대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 3, 443-459. Aug 2009

라디안의 속성에 관한 연구 : 1rad 은 각인가 실수인가?

김 완 재*

라디안에 관한 많은 교육적 논의에도 불구하고 교수자나 학습자 모두에게 라디안은 쉽지 않은 개념으로 받아들여지고 있다. 이러한 상황은 라디안에 대한 본질적 이해에 대한 수학적 연구의 부족에서 일차적인 이유를 찾을 수 있을 것이다. 또한 물리학에서의 편의성을 위한 '무차원 단위로서의 라디안' 이라는 개념에 얽매여 수학적 연구에 있어서의 고정관념을 형성하고 있는 것이 또 다른 이유로 보인다. 마지막으로 대학과정의 고등수학에서 다뤄지는 삼각함수의 개념들을 엄밀히 분석하고 이해하지 않은 채로 중등학습에 그 개념들을 도입하려는 과정에서 또 다른 문제점들이 발생하고 있는 것으로 파악된다. 이에 본 연구에서는 라디안의 본질적 속성과 더불어 여러 오개념들에 대한 이론적 연구를 통해 라디안에 대한 이해를 돕고자 하며, 나아가 라디안 개념 지도에 있어서의 도움을 제시하고자 한다.

I. 서 론

삼각함수의 도입에 있어서 라디안에 대한 이해는 무엇보다 중요하다 할 것이다. 호도법이 도입되기 이전부터 사용되던 60분법은 완성된 원을 하나의 완전체로써 파악하고 그것을 360 등분하여 기본 단위인 1°를 만들어 낸다. 이것은 고대 바빌로니아에서 그 기원을 찾을 수 있으며, 1년이라는 단위가 360일로 근사적으로 파악되는 것에서 360이라는 수가 사용된 이유를 찾을 수 있을 것으로 보인다(이상훈, 1995). 즉 1년이라는 하나의 주기(원)를 360등분 하면 1일이라는 단위가 나오는 것과 각을 연관시킨 것으로 파악 가능하다. 이러한 일상의 현상과 60분법사이의 연관성으로 인해서 학생들의 인지 체계에 있어서 60분법은 매우 자연스러운 단위계이다. 하지만 수학적인 관점에서 볼 때 원은 그 둘레의 길이를 주어진 반지름으로부터 구하는 데 있어서 초월수 π와의 관계를 도입해야만 한다. 즉 반지름의 2π배의 둘레를 가지는 원을 기본 단위로서 파악하게 되면, 수학적으로 매우 자연스럽지 못한 결과물들이 유도되게 된다. 특히나 미적분을 다루는 데에 있어서는 더욱 그러한 일들이 벌어지게 된다. 예를 들어 $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$ 라는 식은 호도법을 사용할 때에만 유도되는 결과이며, 60분법을 사용했을 때에는 $\frac{d}{dx}\sin x^\circ = \frac{\pi}{180}\cos x^\circ$ 라는 다소 번거로운 식이 된다.

이러한 상황은 마치 로그를 다루는 데 있어서 우리가 일상적으로 자연스럽다고 느끼는 상용로그(밑이 10인 로그)를 사용하는 것 보다 자연로그(밑이 e인 로그)를 도입하여 사용하게 되

* 서울대학교 사범대학 수학교육과 재학생, dogiscat@naver.com

면 수학적 결과물들이 좀 더 효율적이고 자연스러운 결과물들을 낳는 것(Toeplitz, 2006)과 유사하다. 즉 때로 익숙한 일상적 관념과 수학적 관념의 인지체계는 수학적 관념의 도입 단계에서는 불일치할 수도 있는 것이다. 하지만 이러한 일상적 관념과 수학적 관념의 불일치는 언뜻 부자연스러워 보이는 초반 도입 단계를 극복하고 차후 수학적 의미를 파악하게 되면 자연스럽게 해소된다. 즉, 자연상수 e의 도입 의미를 알게 되고 나서부터는 그것이 매우 자연스러운 수로 받아들여지는 것과 마찬가지로 호도법 또한 마찬가지로 수학적 관점에서 호도법이 가지는 의미를 알게 되면 60분법에 비해서 훨씬 자연스러운 단위로 받아들여지게 되는 것이다.

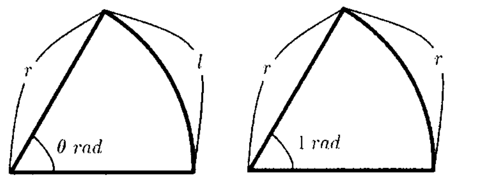
하지만 학생들은 라디안 단위를 자연스러운 단위로 받아들이는 데 있어서 많은 어려움을 겪고 있는 것으로 나타나고 있다. 여러 선행 연구들에서 학생들은 라디안이 무엇인지 잘 이해하고 있지 못한 것으로 분석되고 있다. 장영수(2006)는 학생들이 라디안과 육십분법 사이의 변환은 잘 다루고 있으면서도 라디안이 각의 크기를 나타내는 단위라는 것을 이해하지 못하고 있다고 지적하였으며 라디안(rad)과 도(°)단위를 혼용하여 쓰는 등의 오개념이 나타난다 하였다. 정현아(2008)는 대부분의 교과서에서 qπ 형태의 각을 대부분 다루고 있는 것으로 인해서 라디안 각에는 언제나 π가 붙는다는 오개념을 가지게 된다고 보았다. 송은영(2008)은 교과서에서 삼각함수의 값을 계산 하는 데에 있어서 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ 등의 제한된 값으로만 제시하게 되어 특수한 값에 대한 삼각함수 값만을 안식할 수 있게 된다고 보았다. 나병채(2002)는 학생들이 라디안에 대한 정의와 라디안에 대한 이해가 모두 결여된 채 공식만을 암기하여 모든 것을 공식을 통하여 해결하려는 경향이 있는 것으로 분석하고 있다.

이상의 연구들에서는 학생들이 호도법을 제대로 이해하지 못하는 실태를 분석하고 있으며, 이구동성으로 호도법 이해의 중요성을 역설하고 있다. 또, 호도법이 60분법과 상호 변환 가능 하다는 것에 중심을 맞추어 교육하기 보다는 호도법 자체의 이해를 강조해야 한다고 보았다. 하지만 이러한 연구들에서도 라디안의 본질적인 부분에 대한 제시보다는 교육적 실태 조사에 머무르고 있다. 교수학적 관점에서 라디안을 어떻게 이해하고 가르칠 것인가 하는 것에 대한 공감대는 형성되어 있으나 그 해결책에 대해서는 아직 의문점이 많은 것이 현재의 상황이라고 볼 수 있는 것이다. 이에 교수학적 관점에서 호도법에 대한 연구의 필요성이 제시되며, 남진영,임재훈(2008)은 호도법을 교수학적 관점에서 실수와 각이라는 양면적인 성질을 바탕으로 그 본질에 대해서 고찰하기도 하였다.

본 연구에서는 라디안이 가진 본질적 속성이 무엇인지를 분석하고, 라디안이 가진 현재의 여러 쟁점에 대한 해결책을 도출한다. 또 그러한 결과로써 도출되는 라디안 개념의 본질과 지도 방안에 대해서 분석을 시도하고자 한다. 본 연구의 II장에서는 현재 라디안을 파악하는 두 가지 입장에 대해서 분석한다. III장에서는 두 가지 접근 방식을 하나로 통합하고 두 가지 접근 방식 중 하나는 사실상 다른 하나로부터 유도된 결과물임을 보이려 한다. 이 과정에서 라디안근 방식을 하나와 호도법 체계의 장점에 대한 본질적인 근유를 고찰하며, 라디안을 실수로 파악하는 관점 내식을 주장들에 관한 반박의 형식을 취하고 있다. IV장에서는 라디안을 측정 가능한 각의 단위로서 파악할 때의 장점에 대해서 연구한다. 마지막 V장에서는 III장과 IV장의 논의를 바탕으로 라디안 교육에 있어서 교수학적 관점에서의 제언을 하고자 한다.

