8절점 serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \tag{4}$$

여기서,

w : 판 요소의 수직변위

θ_x : 판 요소의 x 방향 회전각

θ_y : 판 요소의 y 방향 회전각

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \theta_{x1} \theta_{y1} w_2 \theta_{x2} \theta_{y2} \dots w_8 \theta_{x8} \theta_{y8}]^T$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i) (\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} [(1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta^2)] \tag{5}$$

($i = 1, 2, \dots, 8$)

여기서, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$

(2) 보강재 변위함수

보강재 요소는 Timoshenko 보-기둥 요소의 변위 함수를 이용하였다.

Fig. 4와 같이 임의의 점의 변위와 회전각은 다음과 같은 변위함수로 정의 된다.

$$w(\xi) = [N]_b \{ w_e \} \tag{6a}$$

$$\theta(\xi) = [N]_b \{ \theta_e \} \tag{6b}$$

$$[N]_b = [N_{bl}, N_{bz}, N_{b\theta}] \tag{6c}$$

여기서, $N_{bl} = -\frac{1}{2} \xi(1-\xi)$

$$N_{bz} = (1-\xi)(1+\xi)$$

$$N_{b\theta} = \frac{1}{2} \xi(1+\xi)$$

$$\{ w_e \}^T = \{ w_1^e, w_2^e, w_3^e \}$$

$$\{ \theta_e \}^T = \{ \theta_1^e, \theta_2^e, \theta_3^e \}$$

2.4 판의 강성 행렬 및 질량행렬

가상일의 원리 $\delta(T-U) = 0$ 을 적용하기 위해 변 단면율과 집중질량을 고려한 판 요소의 운동에너지 (T_e)와 지반에 대한 항을 포함한 변형에너지(U_e)를 구하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho \left(h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2 \right) dx dy + \frac{1}{2} m_c (a_1, b_1) \dot{w}^2(a_1, b_1) \tag{7a}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{M}^T \boldsymbol{\chi} dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\psi} dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_w w^2 dx dy + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_g [w_{,x}^2 + w_{,y}^2] dx dy \tag{7b}$$

여기서,

$$\dot{w}(a_1, b_1) = \left[\frac{\partial w}{\partial t} \right]_{x=a_1, y=b_1}$$

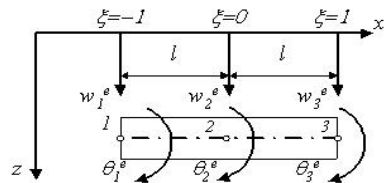


Fig. 4 Timoshenko beam-column element system

m_c : $x = a_1, y = b_1$ 위치의 집중질량

ρ : 판의 단위 면적당 질량밀도

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad \dot{\theta}_x = \frac{\partial \theta_x}{\partial t}, \quad \dot{\theta}_y = \frac{\partial \theta_y}{\partial t}$$

$$M = [M_x M_y M_{xy}]^T, \quad Q = [Q_x Q_y]^T$$

$$\chi = \left[-\frac{\partial \theta_x}{\partial x}, -\frac{\partial \theta_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \right]^T$$

$$\psi = [-\psi_x, -\psi_y] = \left[\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x, \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \right]^T$$

$$w_{,x} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad w_{,y} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

식 (7a)는 판 요소의 회전관성과 집중질량까지 고려한 운동에너지를 나타낸 식이고, 식 (7b) 우변의 첫째 항은 판 요소의 휨변형에너지, 둘째 항은 전단 변형에너지, 셋째 항은 Winkler지반에 대한 에너지, 넷째 항은 전단지반에 대한 에너지를 나타낸다.

