대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 3, 371-392. Aug 2009

초등학교 교사들의 수학적 정당화에 대한 연구

김 정 하* · 강 문 봉**

본 연구는 초등학교 교사들의 수학적 정당화에 관한 인식을 설문 조사와 면담을 통하여 연구한 것이다. 초등학교 교사를 수학 관련 교과를 전공한 교사(수학 관련 교사)와 그 밖의 교과를 전공한 교사(비관련 교사)로 구분하여 두 집단 간의 수학적 정당화의 인식과 정당화의 선호도를 조사 연구하였다. 조사 결과, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 첫째, 우리나라 초등학교 교사들은 비교적 수학적 정당화에 대해 대체로 잘 이해하고 있다. 수학적 정당화는 필요하며 이는 논리적 사고를 기르거나 수학적 지식을 이해시키는 데에 좋은 방법이라는 것에 대해 잘 인식하고 있으며, 권위적 정당화를 선호하지 않고, 형식적 정당화나 귀납적 정당화를 더 가치 있게 여기고 있다. 둘째, 우리나라 초등학교 교사들은 자기 자신이 증명을 할 경우에는 형식적인 수학적 정당화를 선호하나, 학생들을 가르칠 경우 학생들의 이해를 위해 형식적 증명보다는 귀납적 정당화나 그림과 같은 단서를 이용하는 것이 더 효과적이라고 생각하고 있었다.

Ⅰ. 들어가며

NCTM(1989)은 수학적 추론이 학교 수학의 중심이 되어야 한다고 주장하고 있다. 또한 NCTM(2000)은 수학적 추론과 증명은 현상의 넓은 영역에 대한 통찰을 개발하고 표현하는 강력한 방법들을 제공하며, 분석적으로 사고하고 추론하는 사람은 실생활 상황과 상징적 대상에서 패턴과 구조, 규칙성 등을 주목하는 경향이 있다고 말하면서, 중·고등학교에서뿐만 아니라 유치원에서부터 고등학교 3학년에 이르기까지 일관되게 추론과 증명이 지도되어야 한다고 주장한다. 또한 최근 연구자들과 교육과정은 증명과 증명하기를 모든 학년과 모든 영역에서 학생들의 학교수학 경험에서 중심이 되도록 해야 한다고 주장한다. 증명과 증명하기는 수학을 알고 행하는 것의 기초가 되기 때문이라는 것이다. 그들은 증명이 수학적 이해와 수학적 지식을 의사소통하고 확립하고 발전시키기 위해 필수적이라고 생각하고 있다(Stylianides, 2007). 물론 학년에 따라 그 증명과 정당화의 수준은 다를 수 있을 것이다. 그러나 주장의 원인을 찾고 근거를 논리적으로 설명해 나가는 힘은 어려서부터 길러져야 한다는 데 의견의 일치를 보고 있다(King, 1973; Reid, 2000; Russell, 1999). Krulik & Rudnick(1993)도 어린이들은 추론을 할 수 있어야 하고 문제 상황들 간의 관계로부터 속성을 추상화하고 그런 후에 자신의 결론이나 주장을 설명하고 정당화

* 인천일신 초등학교, seakjh@hanmail.net
** 경인교육대학교 수학교육과, mbkang@ginue.ac.kr

할 수 있어야 한다고 주장한다.

이와 같이 수학적 증명과 정당화는 학생들의 수학 학습에 매우 중요한 요소이다. 그러나 학생들의 증명과 정당화 능력을 신장시키는 데에는 교사의 여기에 대한 인식과 능력이 무엇보다 중요하다고 할 수 있다. 제7차 수학과 교육과정은 "중학교에서의 증명은 엄격한 논리 전개 보다는 이유를 조리 있게 설명하는 정도로 한다는 것에 유의하여 지도한다(교육인적자원부, 1999)"고 명시하고 있다. 이것은, 증명을 처음 학습하는 학생들에게 모든 수학 학습에서 완전한 증명을 요구하는 것은 무리이며 증명의 필요성과 형식을 이해하게 하고 간단한 증명을 할 수 있게 하며, 학생들의 수학 학습이 높은 수준으로 진행되면서 증명의 엄밀성도 점차적으로 그 수준을 높여 가는 것이 바람직하다는 인식 때문일 것이다. 그러나 교사들은 서둘러서 기호의 사용과 논리적 전개에 중점을 두고 지도를 하거나, 대학수학능력시험에서 증명이 출제되지 않는 것을 기화로 증명을 거의 다루지 않고 있는 실정이다. 특히, 초등학교에서는 직관적 방법에 의해 도형 영역을 다룸으로써 증명이나 정당화에 대한 지도를 전혀 하지 않고 있다. 그러나 초등학교 학생들도 정당화를 할 수 있는 능력을 가지고 있으며, 초등학교에서부터 정당화에 대한 지도가 필요하다는 주장들이 제기되고 있다(King, 1973; NCTM, 1989; Reid, 1995; Russell, 1999; Reid, 2000; NCTM, 2000; Stylianides, 2007; 강문봉, 1996; 권성룡, 2003).