II. 라디안에 대한 두가지 접근

라디안에 대해서 두가지 방법으로 접근하는[1] 것이 가능하다. 하나는 호의 길이와 반지름 사이의 비(比)로 파악하는 경우이다. 이 경우에 1rad 는 호의 길이 1을 반지름 1로 나눈 것으로 파악되며 일반적으로 이 경우 라디안은 무차원(dimensionless)인 것으로 파악된다. 다른 하나는 측정가능한 단위량으로서 1rad 을 정의하는 방식으로써 이 경우에는 반지름과 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 1rad 으로 정의한다. ([그림 II-1]) 서울대학교 중앙 도서관에 소장된 Algerbra & Trigonometry 서적 13종을 분석해 본 바, 라디안에 대한 정의는 위에서처럼 크게 두가지로 나뉘는 것을 알 수 있다. *College algebra and Trigonometry*(Daniel E. Dupree), *College algebra and Trigonometry*(Louis Leithold), *Algebra and Trigonometry*(Louis Leithold), *Algebra and Trigonometry A Skills approach*(J. Louis Nanney), *Introduction Algebra and Trigonometry*(Abraham Spitzbart), *Fundamentals of Algebra and Trigonometry*(Earl W. Swokowski), *Algebra and Trigonometry for College students*(Richard S. Paul), *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry*(Arthur B. Simon), *Fundamentals of College Algebra with Trigonometry*(Robert G. Stein), *Algebra 2* (Edward B. Burger), *Algebra and Trigonometry 3rd Edition*(Judice A. Beecher), 이상 11종의 서적에서는 반지름의 길이와호의 길이가 같을 때 1rad으로 정의하였으며, *Algebra and Trigonometry*(William J. Bruce), *Algebra and Trigonometry*(Howard E. Silver), 이상 2종의 서적에서는 $\theta = \frac{l}{r}$ 로 정의하였다[2]. 이러한 두가지 방식은 각기 다른 특성을 보유하고 있는 것으로 일반적으로는 파악된다.



$\theta(rad) = \frac{l}{r}$ 로 정의　　반지름의 길이 = 호의 길이 일 때 1rad 로 정의

[그림 II-1] 라디안을 정의하는 두가지 방식

1. 길이의 비로서 파악되는 라디안.

[그림 II-1]에서처럼 라디안을 호의 길이 l을 반지름 r 로 나누어 $l = \frac{\theta}{r}$ (rad) 으로 정의하는 관점이 존재한다 이 경우 라디안은 '수'의 특성을 지니게 된다. 예컨대 우리가 일반적으로 사용하고 있는 부채꼴의 호의 길이 공식 $l = r\theta$ 공식을 보자. 일반적으로 이 공식은 호의 길이 $l\,m$의 차원과 반지름에 중심각을 곱한 $r\,m \cdot x\,rad$의 차원을 같은 것으로 본다. 만약 *rad* 단위에 차원을 부여하게 된다면 양변의 차원이 달라지고 그 결과, 수학적, 물리적으로 여러 문제점을 유발하는 상황이 생기므로, 일반적으로 *rad*는 무차원한 양으로 파악하는 것이다. 즉 '길이에 각을 곱했는데 왜 길이가 되느냐?' 하는 의문점에 대해서 '라디안으로 표현된 각은 차원이 없는 각이므로 길이차원×무차원=길이차원이 된다' 라는 설명을 제시하는 것이 물리교육에서의 일반적인 견해다.(AATP, 1993), 이러한 관점의 연장선에서 물리공식에서

---

1) 혹은 '정의하는' 것이 가능하다.
2) 특정 대학의 도서관에 소장된 외국 삼각함수 교재들이므로 대표성에 대한 엄밀성은 떨어질 것이다. 다만 교과서 분석이라는 차원에서 의미를 찾을 수 있을 것으로 본다.

*rad*단위를 생략하는 것은 많은 이점을 낳게 되며, 만약 *rad*에 차원을 부여하게 되면 여러 물리 공식에서 문제를 낳게 된다고 파악하기도 한다.(French, 1992)

2. 측정가능한 양으로서의 라디안.

일반적으로 '각'을 측정하는 방식에는 크게 60분법, 400분법, 호도법등이 존재한다. 육십분법은 1회전을 360등분하여 1°로 파악하는 것이며, 400분법은 직각을 100등분하여 1grad로 파악한다. 즉 60분법과 400분법은 (단위)원을 하나의 기본 단위로 잡고 그것을 적당히 등분하여 새로운 하나의 단위를 만들어내는 방식이다. '각의 크기를 재는 호도법'은 이와는 전혀 다른 방식으로 출발 한다[3]. [그림 II-1] 에서처럼 반지름과 호의 길이가 같은 부채꼴의 중심각을 1*rad*로 정의하고 시작하는 것이다. 즉 라디안에서는 단위원을 기본 단위로써 파악하고 있는 것이 아니라 단위부채꼴[4]을 기본 단위량으로 파악하는 것으로서 이 경우 라디안(rad)은 도(°)와 같은 각 차원을 가지는 것으로 파악된다. 이 경우 라디안의 사용 이유에 대해서는, 함수를 그릴 때 스케일이 보기 좋게 유지된다는 점(남진영,임재훈,2008), 라디안을 사용하게 되면 $l = r\theta$ 공식을 사용할 수 있게 되므로 60분법을 사용할 때보다 계산이 훨씬 간편해진다는 점 등을 들어서 설명하게 된다. 즉, 60분법을 사용해도 문제는 없지만 60분법을 사용하게 되면 $\frac{\pi}{180}$ 등이 나타나게 되므로 라디안을 쓰는 장점이 있다고 설명 하게 된다.

III. 각으로서의 라디안 : 생략된 1rad 의 복원.

III장에서는 본질적으로 1*rad*은 측정 가능한 각으로서의 의미를 가질 뿐이며, 동질량의 비로 정의되는 라디안은 라디안 단위계[5]의 정의로부터 유도된 결과물일 뿐임을 밝히고자 한다. III장의 속한 각 절의 일부는 라디안이 실수로 파악되어야 한다는 여러 입장에 대한 반박의 형태를 취하고 있다.

1. $l = r\theta$ 의 기존 증명방식과 물리적 차원의 불일치라는 문제.

일반적으로 호의 길이 공식은 $l = r\theta$ 로 알려져 있다. 이 공식에서 단위를 생략하지 않고 쓴다면 $l\,m = r\,m \times \theta\,rad = r \times \theta\ \ m\,rad$ 가 된다. 예를 들어 반지름이 2m 인 부채꼴의 중심각이 3rad 라면 호의 길이는 6m rad 가 되지만 rad는 무차원 이므로 무시하고 6m가 된다는 것이 물리교육에서의 입장이다.(남진영,임재훈, 2008)

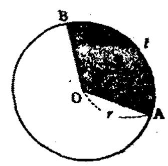
하지만 증명방식을 검토해보면 $l = r\theta$ 의 양변에 모두 rad 단위는 나타나지 않음을 알게 된다. 일반적인 고등학교 교과서에서의 증명 방식은 책마다 큰 차이를 보이지 않고 있으며 그 방식은 다음과 같다.

중심각이 호도법으로 나타내어진 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구하여 보자.

오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로

$$2\pi r : l = 2\pi : \theta$$

$$\therefore l = r\theta \qquad \cdots\cdots ①$$



[그림 III-1] 호의 길이 공식.
대한교과서 고등학교 수학 10-나

3) 평각을 π등분하여 1 라디안을 만든다는 생각을 가장 경계해야 한다.
4) 반지름이 1이고 호의 길이가 1인 부채꼴을 말한다.
5) 이 장에서부터 라디안은 측정가능한 각의 단위계로서만 파악될 것이다.

위의 [그림 III-1]에서 제시된 증명방식에서 단위를 생략하지 않고 쓰게 되면 다음과 같다.

$$2\pi r\, m : 2\pi\, rad = l\, m : \theta\, rad$$

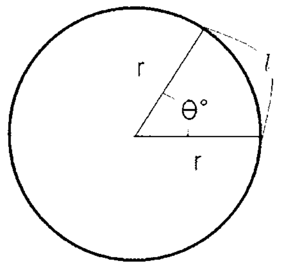
$$2\pi \cdot l \;\; rad\, m = 2\pi r \cdot \theta \;\; m\, rad$$

위 식의 양변에서 $2\pi\, m\, rad$ 을 소거하면 우리가 익히 알고 있는 $l = r\theta$ 라는 공식이 유도된다. 그러면 사실 차원의 불일치라는 문제가 등장할 여지가 없다. 즉 $l = r\theta$ 에서 θ는 중심각이 $\theta\, rad$ 인 부채꼴의 중심각의 '크기(혹은 값)' 만을 취하고 있음을 알 수 있다. 이것은 다소 엇박자인 상황이 된다. 수학적 증명을 따르면 물리적 차원의 불일치라는 문제가 등장할 여지가 없음에도 불구하고, 물리에서는 각의 차원을 따지면 양변의 차원이 일치하지 않게 되므로 각은 모두 차원이 없다는 이유와 함께 각의 차원을 제거한다. 만약 $l = r\theta$ 라는 식을 $l\, m = r\, m \times \theta\, rad = r \times \theta \;\; m\, rad$ 라고 이해한다면, 이는 위에 제시된 증명 과정에서 등식의 한쪽 변에서는 2π를, 한쪽 변에서는 $2\pi\, rad$을 지운 셈이 되어버린다. 이는 $2\pi = 2\pi\, rad$ 라는 등식을 사용한 것이 되어버리는 것이다.