식 (7a)의 우변을 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \delta_e^T m_e \dot{\delta}_e + \frac{1}{2} \dot{w}_e^T m_p \dot{w}_e \quad (8)$$

여기서,

$$\overline{m}_e = \begin{bmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & h^3/12 & 0 \\ 0 & 0 & h^3/12 \end{bmatrix}$$

$$m_e = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho N^T \overline{m}_e N dx dy : \text{질량행렬}$$

$$N = [N_1, N_2, \dots, N_8]$$

$$\delta_e = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_8]^T,$$

$$\delta_i = [w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}]^T,$$

$$\dot{w}_e = [\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dots, \dot{w}_8]^T$$

$$m_p = m_c(a_1, b_1) [\overline{N}^T \overline{N}] : \text{집중질량행렬}$$

따라서 식 (7b)는 행렬형태로 다시 정리하면 다음과 같이 된다.

$$U_e = \frac{1}{2} \delta_e^T K_{ef} \delta_e + \frac{1}{2} \delta_e^T K_{es} \delta_e + \frac{1}{2} \dot{w}_e^T K_{fw} \dot{w}_e + \frac{1}{2} \dot{w}_e^T K_{fs} \dot{w}_e \quad (9)$$

여기서,

$$D_f = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

$$\chi = B_f \delta_e = [B_{f1}, B_{f2}, \dots, B_{f8}] \delta_e$$

$$B_{fi} = \begin{bmatrix} 0 - \partial N_i / \partial x & 0 \\ 0 & 0 & -\partial N_i / \partial y \\ 0 - \partial N_i / \partial y & -\partial N_i / \partial x \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

$$K_{ef} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b B_f^T D_f B_f dx dy$$

$$D_s = \frac{Eh}{2(1+\nu)\alpha} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\psi = B_s \delta_s = [B_{s1}, B_{s2}, \dots, B_{s8}] \delta_e$$

$$B_{si} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial x - N_i & 0 \\ \partial N_i / \partial y & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 8)$$

$$K_{es} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b B_s^T D_s B_s dx dy$$

$$\alpha = \frac{6}{5} : \text{전단 보정계수}$$

$$K_{fs} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_y \left\{ \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right) \right\} dx dy$$

$$w_e^T = [w_1, w_2, \dots, w_8]$$

$$K_{fw} = \int_{-a}^a \int_{-b}^b k_w \overline{N}^T \overline{N} dx dy$$

2.5 보강재의 강성행렬 및 질량행렬

가상의 일의 원리와 변위함수를 이용하면 Timoshenko 보-기둥요소의 변형에너지(U_{be}), 운동 에너지(T_{be})는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$U_{be} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_{eb}]_b \{q_e\} + \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_{ew}]_b \{q_e\} + \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_{es}]_b \{q_e\} = \frac{1}{2} \{q_e\}^T [K_e]_b \{q_e\} \quad (10a)$$

$$T_{be} = \frac{1}{2} \{\dot{q}_e\}^T [M_e]_b \{\dot{q}_e\} \quad (10b)$$

여기서,

$$\{q_e\} = [w_1^e, \theta_1^e, w_2^e, \theta_2^e, w_3^e, \theta_3^e]$$

$[K_{eb}]_b$: 보-기둥요소의 휨·전단강성행렬

$[K_{ew}]_b$: 보-기둥요소의 Winkler지반 강성행렬

$[K_{es}]_b$: 보-기둥요소의 전단지반강성행렬

$[M_e]_b$: 보-기둥요소의 병진·회전관성에 따른 연속질량행렬

$[K_e]_b$: 보-기둥요소의 휨·전단 및 탄성지반강성행렬

2.6 고유치방정식

변단면 보강후판의 고유진동수를 얻기 위해 판요소와 보강재 요소의 운동에너지식 (8), 식 (10b)과 변형에너지식 (9), 식 (10a)식에 변분을 취하고 전체 판 요소와 전체보강재 요소에 대해 조합하여 가상일의 원리를 적용하면 변단면 보강후판의 고유진동수를 구할 수 있는 고유치 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$(K_E + K_{Eb} + K_f) - \omega^2 (M_E + M_{Eb} + M_P) = 0 \quad (11)$$

여기서

K_E : 전체 판요소의 요소 강성 행렬

K_{Eb} : 전체 보-기둥 요소의 요소 강성 행렬

K_f : 전체 판의 지반 강성 행렬

M_E : 전체 판 요소의 질량 행렬

M_{Eb} : 전체 보-기둥요소의 질량 행렬

M_P : 전체 판 요소의 집중 질량 행렬

ω : 판의 고유 원 진동수

식 (11)에서 ω^2 은 고유값이 되고, ω 는 판의 고유 원 진동수를 나타낸다.

3. 유한요소해석의 적용

3.1 비교분석

탄성지지원 집중 질량을 갖는 변단면 후판의 고유진동수를 구하기 위해 유한요소법을 적용하였으며, 이 해석 이론 및 유한요소해석의 신뢰성을 검증하기 위해 기존해와 비교하였다. 판의 길이와 두께의 비가 1/20 이하인 판을 박판이라고 하면 이보다 큰 세장비를 갖는 판을 후판으로 하였다⁽¹⁶⁾. 이 논문은 세장비 1/13이 되는 후판으로 해석하였다.

Table 1은 중앙에 집중질량 $m_c = (\rho a^2)/4$ 가 가해진 후판의 고유진동수를 Leissa⁽⁹⁾의 해와 비교한 것이다. Leissa는 dirac delta함수를 이용하여 판의 진동 해석을 하였으므로 고려한 함수의 항수에 따

Table 1 Comparison natural frequency present and Ref.(11) ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$) (position of concentrated mass: center, $\bar{a} \times \bar{b}$ 50 cm×50 cm, t=0.455 cm, all side simple supported)

Ref.(11)		This study
Term	Frequency	Frequency
1	13.96	13.76
2	13.89	
3	13.81	
4	13.79	

Table 2 Natural frequency of tapered thick plates ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D_0}$)

T/R (taper ratio)	Ref. (2)	This study	Error(%)
0.2	21.59051	21.58787	0.01
0.4	23.54861	23.45184	0.19
0.6	25.37844	25.29344	0.33
0.8	27.23463	27.08043	0.56

Table 3 Comparison natural frequencies versus foundation parameters by present and Ref.(13) ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$) (position of concentrated mass: center, 100 cm × 100 cm, t=20.0 cm, all side simple supported) ($\lambda^2 = \omega a^2 \sqrt{\rho/D}$)

SFP	WFP	Ref.[2] (simply supported)	This study (errors)
0	0	17.4486	17.4345 (0.08 %)
	10	17.7208	17.7071 (0.08 %)
	10 ²	20.0042	19.9952 (0.05 %)
	10 ³	35.5028	35.5161 (-0.04 %)
	10 ⁴	98.5331	98.7452 (-0.22 %)
10	0	22.2117	22.1956 (0.07 %)
	10	22.4261	22.4104 (0.07 %)
	10 ²	24.2698	24.2580 (0.05 %)
	10 ³	38.0638	38.0741 (-0.03 %)
	10 ⁴	99.4473	99.6619 (-0.22 %)

* SFP=Shear foundation parameter

* WFP=Winkler foundation parameter

라 값의 차이가 있을 수 있으며, 4차 항까지 고려한 Leissa의 해와 이 해와 비교한 결과 0.22 %의 오차를 보였다.

Table 2는 탄성지반이 없는 상태에서의 변단면 후판의 taper ratio의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56 %의 오차를 나타내어 이 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