2. $l = r\theta$ 의 새로운 증명방식, 그리고 생략된 1rad의 발견

역설적으로 호도법의 올바른 이해는 육십분법과의 비교를 통해서 가능하다. 이것은 라디안이라는 단위가 도(°) 단위와 본질적으로 다른 점이 없는, 즉 각의 단위로서의 의미만을 가진다는 뜻을 내포한다. 즉 무차원 단위계로서 라디안을 파악하는 것은 단지 편의를 위한 것이며[6] 라디안 단위계는 본질적으로 육십분법과 차이가 없다는 것을 의미한다.

육십분법을 사용할 경우 부채꼴의 길이는 다음과 같은 수식으로 구한다. ([그림 III-2])



$$2\pi r : l = 360^\circ : \theta^\circ$$

[그림 III-2] 60분법에서 호의 길이 구하기

위 [그림 III-2]에 나와 있는 수식은 반지름이 r인 원의 둘레를 $2\pi r$ 로 정의하고 하나의 온전한 원의 중심각을 360° 로 파악한 다음 비례를 사용해서 호의 길이를 구하는 것이다. 이 공식에서 도(°) 단위는 분모와 분자에서 약분된다. 즉 좌변과 우변의 차원은 일치하며, 무시해야 할 무차원 단위도 나타나지 않는다[7].

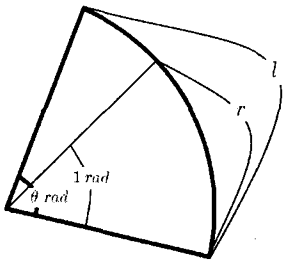
또한 위에서 제시된 부채꼴의 길이와 관련된 비례식, 이 수식으로부터 우리는 호의 길이 공식인 $l = 2\pi r \times \frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ 를 얻게 되는데 이 공식을 얻는 과정과, 호도법에서 $l = r\theta$ 를 구하는 과정은 완전히 동일한 과정을 거치게 된다.

$l = r\theta$ 라는 공식은 사실 다음과 같은 과정의 결과물이다. $l = r \times \frac{\theta\, rad}{1\, rad} = r \times \theta$. 즉 **우리는 라디안의 정의에 의해서 $1 rad$일 때의 호의 길이가 반지름과 같은 크기인 r이라는 것을 알고 있으므로 이 값을 단위 길이로 삼고, 이러한 단위 길이에 ($\frac{\text{임의각}}{\text{기준각}}$)을 곱해주는 것이다.** 마찬가지로 이 공식에서 분모와 분자에서 rad는 약분되며, 1 은 생략된다. 육십분법에서 호의 길이를 구하는 공식과 완전히 동일

6) 주로 물리적 공식을 계산할때의 편의성을 말한다. 구체적인 내용은 III장과 IV장에서 논의한다.
7) 육십분법은 차원을 고려해도 아무 문제가 없다.

한 과정을 거치고 있는 것이다.

요약하자면 $l = r\theta$ 라는 공식에서 r 은 **반지름이 아니라 '반지름이 r 이고 중심각이 1rad 일 때 부채꼴의 호의 길이'**[8] 가 되는 것이며, θ는 기본량 $1rad$에 대한 θrad의 비를 나타내는 것이다. ([그림III-3])



[그림 III-3] 호와 각의 비례관계.
$l = r\theta$ **공식에서** r **은 반지름이 아니다.**

그러므로 $l = r\theta$ 라는 공식의 증명은 호도법의 기본 단위인 1rad 의 정의로부터 출발해야 한다. (위의 [그림 III-3])

반지름이 r 이고 중심각이 1rad 인 부채꼴의 호의 길이가 r 이므로,

중심각1 : 호의 길이1 = 중심각2 : 호의 길이2에서

$$1\,(rad) : r\,(m) = \theta\,(rad) : l\,(m)$$

$$l\,m \times 1\,rad = r\,m \times \theta\,rad$$

$$l\,m = \frac{r\,m \times \theta\,rad}{1\,rad}$$

$$l = r\theta$$

가 되어야 한다. 즉 $l = r\theta$ 라는 공식의 증명은 **라디안의 정의로부터 자명하게 유도가 되며, 그 과정에서 원을 도입하거나 상수 π를 도입할 이유가 없다**는 것을 환기하자.

3. 라디안은 길이의 비로 정의된다는 '라디안만의 특이성'에 대한 반박

라디안은 길이와 길이의 비로서 주어지므로 도(°)단위와는 다르다고 주장하는 경우가 있다. 하지만 이것은 라디안만의 특성이 아니며, 모든 각 단위에 해당하는 속성이다.

간단한 문제 하나를 생각해 보자. 반지름이 $100m$인 원형의 호수 둘레를 걷는 사람이 처음 위치로부터 $1rad$만큼 반시계 방향으로 회전하고 싶다면 어떻게 하면 될까? 또 마찬가지로 하나 더 문제를 생각하여 같은 호수의 둘레를 걷는 사람이 처음 위치로부터 1°만큼 반시계 방향으로 회전하고 싶다면 어떻게 하면 될까?

두 문제의 답은 어렵지 않게 구할 수 있을 것이라 생각한다. 첫 번째는 호수의 둘레를 따라서 $100m$만큼 걸으면 되고, 두 번째의 경우는 호수의 둘레를 따라서 $200\pi \times \frac{1}{360} \fallingdotseq 1.74532925m$ 만큼 걸으면 되는 것이다.

위의 두 문제는 무엇을 암시하는지 생각해 보자. 결국 이것은 **라디안이든 도(°)이든 간에 상관없이 각의 크기는 호의 길이와 반지름의 비로 주어질 수 있다**는 것을 설명한다. 라디안이건 도(°)이건 간에 부채꼴의 중심각과 호의 크기는 비례관계가 성립할 따름인 것이다. 즉, 바꾸어 말해서, 라디안의 정의를 $\theta(rad) = \frac{l}{r}$ 로 할 수 있다면, 60분법의 도(°)의 정의도 1회전을 360등분하는 방식으로 주어지는 것만이 아니라 라디안의 경우와 마찬가지로 $\theta(°) = \frac{l}{r}k \quad (k = \frac{\pi}{180})$ 으로 주어질 수 있는 것이다. 덧붙여 라디안을 정의하는 식은 도(°)를 정의하는 식에서 $k=1$ 인 경우라는 것을 알 수 있을 것이다[9]. 그런데 이 공식 또는 정

8) 물론 그 값은 r이지만, 반지름과 같은 값일 뿐 반지름을 나타내는 것이 아니다.

의들은 호의 길이를 구하는 공식을 순서만 바꾸어 나타냈다는 것을 쉽게 알 수 있다. 호도법과 육십분법에서 호의 길이를 구하는 공식들인 $l=r\theta$ 와 $l=2\pi r\times\frac{\theta^\circ}{360^\circ}$ 라는 공식에서 단위를 약분한 뒤에 θ에 관하여 풀어낸 것일 따름이다. 즉 라디안의 정의에 있어서 호와 반지름의 비를 정의로 쓰는 것은 라디안의 단위를 제거하여 사용하려는 편의를 목적으로 할 따름이지 라디안만이 가지는 특별한 수학적 의미에 기인하는 것이 아님을 의미한다.