Table 3은 Winkler지반 매개변수(WFP)와 전단지반 매개변수(SFP)의 변화에 따른 4변 단순지지 정방형 후판의 고유진동수를 본 해석해와 기존해를 비교한 것이다. Table 2에 의하면 기존해와 이 해석해의 최대 오차가 0.22 % 정도임을 알 수 있으며, Winkler지반 매개변수가 큰 경우 전단지반 매개변수 유무에 따른 고유 진동의 변화가 크지 않으나 (WFP=104, SFP=0일때 $\lambda^2=98.7452$, WFP=104, SFP=10일때 $\lambda^2=99.6619$ 로 λ^2 의 차이는 별로 없다.) Winkler지반 매개변수가 작은 경우 전단지반 매개변수 유무에 따른 고유 진동수의 변화가 커짐을 알 수 있다.(WFP=10, SFP=10일때 $\lambda^2=17.4345$, WFP=0, SFP=10일때 $\lambda^2=22.1956$ 로 λ^2 의 약 27 % 정도 증가)

Table 4는 보강판의 고유진동수(Hz)에 대한 이 연구의 해석해를 범용구조해석 프로그램인 SAP2000과 비교하였다. 이 해석해와 SAP2000의 경우 5차 모드에서 최대 3.89 %의 오차를 보여 이 해석 프로그램의 정확성을 알 수 있었다.

Table 4 Comparison natural frequency of stiffened plates(stiffener : $\delta=0.1, \gamma=0.4$, plate : size =100 cm×100 cm, thick=20 cm, all simply supported, $\nu=0.3$) (Hz)

Mode	This study	SAP 2000	Error(%)*
1	404.94	400.00	1.24
2	906.85	913.14	0.69
3	1126.55	1111.11	1.39
4	1450.91	1428.57	1.56
5	1601.89	1666.67	3.89

$$\delta = A_b/bh, \gamma = EI_b/bD$$

I_b : 보강재의 단면 2차모멘트, A_b : 보강재의 단면적
 b : 판의 폭, E : 탄성계수, D : 판의 휨강성

3.2 판의 자유진동

신뢰성이 검증된 유한요소해석법을 이용하여 탄성 지지된 집중 질량을 받는 변단면 후판의 진동수를 구하였다. 판은 8×8요소로 분할하여 해석하였다.

이 연구를 위한 해석 조건은 다음과 같다.

탄성계수(E) : $2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

단위체적당질량(ρ) : $2.1443 \times 10^{-6} \text{ kgf/cm}^3$

푸아송 비(ν) : 0.3

변단면율(α) : 0.2, 0.25, 0.4, 0.5, 0.6, 0.8

(변단면율은 판의 평균 두께를 일치시켜 판의 질량을 동일하게 하였다)

판의 크기($\bar{a} \times \bar{b}$) : $4.0 \times 4.0 \text{ cm}$

집중질량(M)=0.05 mg, 0.1 mg, 0.15 mg, 0.2 mg, 0.25 mg (m_g : 전체판 질량)

Winkler지반변수 : $WFP = \frac{k_w \bar{a}^4}{D_0} (= 0, 10, 10^2)$

전단 지반 변수 : $SFP = \frac{k_g \bar{a}^2}{D_0} (= 5)$

판의 지지상태 : 4변 단순지지, 4변고정지지

보강재 $\delta = A_b/\sqrt{bh}$: 0.1, $\gamma = EI_b/\sqrt{b}D_0$: 0.4

I_b : 보강재의 단면 2차모멘트,

A_b : 보강재의 단면적

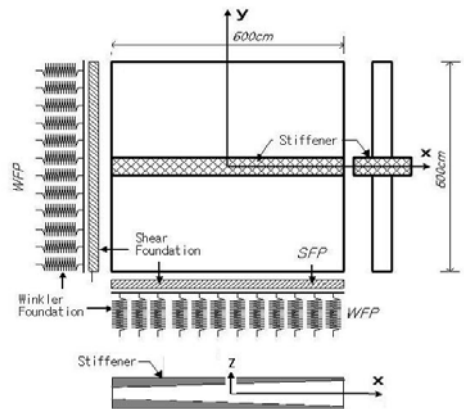


Fig. 5 Stiffened plate modelling on pasternak foundation

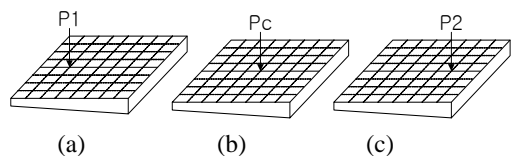


Fig. 6 Position of concentrated mass

Figs. 7~14는 탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 보강 후판의 지반개변수(WFP, SFP), 집중질량의 크기와 위치변화, 판의 변단면율에 따른 진동수의 변화를 그래프로 나타낸 것이다.