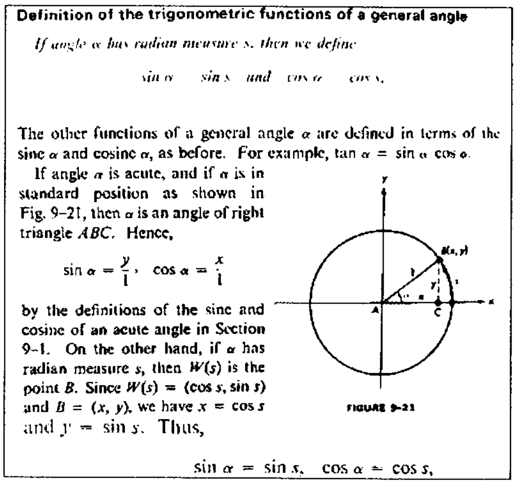
결국 길이와 길이의 비로 주어지기 때문에 도(°) 단위에 비해서 라디안은 특별하다는 것은 올바른 진술이 아니다. 도(°) 단위가 각으로서 파악된다면 라디안도 각으로서 파악되어야 하며, 라디안이 무차원 단위라면 도(°) 단위 마찬가지로 무차원 단위로 파악되어야 옳다. 즉, 이 말은 라디안과 도(°) 단위 둘 사이의 본질적 속성은 아무런 차이가 없으며, 라디안은 단위부채꼴을 하나의 기본 단위로, 도(°)단위는 원을 하나의 기본 단위로 파악하는[10] 각의 측정 단위라는 정의 자체에 충실하여야 한다는 것을 의미한다.

4. 합성함수의 정의를 위해서 라디안은 실수여야 한다는 주장에 대한 반박

$y=\sin x$에서 x를 실수로 정의할 수 있다는 것은 맞는 말이다. 단 이 경우 x는 라디안이 아니며, 단위원위의 점 (1.0)에서 반시계 방향으로 잰 호의 길이를 x로 두고 그 지점에서 x축, y축에 내린 수선의 길이를 각각 $\sin x$, $\cos x$로 정의하게 된다. 즉 쉽게 말해서 $y=\sin x$ 에서 x를 실수로 두는 경우 x는 각이 아니고 길이가 되고, 이때 삼각함수의 정의 방식은 바뀐다. **바꾸어 말해서 삼각함수를 각에 대한 함수가 아닌 실수에 대한 함수로써 정의하기 위해서 새로운 정의를 끌어온다는 것이다.(현행 고등학교 교과서에서 정의된 방식, 혹은 일반적으로 쓰이는 정의방식과 다르다는 것을 주지하여야 한다.)** 이러한 함수를 일반적으로 wrapping function 혹은 circular function 이라고 부른다. 다만 단위원 위의 점 (1.0)에서 반시계 방향으로 어떤 지점까지 진행했을 때 호의 길이와, 그 지점에서 원점을 이은 각의 수치가 같게 된다. 즉, $\sin 1$과 $\sin 1rad$가 각기 다른 두 방식으로 정의되어도 단위원 상에서는 같은 값이 되므로, 두 방식으로 정의된 $\sin x$ 라는 함수를 같다고 정의하는 과정을 거치게 된다.([그림 III-4]) **다시 말해 $y=\sin x$에서 x의 값을 라디안으로 주었을 때와 x를 실수로 주었을 때 각기 다른 삼각함수의 정의를 쓰게 된다는 것이다. 그러므로 'x가 라디안으로 주어지면 $\sin x$에서의 정의역은 실수'라고 하는 것은 옳은 진술이라고 볼 수 없다. $\sin x$의 정의역이 실수가 될 수 있는 것은 오직 단위원에서 삼각함수를 정의할 때 뿐이며, 이때 변수 x는 각이 아니라 호의 길이이다.** 반면에 단위원을 포함한 일반원에서 삼각함수를 정의하는 방식에서는 우리가 일반적으로 알고 있는 바와 같게 x는 라디안이 된다. 즉, $\sin x$의 정의역을 실수로 두는 것은 라디안 자체가 실수적 특성을 가지기 때문이 아니라 라디안의 정의 자체가 매우 잘 정의된[11] 된 각 단위라는 데에서 오는 것이며 또한 $\sin 1rad$ 를 $\sin 1$ 과 동일시 하기 위해서 단위

9) 이것이 라디안의 본질적인 장점이다.
10) 물론 360등분하여 1°가 된다.
11) 바로 윗 절인 3장의 3장에서 설명한 비례상수 k의 값이 1이 된다는 점에서 잘 정의되었다는 의미이다. 육십분법의 경우 비례상수 k의 값이 $\frac{\pi}{180}$이 된다.

원 상에서 삼각함수를 정의하고, 두가지 방식의 함수값을 같다고 다시 정의하는 과정을 거쳐서 얻어지는 결과라는 것을 알아야 한다. 이상의 내용과 관련하여 대학생 대상의 Algebra and Trigonometry 서적 두 권의 내용 일부를 아래에 [그림 III-4],[그림 III-5]으로 첨부한다.


Definition of the trigonometric functions of a general angle

If angle α has radian measure s, then we define

$$\sin\alpha = \sin s \quad \text{and} \quad \cos\alpha = \cos s.$$

The other functions of a general angle α are defined in terms of the sine α and cosine α, as before. For example, $\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$.

If angle α is acute, and if α is in standard position as shown in Fig. 9–21, then α is an angle of right triangle ABC. Hence,

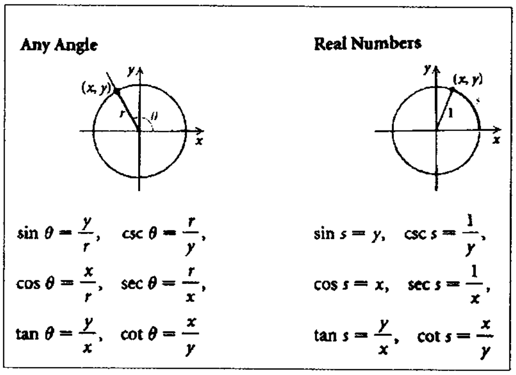
$$\sin\alpha = \frac{y}{1}, \quad \cos\alpha = \frac{x}{1}$$

by the definitions of the sine and cosine of an acute angle in Section 9–1. On the other hand, if α has radian measure s, then $W(s)$ is the point B. Since $W(s) = (\cos s, \sin s)$ and $B = (x, y)$, we have $x = \cos s$ and $y = \sin s$. Thus,

$$\sin\alpha = \sin s, \quad \cos\alpha = \cos s,$$

FIGURE 9–21

[그림 III-4] 두가지 삼각함수의 정의 방식.
단위원에서 sin1과 sin1*rad*를 같다고 정의 한다.
(Johnson. *Algebra and Trigonometry)*



[그림III-5] 정의역이 실수로 주어지면 단위원 위에서 정의하게 되므로 sin3과 sin3*rad*가 일치하게 된다.
(Beecher. *Algebra and Trigonometry. 3rd edition)*

이해를 돕기 위해서 위의 내용을 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 III-1> 삼각함수의 두가지 정의방식

	θ가 실수인 경우	θ가 라디안인 경우
sinθ, cosθ 의 정의 방식	wrapping function (circular function) - 단위원 위의 점 (1,0)에서 반시계 방향으로 회전하여 도달한 점 까지의 길이를 θ로 두고 그 점의 좌표를 (cosθ,sinθ)로 정의	$x^2 + y^2 = r^2$ 위의 한 점 (x,y)에 대해서 원점과 (x,y)를 잇는 동경이 x축과 만드는 각의 크기를 θ (rad)로 두고, $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 로 정의
θ의 차원	실수 차원, 혹은 무차원	각 차원
원	단위원에서만 정의	일반 원에서 정의

(Johnson. *Algebra and Trigonometry, Beecher. Algebra and Trigonometry. 3rd edition)*

즉, wrapping function(circular function)에 대한 논의가 없는 고등학교 교육 과정에서 sin$x$의 정의역을 실수로 두려는 것은 다소 무리한 시도가 된다. 삼각함수가 합성된 경우, 예를 들어 sin(cos3) 이라는 식은 *rad* 단위가 생략된 식으로 설명을 해야 한다. 즉 sin(cos3)은 sin((cos3*rad*)*rad*) 에서 *rad* 단위가 생략된 식으로 설명하는 것이 최선의 방법인 것이다. 단, sin$x$의 정의역이 실수가 되면 안 되느냐 하는 의문을 던지는 학생들이 있다면 (그 의문을 던지는 학생들이 어느 정도 수학적 이해도가 높은 학생이라는 전제 하에) wrapping function (circular function) 의 개념을 설명하고 이해시킨 후, sin$x$를 파악할 때 단위원 위에서 x를 호의 길이로 잡는 경우와 x를 중심각(라디안)으로 잡는 경우, 두 경우의 값이 일치 한다는 것을 보여줄 수 있을 것이다. 즉 단위원 상에서 sin2*rad* 와 sin2가 두 가지 방법으로 정의되고 그 두 가지가 일치한다는 것을 보이는 것이

그렇게까지 어려운 일은 아닐 것이다. **다만 이 과정에서 sin$2rad$와 sin2가 같다고 해서 $2rad$와 실수 2가 같다고 설명되거나, $2rad$가 실수 2와 같은 특성을 가진다고 설명되는 것은 바람직하지 않다. sin2rad와 sin2가 같다는 것은 단위원상에서 wrapping funtion과 각에 대한 삼각함수를 같다고 '정의'하는 과정을 통해서 나온 것이기 때문이다.** 강조하자면 $y=\sin x$에서 x의 정의역과 y의 치역을 실수 차원으로 일치시키려는 것은 수학적으로 의미가 있는 작업이지만, 이것은 라디안을 실수와 일치시킬 수 있다거나 라디안이 실수적 성질을 가지기 때문에 가능한 것이 아니며, 라디안의 정의에 의해서 단위원 상에서 중심각 $1rad$에 해당하는 호의 길이가 1 이 되는 특성을 이용한 것일 따름이다.

이러한 것을 바탕으로 결론적으로 말하자면 현재 wrapping function(circular function) 에 대한 정의를 배우지 않는 고교 교육과정에서 굳이 무리하게 sin$x$의 정의역을 실수로 파악하려 하는 시도 자체가 바람직하게 보이지 않는다. 특히나 교수자가 학생에게 '$y=\sin x$에서 x가 라디안이라면 x는 실수차원' 이라고 지도하는 것은 교수자가 wrapping function(circular function)에 대한 개념을 잘 알지 못하는 상태에서 '삼각함수의 정의역을 실수로 둘 수 있다'는 것만을 알고 있는 안타까운 상황에서 벌어지는 일종의 오개념이라고 말할 수 있으며, 학생들에게 이런 오개념이 주입되어서는 곤란하다. 삼각함수의 정의역을 실수로 두는 것은 대학 교육과정이나 심화 교육과정에서 wrapping function(circular function)에 대한 개념을 배우고 난 뒤에 논의될 일이며, 무리하게 sin$x$의 정의역을 실수로 두기 위해서 '라디안은 실수' 라는 잘못된 주장을 반복하면 $x rad$와 실수 x간의 구분에 있어서 오개념이 발생할 우려가 있다.

5. 미적분에서의 장점을 가지기 위해서 라디안을 써야 한다는 주장에 대한 해설

라디안을 쓰면 미적분에서의 공식이 매우 깔끔하게 정리가 된다. 하지만 삼각함수의 미분을 위한 극한값의 계산, 즉 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 이라는 식에서 $\lim_{x\to 0}$에 있는 x는 중심각이며, sin$x$에 있는 x또한 중심각이다(wrapping funtion을 고려하지 않는 고등학교 교육 과정에서) 반면 분모에 있는 x는 실수, 정확히는 호의 길이라는 것을 알아야 한다. 하지만 이것을 혼동하여 분모에 있는 x를 각으로 파악하게 되면 '분모는 x라디안인데 분자는 sin$x$라는 실수값' 이라는 의문점을 가지게 되고, 분모와 분자의 차원이 맞지 않아 보이게 된다. 이러한 오해의 해결책으로 궁여지책으로 나오게 되는것이 'x가 라디안이라면 x는 실수와 같다' 라는 주장이며, 이것은 그대로 x와 $x rad$ 사이의 혼동이라는 오개념으로 이어진다. 이러한 착각은 유도 과정을 보면 자명하게 문제가 해결된다. 분모의 x는 각이 아니라 반지름이 1인 단위원 위에서 $l=r\theta$ 인 과정을 통해 얻어진 호의 길이인 것이다. II장에서 $l=r\times\frac{\theta\ rad}{1\ rad}=r\times\theta$ 라는 과정을 통해서 호의 길이 공식이 유도되었음을 환기하자. 이때 $r=1$ 인 경우에 중심각이 $x rad$인 부채꼴의 호의 길이 $l=1\times\frac{x rad}{1 rad}=\frac{x}{1}=x$ 가 되는 것이다. 즉, x가 0으로 수렴할 때, 분모에 있는 x는, 각 x가 아니라 호의 길이 x가 되는 것이다. 이것을 이해하지 못하거나 유도과정을 까맣게 잊고 분모에 있는 x를 라디안이라고 생각하게 되면 '분모는 각인데 분자는 왜 실수 값이 되느냐, 이는 맞지 않이것을 분자가 실수이니 분모도 실수이어야 한다' 라는 생각을 하게 되며

이것이 곧 '그러므로 라디안은 각이 아니라 무차원이 되어야 한다, 그래야 논리에 맞는다' 라는 주장으로 이어지는 것으로 생각된다.

라디안을 쓰면 미적분에서의 공식이 매우 간편하게 유도되는 것은 분명히 맞는 말이다. 하지만 이는 모두 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 라는 과정으로부터 나온 호의 길이 공식에 의한 것이지, 결코 라디안이 실수적 특징을 가지는 이유 때문이 아니다. 예컨대 교과서에 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\pi}{180}$ 라는 문제가 실려있는 것을 볼 수 있는데, 이 경우 분모의 x에는 각 단위가 없음을 알 수 있다. 이것은 분모의 x가 각이 아니라 각으로부터 구해진 호의 길이를 구한 뒤에 부등식에 의해서 구해지는 과정을 통하기 때문이다. 즉 **각으로부터 호의 길이를 구하는 과정에서 각의 단위는 약분되는 과정**을 거친 것이며, 반지름이 $1(m)$인 단위원에서 중심각이 $x(rad)$인 호의 길이는 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 공식에 의해서 그대로 $x(m)$가 되는 것이다. 즉 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 에서 분모의 x는 $x rad$ 이 아니라 단위원에서 중심각이 $x rad$인 부채꼴의 호의 길이 x라는 것을 알아야 하는 것이다.

6. 물리학적 관점에서 무차원 단위계여야 한다는 주장에 대한 반박

Brownstein(1998)은 물리에서 각 또한 하나의 단위량으로 설정할 수 있으며, 그 과정에서 $l = r\theta$ 공식 앞에 연산자를 붙이면 해결 된다고 보았다. 하지만 굳이 연산자를 붙일 필요가 없다. $l = r\theta$ 자체에 이미 분모에 숨겨진 $1rad$이 있다는 것을 강조하면 될 뿐이다. 즉 앞에서 정리한 바와 같이 $l = r\theta$ 라는 공식이 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 라는 과정을 거쳐서 나온 공식이라는 것을 알면 설명이 가능해지는 것이다.

많은 물리 공식에서 rad는 나타났다가 사라졌다가를 거듭한다(French, 1992). 이 또한 라디안에서의 기준량이 $1rad$이기 때문에 숨어있는 것일 따름이며, $l = r\theta$ 라는 공식에서 사라지는 rad는 1을 남기고 분모 분자가 서로 소거된 것이라는 것을 파악한다면 물리적 공식에서 숨바꼭질을 거듭하는 rad단위를 찾아 낼 수 있다.

다만 그렇게 발견된 rad는 $1rad$일수도 $(1rad)^2$ 일 수도 있지만 이것들은 수치의 크기가 1이므로 계산값의 크기 자체에는 전혀 영향을 주지 않는다. 그러므로 $1rad$ 이든 $(1rad)^2$ 무시해도 계산값 자체에는 영향을 주지 않는 것이다. 단 이러한 과정이 복잡하므로 편의를 위해서 '라디안은 무차원 단위계' 라고 얘기할 수는 있다. 그러면 굳이 rad를 찾을 필요조차 없게 되는 것이다. 하지만 라디안이 무차원 단위계라고 얘기하는 것은 수치에 영향을 주지 않는 rad(혹은 $1rad$)를 굳이 명시해 봐야 계산만 복잡해질 따름이므로 무시한다는 것으로 해석되어야 하며, 라디안 자체가 실수적 특성을 지니기 때문에 그런 것이 아니다[12]. 라디안은 본질적으로 도(°) 단위와 아무런 차이가 없으며 도(°) 단위와 완전히 동일한 차원, 동일한 성질을 갖는다.