먼저 Fig. 7은 WFP=100, SFP=5.0인 판에 Fig. 6(b)와 같이 집중질량이 중앙에 작용한 경우 집중질량의 크기와 판의 변단면율에 따른 고유진동수를 각 변단면율에 따라 나타낸 그림이다. 그림에서 보는 바와 같이 단순지지된 변단면판에 집중질량이 작용하지 않는 경우(mass=0) 판의 변단면율(T/R)이 커질수록 판의 고유진동수가 커지는 것을 알 수 있다. 판에 집중질량이 작용하는 경우는 집중질량이 작용하지 않는 경우에 비해 판의 고유진동수가 급속히 감소함을 알 수 있으며, 집중질량비가 커짐에 따라 각 변단면율의 진동수는 작아지는 양상을 보이다가 집중질량비가 어느 일정치에 이르면 각 변

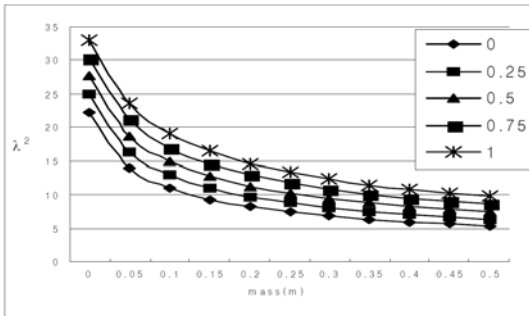


Fig. 7 Variation of natural frequencies(position of concentrated masses : center, WFP=100, SFP=5.0, T/R=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, all side simple supported)

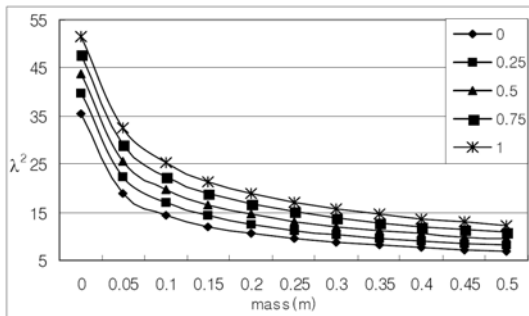


Fig. 8 Variation of natural frequencies(position of concentrated masses : center, WFP=100, SFP=5.0, T/R=0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0, all side Fixed)

단면율에 따라 일정한 고유진동수 값에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 8은 Fig. 7과 같은 조건에서 판의 경계조건만 고정지지의 변화시켰을 경우 변단면 판의 고유진동수를 나타낸 것으로 단순지지의 고유진동수에 비해 더 크게 나타났으나, 집중질량과 변단면율에 따른 고유진동수 변화는 단순지지와 유사한 변화 양상을 보이다가 집중 질량이 큰 경우(mass=0.5) 고유진동수는 단순지지의 값과 거의 유사한 값을 보임을 알 수 있다.

Fig. 9는 단순지지 조건에서 변단면율(T/R)을 0.2, WFP=100, SFP=5.0으로 일정하게 한 경우에 대해 Fig. 6(a)~(c)에서 보는 바와 같이 집중질량의 위치 변화에 따른 고유진동수 변화를 그래프로 나타낸 것이다. Fig. 9에서 보듯이 집중질량이 커짐에 따라 변단면판의 고유진동수는 감소하였다. 집중질량이 판의 중앙에 작용하는 경우와 집중질량이 판 두께가 얇은 부위에 작용하는 경우는 거의 비슷한 고유진동수 값을 보였으며, 판의 두께가 두꺼운 부분에 집중질량이 작용하는 경우는 위 두 경우에 비해 큰 고유진동수 값을 보임을 알 수 있다. 따라서 집중질량이 판의 두꺼운 쪽에 작용하는 경우가 다른 위치에 집중질량이 작용하는 경우보다 집중질량에 의한 진동수 변화가 비교적 작을 것으로 판단된다.