예를 들어 선속도와 각속도의 공식 $v = rw$ 라는 공식은 $v = \frac{l}{t} = \frac{r\theta}{t} = r\frac{\theta}{t} = rw$ 라는 공식에서 유도되는 것이고, **이 과정에서 호의**

12) 즉 $\theta = \frac{l}{r}$ 로써 정의하는 것은 라디안의 정의로부터 유도된 공식인 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 의 결과물을 다시 정의로 끌어다 쓰는 것이므로 주의해야 한다.

길이 공식 $l = r\theta$ 가 쓰이고 있는 것이다. 그러므로 선속도의 공식은

$$v = \frac{l}{t} = \frac{r\frac{\theta\, rad}{1\, rad}}{t} = \frac{r}{1\, rad}\ \frac{\theta\, rad}{t} = \frac{1}{1\, rad}\, rw$$

가 되어야 옳다[13]. 즉 분모에 1rad 이 생략되어 있음을 주의하면 된다. 이것을 육십분법의 경우로 환산하여 보자.

만약 각속도가 $\theta^{\circ}\ /s$인 어떤 물체가 있다 하자. 이 물체의 선속도는

$$v = \frac{l}{t} = \frac{2\pi r \times \frac{\theta^{\circ}}{360^{\circ}}}{t} = 2\pi r(\frac{1}{360^{\circ}}) \times \frac{\theta^{\circ}}{t} = \frac{2\pi}{360^{\circ}} \times rw$$

로 주어지게 된다. 즉 각속도에서 단위를 $\theta^{\circ}\ /s$를 쓰더라도 $v = \frac{2\pi}{360^{\circ}} \times rw$ 라고 공식을 표현하게 되면 선속도로 변환하는 데에 아무 문제가 없다[14]. 하지만 이 경우 각의 단위인 360도(°) 가 공식의 표면에 나타나게 되고 형태도 복잡하게 된다. 즉 이 지점에서 라디안 단위를 쓰는 이유가 명백히 드러난다. 각의 단위로 라디안을 쓰게 되면 분모에는 $1rad$ 혹은 $(1rad)^2$ 만이 등장하게 될 뿐이므로, 계산값의 크기 자체에는 영향을 주지 않는다. 그러므로 굳이 rad 단위를 공식의 표면에 등장시키지 않고[15] 숨겨서 계산을 전개할 수 있게 되는 것이다[16].

즉 물리 공식에서 rad 단위가 나타났다 사라졌다 하는 것은 기본적으로 각으로부터 길이를 구하는 공식인 $l = r\theta$ 의 분모에 숨어있는 $1rad$를 찾아내는 것으로 충분히 설명이 가능하다. 이것을 찾아내는 눈을 기르위해서는 결국 호도법에서의 기본 단위는 $1rad$이며, (단위)원이 아닌 (단위)부채꼴이 각을 측정하는 기본 단위가 된다는 것을 주지시켜야 할 것이다.

이렇게 분모의 $1rad$이 있다는 것을 발견하고 기본량인 $1rad$에 대한 각의 변화를 탐구하게 되면, 라디안을 무차원 단위계로 설정할 필요가 없으며, 각을 무차원 단위계로 설정함으로 인해서 양변의 차원이 달라지는 각종 물리 공식에 숨어있는 $1rad$의 존재를 파악 할 수 있게 된다[17].

만약 라디안을 인위적으로 무차원 단위계로 설정하고 그것을 고집하게 된다면, 물리 공식에서 어떤 때에는 rad가 나타났다가 어떤 때에는 사라지며, 또 어떤 때에는 도(°)단위와 호환이 되었다가 호환이 되지 않았다가 하는 현상에 대해서 설명할 수 없다. 이는 모두 라디안 단위의 특성을 파악하지 못한 것이며 라디안 단위계의 가장 중요한 공식인 $l = r\theta$ 을 이해하지 못하고 라디안을 무차원 단위계로 설정하는 것에 그 원인이 있는 것으로서, 무차원 단위계로서 라디안을 바라보기 보다는, 라디안은 측정 가능한 각의 단위량이라는 관점에서 논의를 전개해야 하며, 무차원이라는 관점은 라디안의 정의에 의해서 파생되는 결과물이라는 것을 파악하는 것이 바람직하다.

---

13) 강조하건대 $\frac{r}{1rad}$ 이지 r / rad 가 아님을 주의하자. 즉 r 에 /rad 라는 단위계를 부여한 것이 아니다.

14) 60분법으로 각이 주어지면 호의 길이를 구할 수 없다고 주장하지 않는 이상은 그렇다.

15) 즉, $F = mrw^2$ 공식의 경우라면, $F = m\frac{v^2}{r} = m\frac{(\frac{l}{t})^2}{r} = m\frac{(\frac{r\frac{\theta\, rad}{1\, rad}}{t})^2}{r} = \frac{1}{1rad^2}mrw^2$ 에서 유도된 그대로 $F = \frac{1}{1rad^2}mrw^2$ 으로 표현하는 것이 원칙적으로는 옳다.

16) $F = mrw^2$ 공식을 육십분법으로 풀게 되면 $F = (\frac{2\pi}{360^{\circ}})^2 mrw^2$ 이 된다.

17) 숨어있다는 것을 알고 무시하고 계산하는 것과, 숨어있는 것을 모른 채 '라디안은 무차원' 이라고 공식을 끼워 맞추기 위해서 설명하는 것과는 실로 교육적 관점에서 엄청난 차이일 것이다.

IV. 측정 가능한 각의 크기로서 라디안을 바라볼 때의 장점들

III장에서 본 연구는 라디안을 무차원 단위계로 파악하여야 한다는 입장, 또는 무차원 단위계로 파악될 수밖에는 없다는 입장 대해서 반박 혹은 설명의 형식을 취하였다. 이 장에서는 라디안을 측정 가능한 각의 단위로서 볼 때의 장점에 대해서 논한다.

1. 각을 측정하는 단위(unit)가 존재한다는 장점.

$\theta = \frac{l}{r}$ 로서 정의하는 경우 *rad* 단위는 기본단위가 존재하지 않는다. 이 경우 라디안은 길이와 길이의 비로서 정의되고 각으로서의 차원은 사라지게 된다.[18] 그리고 우리는 각을 측정하기 위한 도구를 가진 것이 아니라 길이를 측정하는 도구를 가지고 각을 논의해야 하며, 각을 측정하는 것이 아니라 반지름과 호의 길이를 재야 한다. 또한 1*rad* 의 각을 재기 위해서 우리는 반지름과 같은 크기의 호의 길이를 찾아야만 한다. 즉, 각에서 차원을 제거한다는 장점은 전혀 장점이 되지 못하고 오로지 물리적 계산에서의 편의성을 위한 것이 되어버린다. 예컨대 우리가 1second를 정의하는 방식을 보자. 1초는 세슘원자가 91억9천2백63만1천7백번 진동하는데 필요한 시간으로 정의된다. 즉 이러한 방식으로 시간이 정의되면 우리가 어떤 시간의 흐름을 측정하기 위해서는 세슘원자의 진동수를 세면 시간의 흐름이 가능할 것이다. 시간 t = (세슘원자의 진동횟수 / 91,9263,1700) 으로 정의 가능하고, 시간의 차원은 제거된다. 하지만 우리는 시간의 측정을 이렇게 하지 않는다. 1second라는 단위의 고안 후에 우리는 그 단위를 중심으로 측량과 측정을 하는 것이다. 이는 1m, 1kg, 1sec, 1cd 등 모든 단위에 적용되는 공통 사안이며 우리가 '단위를 왜 정비해야 하는가' 하는 근본 이유이기도 하다.

바꾸어 말해서 길이의 비로서 정의된 라디안은 **각을 측정하기 위해서 반지름과 호의 길이를 구하는 과정이 필요**하게 되며, 이 과정에서 **호의 길이를 구하기 위해 초월수 π를 필연적으로 도입**해야만 한다. 하지만 1*rad*를 반지름과 호의 길이가 같을 때로 정의하게 된다면 **이제 우리는 길이를 고려할 필요나 π를 도입할 필요 없이, 1*rad*의 눈금을 가진 수학적 각도기, 혹은 수학적 각의 단위를 만들 수 있다.** 즉, 우리가 각의 측정 단위를 부채꼴의 반지름이나 호의 길이와 무관하게 수학적으로 고안할 수 있다는 것이다. 이것이 무엇을 의미하는가? **결국 각은 길이로부터 독립된 차원을 가질 수 있음을 의미한다.** 언뜻 길이의 비로서 각이 주어지면 차원을 제거할 수 있으니 유용한 면이 있다고 생각할 수도 있지만, 오히려 각을 정의하기 위해서 길이를 끌어들여야 하는 불편함이 생겨버리게 되고, 이러한 결과로서 유도된 무차원이라는 결과물은 여러 문제점을 발생시키는 것이다. 이러한 측면에서 각 차원에서의 기본단위를 가지도록 정의하는 방식이 바람직한 의미를 가지게 된다고 말할 수 있다.