Figs. 10~11은 변단면판의 WFP=100, SFP=5.0으로 일정한 경우 변단면율과 집중질량의 작용위치 변화와의 관계를 나타낸 것이다. 변단면 판의 고유진동수는 변단면율이 증가함에 따라 선형으로 증가하는 것을 볼 수 있다. 집중하중이 P2에 작용하는 경우 변단면율이 커짐에 따라 판의 고유진동수도

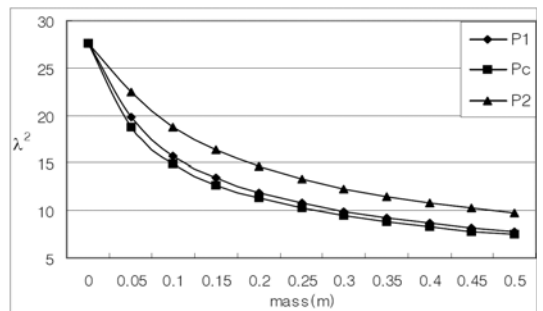


Fig. 9 Variation of natural frequencies versus vibrations concentrated masses(all side simple supported)

급격하게 증가하는 것을 볼 수 있으나, 집중하중이 P1에 작용하는 경우 변단면율이 커짐에 따라 판의 고유진동수는 완만하게 증가하는 것을 볼 수 있다. 각 집중질량 위치에 따른 고유진동수의 변화 양상은 단순지지의 경우 $TR=0.75$ 이상인 경우에서 Pc의 고유진동수가 P1보다 오히려 크게 나타났고, 고정 지지의 경우는 $TR=1.0$ 인 경우 Pc와 P1의 고유진동수가 거의 같아지는 것을 볼 수 있다. 이는 집중질량이 작용하는 위치가 판의 강성이 다르므로 그에 따른 판의 전체진동수에 미치는 영향정도가 다르기 때문인 것으로 판단된다. 따라서 진동수에 영향은 집중질량의 위치는 변단면율이 큰 쪽에 집중질량이 작용할 경우 판의 진동수에 영향이 적은 것으로 보인다.

Figs. 12~13은 판을 지지하는 탄성지반변수의 변화와 집중질량의 작용 위치에 따른 고유진동수의 변화를 나타낸 그래프이다. 탄성지반변수(WFP)가 증가함에 따라 각 집중질량의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다. 집중질량이 P2에 작용하는 경우는

P1, Pc에 비해 높은 고유진동수를 보였으며, 단순지지의 경우는 $WFP=200$ 을 초과한 경우 집중질량이 P1에 작용한 경우보다 Pc에 작용한 경우의 고유진동수가 오히려 더 크게 나타나는 것을 볼 수 있으나, 고정지지의 경우는 고유진동수 크기는 집중하중이 Pc, P1, P2 순서로 크게 나타났으며 단순지지와

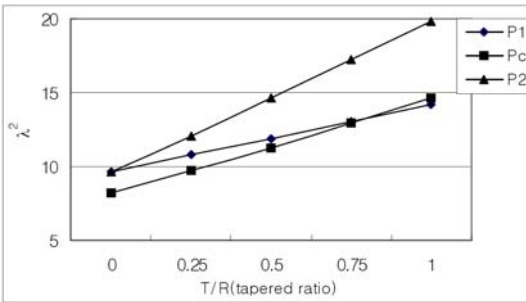


Fig. 10 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(T/R) (all side simple supported)