2. $1rad = \frac{180^{\circ}}{\pi}$ 식을 통한 각 사이의 호환성의 보장

라디안을 실수로 파악하거나 무차원 단위로

18) III장에서 설명한 바와 같이 길이의 비로 정의되는 방식이 라디안만의 특성이 아님에도 불구하고 라디안을 쓸 때에만 유독 무차원성을 강조하게 된다.

서 파악하는 입장에서 $1rad = \frac{180^\circ}{\pi}$ 라는 각 사이의 호환식은 성립하지 않는 경우가 생긴다. 가령 III 장에서 설명한 각속도 공식의 경우 생략된 $1rad$를 복원하면 호환이 되지만, 이것은 $1rad$를 측정가능한 각의 단위로써 파악할 때 유도되는 결과물이며, 무차원 단위로써 라디안을 정의하는 경우 호환성은 보장되지 않는다. 머릿속에서 $1rad$라는 각과 1°라는 각을 생각해보자. **이 둘 사이에 호환이 불가능하다고 생각하는가? 아마 그렇지 않을 것이라고 생각한다.** 만약 그렇게 생각하는 교수자가 있다면, 또 그리하여 두 개의 각이 서로 호환이 되지 않는 경우가 있다고 학생들에게 가르친다면, 가르치는 교수자의 입장이나 배우는 학생의 입장이나 혼란스럽게 되는 결과를 가져오게 될 것이다. 결국 이것이 학교 현장에서 라디안을 제대로 파악하지 못하는 현상으로 나타나고 있는 것이다. 즉, $1rad$가 1°와 마찬가지로 각을 측정하는 하나의 측정가능한 각의 단위로써 파악될 때에만 이러한 호환성은 공고히 보장이 된다.

현실적인 쓰임새에 있어서도 ' rad은 차원이 없다' 라는 식으로 논의가 이뤄지게 될 경우, 도(°) 나 1회전(rev.) 등의 단위도 단위가 없어야만 한다. 예컨대 3rpm 이라는 단위가 있다고 할 때 이 단위는 3 revolution / min = 3 x (2 π rad) / 60sec 라는 변환식이 가능하여야 한다. 1min = 60sec 사이의 변환에서 아무런 문제가 없고, 아무런 차원상의 문제가 없듯이, 1rev = 2 π rad = 360° 사이에도 아무런 문제가 없어야 한다. 그런데 실제로는 '도(°)단위는 차원이 있는데 라디안(rad)만이 차원이 없다' 라는 식으로 받아들여지게 되면,각 사이에 호환성이 보장되지 않게 되어버린다.

3. 물리적 계산식에서 차원의 불일치를 논리적으로 해소

라디안을 무차원 단위계로 파악하는 경우 rad 단위는 '각임을 나타내기 위한 표시' 라는 이유로써만 나타나게 되고,(AATP, 1993) 이는 rad 단위에 차원이 없음에도 단위를 부여하는 결과로 나타나게 된다. 이는 사실상 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 에서의 '생략된 $1rad$'를 발견하지 못한 결과로써 나타나게 되는 논리적 모순을 방어하기 위한 수단에 불과하며, 그 과정에서 비논리적인 부분을 포함하게 되어버린다. 또 결과적으로 물리 식에서 차원의 불일치에 대해서 논리적인 설명이 어려워지게 되고, '라디안이 무차원 이어야만 한다' 라는 주장으로 이어지게 된다. 애초에 각으로 정의하였을 때 발생되는 문제들이 실은 과정상의 생략된 부분의 복원을 통해서 설명될 수 있음은 III장에서 설명한 바 있다. 정리하자면 rad에 차원을 부여하고 그렇게 부여된 rad의 차원을 고려할 때 나타나는 물리공식 상의 차원의 불일치가 어떠한 과정을 통해서 해소되는지를 수학적으로 발견하는 과정이 무엇보다 중요하다고 할 수 있으며, 이는 무차원 단위로써 라디안을 파악하는 것이 아니라 측정가능한 각의 단위로써 라디안을 파악할 때 가능한 것이다.

4. 무차원 단위의 배제를 통한 라디안 교육의 수월성

교육적 의미에서 라디안이 각이 되었다가 무차원 단위로서 실수적 성질을 가졌다 한다는 것은 학생들 입장에서 혼란스러운 부분이 있을 뿐만 아니라 III장에서 밝힌 바와 같이 논리적으로 문제가 되는 부분을 가지게 된다. 또한 이렇게 문제가 되는 부분은 라디안을 각으로서

파악할 때에만 해결되는 것임을 III장에서 밝힌 바 있으며, 또 길이의 비로서 정의되는 성질이 라디안만의 특성이 아니라는 것을 밝히기도 하였다. 이러한 관점을 종합해 볼 때 라디안을 학생들이 이해할 수 있도록 하는 가장 바람직한 설명은 라디안 또한 60분법과 마찬가지로 각의 단위로써 의미를 가진다는 설명일 것이다. 라디안의 사용이 60분법의 사용에 비해서 가지는 유용성에 대한 설명은, 호의 길이를 구하는 공식인 $l = r \times \frac{\theta\ rad}{1\ rad} = r \times \theta$ 라는 기본 공식이 어떻게 증명이 되는지를 라디안의 정의로부터 올바르게 이끌어 낼 때에 자연스럽게 설명이 가능해진다. 아울러 이러한 증명 과정을 통해서 I장의 선행연구 분석에서 나타났던 라디안에 대한 각종 오개념의 유형들, 그 중에서 특히 실수 π와 πrad 사이의 혼란을 해소할 수 있을 것으로 생각한다. 무차원 단위로서 라디안을 도입하는 이상[19] 실수 π와 πrad 사이의 혼란은 불가피한 것이라고까지 말할 수 있으며, 라디안의 각으로서의 측면을 강조하는 것이 교육적으로 바람직한 것으로 파악 될 수 있다.

V. 결론 및 제언 : 라디안을 어떻게 이해하고 어떻게 지도할 것인가

라디안 단위는 수학적 관점에서 매우 중요한 단위계이며 그것을 어떻게 이해해야 하는가는 말할 나위 없이 중요하다. 다만 지금까지 라디안을 두 가지 관점에서 바라보아야 한다는 관념에 매여, 라디안을 사용할 때 발생하는 여러 문제점들을 <각으로서의 라디안> 이라는 관점에서 해결하려는 시도가 부족했던 것으로 여겨진다. 특히나 물리 공식에서 유발되는 논리적 모순을 라디안의 본질을 통해서 해결하려 하지 않은 채 <라디안을 무차원 단위계> 라고 정의를 내려서 해결하려 하는 것은 바람직한 시도로 보이지 않는다. 즉 애써 라디안을 실수로서 파악하려는 관점은 결국에는 라디안의 본질적 속성을 탐구하려는 시도라기보다는, 이미 존재하는 물리공식들에서 발생되는 차원의 불일치라는 문제를 해결하려는 시도이거나 계산상의 편의를 위한 시도로 여겨진다.

물리공식에서의 장점이나, 삼각함수에서 x의 정의역을 실수로 두기 위한 장점 등은 모두 호도법의 기본 단위인 $1rad$을 정의하는 것으로부터 출발해서 파생되는 것이며 라디안이 하나의 측정 가능한 단위계라는 것을 강조함과 동시에 $1rad$의 정의로부터 자명하게 증명되는 $l = r\theta$ 라는 공식을 온전히 이해하게 된다면 물리 공식에서의 문제점들도 논리적인 설명이 가능해지며, 삼각함수의 정의역을 실수로 두기 위해서는 왜 단위원 상에서 wrapping function (circular function)을 도입해야 하는가 하는 이유 또한 설명이 가능해진다. 즉, 라디안의 차원을 없애기 보다는 오히려 그 반대로 rad단위를 강조하여야 하며, 그렇게 정의된 rad단위가 왜 사라질 수 있는가 하는 것을 수학적인 관점에서 올바르게 설명하는 것에 초점을 맞추어야 한다. 그러면 라디안 단위가 왜 각의 단위로서 도(°)단위 보다 중요한 단위가 되는지를 설명할 수 있는 것이다.