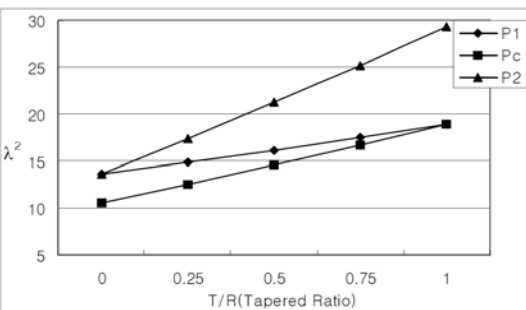


Fig. 11 Variation of natural frequencies versus vibrations of tapered ratio(T/R) (all side Fixed)

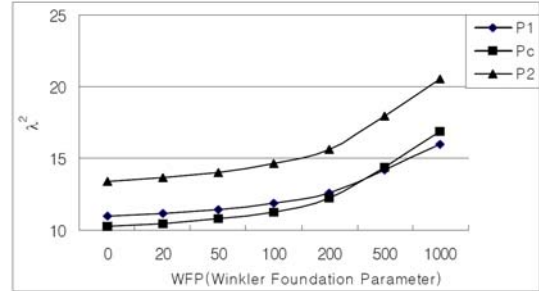


Fig. 12 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation parameter (all side simple supported)

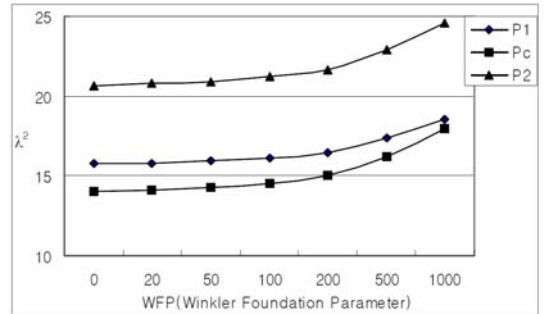


Fig. 13 Variation of natural frequencies versus vibrations of Winkler foundation parameter (all side Fixed)

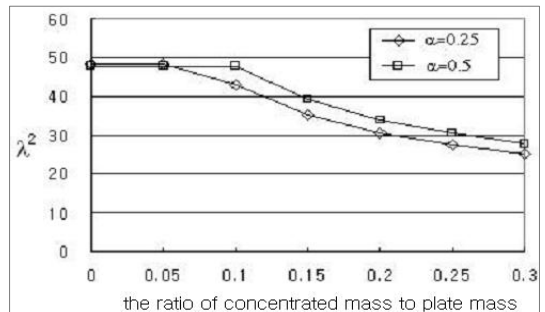


Fig. 14 Comparison of natural frequency according to variation of concentrated mass ($\delta=0.1$, $\gamma=0.4$, $WFP=10$, $SFP=5$, in-plane force= $0.4\sigma_{cr}$)

같이 고유진동수의 반전은 보이지 않았다.

Fig. 14는 집중질량의 크기 변화에 따른 보강 변단면판의 고유진동수를 비교한 것이다. 이 경우 지반은 WFP=10과 SFP=5를 고려하였으며, 보강재는 $\delta=0.1$, $\gamma=0.4$ 인 경우에 대해 고려하였다. 이 경우 집중질량비가 0.05 이하일 때 변단면을 α 가 작은 경우 큰 고유진동수를 갖으나 집중질량비가 0.05를 초과하는 경우 α 가 작을수록 작은 진동수를 보이며 감소하는 것으로 나타났다.

4. 결 론

이 연구는 탄성지지된 집중질량을 갖는 변단면 보강후판의 자유진동해석에 관한 연구이다. 지반은 전단지반과 Winkler지반이 고려된 Pasternak지반으로 모델링하였으며, 판의 변단면율과 판에 작용하는 집중질량의 크기 및 위치 변화, 보강재의 크기변화에 따른 고유진동수를 산정하여 이에 따른 고유진동수의 변화를 검토하였다.