학생들에게 라디안을 지도하는데 있어서 라디안은 측정 가능한 각의 단위라는 관점에서 지도해야 하며, 이른바 라디안의 실수적 관점

19) 라디안이 무차원이라는 말 자체가 결국 라디안이 실수적 특성을 가진다는 주장이며, 이러한 주장하에서 π와 πrad 사이의 혼동을 피하는 것은 결코 쉽지 않은 일이라 생각된다.

이라는 것들은 라디안의 성질에서 파생되는 관점이라는 것을 중심으로 지도해야 한다. 또한 각을 측정하는 단위로서 1°라는 단위의 사용에 그치지 않고 왜 $1rad$라는 새로운 단위를 도입하여야 하는가를 수학적인 관점에서 이해 할 수 있도록 하여야 한다. 아울러 라디안 자체가 실수로서 받아들여지는 것을 경계해야 π와 πrad을 혼동하는 등의 오개념이 생기지 않을 것으로 본다.

나아가 현행 고등학교 수학교과서에서 채택되고 있는 삼각함수의 정의방식만을 고집하지 말고, wrapping function(circular function)을 도입하여 삼각함수를 도입하는 것도 고려해 볼만하다. 이렇게 된다면 삼각함수의 정의역이 호의 길이, 즉 실수차원이 된다는 것을 학생들이 바로 이해할 수 있을 것 이며, $\sin x$ 에서의 x가 각인지 실수인지에 대한 혼동이나 '$\sin x$에서 x가 라디안이면 x는 실수차원이 된다' 라는 등의 오개념들도 근본적으로 방지할 수 있을 것이다, 또한 차후 대학교 과정에서의 고등 삼각함수의 학습에 있어서의 연속성을 보장할 수 있을 것으로 본다. 다만 이러한 경우 학습자 입장에서 습득과 이해에 어려움을 겪을 수 있을 것으로 생각한다. 이와 같은 학습자의 어려움의 극복을 위해서 본 연구에서 제시하는 결론 중 하나인 '고등학교 과정에서 wrapping function(circular function)의 도입'을 어떻게 할 것인지에 대한 구체적 방안에 대한 후속 연구의 진행이 필요할 것으로 생각된다.

다만, 후속 연구의 필요성을 제시함과 동시에 하나의 큰 그림으로서의 대안을 제안한다면 현재의 고1과정 수학교과서에서 제시되는 삼각함수의 정의는 그대로 두되 $l = r\theta$ 에 대한 올바른 이해만을 우선적으로 강조하고, 차후 자연계열 학생들이 배우게 되는 '삼각함수의 덧셈정리' '삼각함수의 공식과 삼각방정식' 단원 부분에서 wrapping function(circular function)을 도입하여 삼각함수의 정의를 새로운 방법으로 다루는 방식이다. 이러한 방식은 삼각함수의 극한, 삼각함수의 합성함수, 삼각방정식 등의 심화된 삼각함수를 다루어야 하는 자연계열 학생들에게 있어서, 새로운 방식으로 정의된 삼각함수가 가지는 의미를 연계되는 학습 내용들(초월함수의 극한, 초월함수의 미분적분)과 관련하여 생각할 수 있게 함과 동시에, 단계별 학습을 통한 난이도의 해소라는 두 가지 목표를 모두 얻을 수 있을 것으로 본다.[20]

본 연구는 지금까지 라디안에 대한 두 가지 관점을 살펴보고 라디안을 무차원 단위계, 혹은 실수적인 관점에서 바라보는 관점은, 라디안 단위의 본질과 $l = r\theta$ 에 대한 오해로부터 시작되는 것임을 고찰하였다. 측정가능한 각의 크기로서의 라디안의 본질과, 그러한 방식으로 정의된 라디안 단위계로부터 파생되는 장점, 이 두 가지를 명확히 구분하여 지도 한다면, 라디안 지도에 대한 어려움을 극복할 수 있을 것으로 보여진다.

참고문헌

나병채(2002). **고등학교 2학년 학생들의 삼각함수 개념에 대한 이해 실태 분석.** 교원대학교 대학원 석사학위 논문.

남진영 · 임재훈(2008). 라디안에 대한 교수학적 분석. **수학교육학연구, 18**(2) 263-281.

박윤범 · 박해숙 · 권혁천 · 김홍섭 · 육인선 · 송상헌(2001). **고등학교 수학 10-나.** 대한교과

20) 이러한 단계적 학습 방식은 현행 고등학교 교과서에서 '삼각함수의 덧셈정리' '삼각함수의 공식과 삼각방정식' 등의 단원을 자연계열 학생들만이 학습 하도록 한 방식과 일맥상통한다.

서.

송은영(2008). **삼각함수 개념의 지도에 관한 연구.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

우정호(2002). **학교수학의 교육적 기초.** 서울대학교 출판부.

이상훈(1995). **각의 교육에 대한 소고.** 논문집. 삼척대학교. 229-241.

이지아(2008). **호도법 개념에 대한 인지적 장애의 개선 지도 방안.** 서강대학교 교육대학원 석사학위 논문.

장영수(2006). **삼각함수 개념의 이해 실태 분석 및 지도 방안에 관한 연구.** 교원대학교 대학원 석사학위 논문.

정현아(2008). **고등학교 10-나 단계 삼각함수 개념의 이해와 지도에 관한 연구.** 이화여자대학교 교육대학원 석사학위 논문.

Abraham Spitzbart. (1962). *Algebra and Trigonometry.* Addison-Wesley Publishing Inc.

Alvin K. Bettinger. (1963). *Algebra and Trigonometry.* Intenational Textbook Company

Arthur B. Simon. (1979). *Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry.* W.H.Freeman and Company

Brownstein. K. R. (1997). *Angle-Let' treat them squarely.* Am. J. Phys. 65(7), 605-614.

Daniel E. Dupree. (1968). *College Algebra and Trigonometry.* Prentice-Hall, Inc.

Earl W. Swokowski. (1993). *Fundamentals of Algebra and Trigonometry.* PWS Publishing Company.

Edward B. Burger. (2007). *Algebra 2.* Hol, Rinehart. and Winston.

French A. P. (1992), *What happens to the "Radians?"* The Physics Teacher. 30(May), 260-261.

Howard A. Silver. (1986). *Algebra and Trigonometry.* Prentice-Hall.

J. Louis Nanney. (1980). *Algebra and Trigonometry.* Allyn and Bacon, Inc.

John R. Durbin. (1988). *College Algebra and Trigonometry.* John Wiley & Sons, Inc.

Judith A. Beecher. (1998). *Algebra and Trigonometry-3rd ed.* Pearson Education Inc.

Louis Leithold. (1989). *College Algebra and Trigonometry.* Addison-Wesley Publishing Inc.

Richard E. Johnson. (1982). *Algebra and Trigonometry.* Addison-Wesley Publishing Inc.

Richard S. Paul. (1978). *Algebra and Trigonometry for College Student.* Reston Publishing Company Inc.

Robert G. Stein. (1986). *College Algebra with Trigonometry.* Nelson-Hall, Inc.

The AAPT Metric Education and SI Practices Committe (G. J. Aubrecht II, A.P. French, M. Iona, D. W. Welch) (1993). *The Radian - That Troublesome Unit.* The Physics Teacher, 31, Feb., 84-87.

Toeplitz O. (2006) **토플리츠의 미분적분학.** (우정호 임재훈 박경미 이경화 역). 서울: 경문사. (영어원작은 1963년)

William J. Bruce. (1971). *Algebra and Trigonometry.* Meredith Corporation.

The Radian
- Radian is the angle? or the pure number?

Kim, Wan Jae (Student, Seoul National University)

Despite the many discussions of mathematics education, there are a lot of controversy of the Radian. Generally, Radian is taken to have two properties. One property is an angular property and other is a property of pure numbers. For this reason, both Students and teachers are hard to understand the radian.

This study is to provide a base of the radian understand. In essence, radian has only angular property, and other property is a derived property. So radian is to be understood in an angle.

* **Key Words** : radian(라디안), circular measure(호도법), trigonometric function(삼각함수), degree(각도)

논문접수: 2009. 7. 8.
논문수정: 2009. 8. 13.
심사완료: 2009. 2. 23.