그 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 변단면율에 따른 진동수의 변화는 변단면율이나 판의 지지 상태에 따라 모두 비슷한 감소양상을 보였다. 집중 질량이 증가함에 따라 고유진동수는 일정한 값에 수렴하여 감을 알 수 있으며 판의 경계조건에 따른 차이는 거의 나타나지 않음을 알 수 있다.

(2) 변단면율에 대해 집중질량이 판의 중앙에 작용하는 경우가 가장 낮은 고유진동수를 나타냈으며, 판의 두께가 얇은 곳에 집중질량이 작용하는 경우보다 판의 두께가 두꺼운 곳에 집중질량이 작용하는 경우의 고유진동수가 높게 나타났다.

(3) 탄성지반 매개변수(WFP)가 증가함에 따라 각 집중질량의 위치에서의 고유진동수도 증가함을 볼 수 있다.

(4) 보강재의 크기나 지반강성이 커질수록 고유진동수는 증가하다 어느 일정한 값에 수렴을 하였다. 집중질량이나 면내응력이 커질수록 고유진동수는 감소하였다.

후 기

이 논문은 2007학년도 원광대학교 교내 연구비에

의해 연구되었음.

참 고 문 헌

(1) Low, K. H., Ng, C. K. and Ong, Y. K., 1993, "Comparative Study of Frequencies for Carrying Mass," ASCE J.Engng Mech. ASCE, Vol. 119, No. 5, No. 917-937.

(2) Leissa, A. W., 1973, "The Free Vibration of Plates," Journal of Sound and Vibration, Vol. 31, No. 3, pp. 257~293.

(3) Laura, P. A. A. and Gutierrez, R. H., 1985, "Transverse Vibration of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part I: Rayleigh-Ritz Method," Journal of Sound and Vibration, Vol. 101, pp. 307~315.

(4) Kukreti, A. R., Farsa, J. and Bert, C. W., 1996, "Differential Quadrature and Rayleigh-Ritz Method to Determine the Fundamental Frequencies of Simply Supported Rectangular Plates with Linearly Varying Thickness," J. Sound and Vibration, Vol. 189, pp. 103~122.

(5) Cheung, Y. K., Zhou, D., 2003, "Vibration of Tapered Mindlin Plates Terms of Statics Timoshenko Beam Functions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 260, pp. 693~709.

(6) Horenberg J. A. G. and Kerstens, J. G. M., 1985, "Transverse Vibrations of Rectangular Plates on Inhomogeneous Foundations Part II : Modal Constraint Method," Computers and Structures, Vol. 101, pp. 317~324.

(7) Matsunaga, H., 2000, "Vibration and Stability of Thick Plates in Elastic Foundations," Journal of Engineering Mechanics, pp. 27~34.

(8) Celik, M. and Saygun, A., 1999, "A Method for the Analysis of Plates on a Two-parameter Foundation," Computer and Structure, Vol. 36, pp. 2891~2915.

(9) Leissa, A., 1993, "Vibration of Plates," Acoustical Society of America.

(10) Kim, I.-J., 2005, "Free Vibration of Thick Plates with Concentrated Masses on In-homogeneous

Pasternak Foundation,” Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 13, No. 4, pp. 281~289.

(11) Oh, S. K. 2003, “Free Vibration Analysis of Thick Plate Subjected to In-plane Force on Inhomogeneous Pasternak Foundation,” Korean Society of Steel Construction, Vol. 15, No. 3, pp. 291~298.

(12) Kim, I.-J., 2005, “Free Vibration Analysis of Tapered Opening Thick Plate,” Proceedings of the

KSNVE Annual Autumn Conference, pp. 907~910.

(13) Lee, B. G., et al., 2007, “Parametric Studies of Flexural Free Vibrations of Circular Strip Foundations with Various End Constraints Resting on Pasternak Soil”, Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 17, No. 9, pp. 835~846.

(14) Ugral, A. C., 1981, “Stresses in Plates and Shells,” McGraw-Hill.