따라서, 이 연구에서는 초등학교 교사들이 수학적 정당화에 대해 어떤 생각을 하고 있는가를 조사하려고 한다. 외국의 경우 학생들의 정당화에 대한 이해의 상태에 대한 연구뿐만 아니라 교사들의 정당화에 대한 아이디어를 검사하는 연구가 종종 있어왔다(Senk, 1985; Martin & Harel, 1989; Simon & Blume, 1996; Harel & Sowder, 2007). 이 연구들의 공통된 결론은 교사나 학생 모두 정당화에 대한 이해가 부족하다는 것이다. 한편, 우리나라의 경우에는 이에 대해 대부분 사례 연구 중심으로 연구가 이루어지고 있어서 그 정도를 가늠하기가 쉽지 않다(송상헌 외, 2006; 이경화 외, 2007). 그러므로 우리나라 초등학교 교사들은 수학적 정당화에 대해서 어떤 생각을 하고 있는지를 설문지와 면담을 통하여 조사하고 분석하려고 한다.

Ⅱ. 선행연구 분석

1. 정당화의 실태에 대한 선행 연구

먼저 학생이나 교사를 대상으로 한 수학적 정당화에 대한 연구를 살펴보자. Lester(1975)는 학생들이 증명 또는 증명과 비슷한 과제를 해결하는 능력과 생활 연령과의 관계를 조사하기 위해 6세부터 18세의 학생을 대상으로 조사를 했다. 그는 4개의 그룹(1-3학년 그룹, 4-6학년 그룹, 7-9학년 그룹, 10-12학년 그룹)의 학생 각 19명에게 규칙을 선택하면 그 규칙이 증명을 하는 데에 적용되어 목표 과제에서 그들이 수행하도록 하는 게임형식으로 된 시스템을 제공하였다.[1] 7-9학년 학생들은 10-12학년 학생들만큼 수행을 잘 했으며, 4-6학년 학생들은 오랜 시간이 걸렸지만 더 나이가 많은 학생들만큼 많은 과제를 해결했다. 이 실험을 통해 Lester는 "초등학교 고학년(4-6) 학생들이라도 시간이 조금 더 주어진다면 증명과 밀접하게 관련이

1) Ohaio State University Computer-Assisted-Instruction(CAI) Center의 의해 만들어진 time sharing 시스템을 이용한 Computer Terminal

있는 수학적 활동을 성공적으로 할 수 있다"라고 주장하였다. King(1970, 1973)도 평균 이상의 6학년 10명의 학생들이 교사의 도움으로 증명을 시작할 수 있었음을 발견했다. Reid(2002)는 초등학교 2학년을 대상으로 실험을 하였고 Machtinger(1965)는 심지어 유치원 학생을 대상으로 추측하고 증명하기를 하도록 하였고 학생들은 성공적으로 스스로 증명할 수 있었다. 권성룡(2003)은 초등학교 5학년을 대상으로 형식적 추론이 가능함을 밝혔다. 이상에서 살펴본 바와 같이, 초등학교 고학년은 물론, 저학년 그리고 심지어는 유치원 학생들까지도 형식적 추론이 가능하다는 점을 알 수 있다.

다음으로 이러한 학생들을 지도하는 교사들의 수학적 정당화의 실태에 관한 연구를 살펴보자. Martin과 Harel(1989)은 101명의 초등학교 예비교사들을 상대로 이미 알고 있는 친근한 명제와 그렇지 않은 명제를 이용하여 귀납적 정당화와 형식적 정당화에 대해 수학적으로 옳은지를 판단하는 조사를 실시하였다. 각 명제에 대해서 절반 이상의 학생들이 귀납적 논증을 타당한 수학적 논증으로 받아들였다. 60% 이상은 옳은 형식적 논증을 타당한 수학적 논증으로 받아들였다. 친숙한 명제에 대해서는 38%가 그리고 친숙하지 않은 명제에 대해서는 52%가 잘못된 형식적 논증도 수학적으로 옳은 것으로 받아들였다. 1/3 이상의 학생들은 귀납적 논증과 정확한 형식적 논증을 동시에 수학적으로 옳은 것으로 받아들였다. 결국, 학생들은 귀납적 추론과 형식적 추론을 구분하지 못했으며, 귀납이 수학적 일반화를 지지하기에는 부적절하다는 사실을 인식하지 못하였다고 결론지었다.

Simon과 Blume(1996)은 예비 초등교사 대상의 수학강좌에서 나타나는 수학적 정당화를 연구하였다. 즉 구성주의에 기반을 둔 교수실험으로 운영된 학급을 대상으로 수학적 정당화에 관한 교실규범이 어떻게 형성되었으며 규범의 발달에 영향을 끼친 이슈는 무엇인지에 대해 세 가지의 에피소드를 통하여 살펴보았다. 그리고 그 과정에서 교실 문화의 일부로서의 형식적 정당화를 강조하는 규범을 만들어 내고자 하는 교사의 노력을 통해 예비 초등 교사들이 보이는 정당화 수준을 범주화하였다.

Knuth는 16명의 현직 중등교사들에게 증명의 개념을 검사하였는데, 교사들에게 증명에 대한 일반적인 질문(수학에서 증명은 어떤 목적인가? 등)을 하고, 주어진 논증(증명과 증명이 아닌 것 모두)을 평가하게 하고, 어떤 논증이 가장 확신을 갖게 하는지 확인하게 하였다. 6명은 증명된 문제에서 모순적인 증거를 찾아낼 수 있을 것이라고 생각했으며, 4명은 모든 교사들이 반례를 찾을 수 없을 것이라고 확인한 것일 때조차 주어진 진술을 테스트 할 때 예에서 증명을 확인하였다. 교사들은 증명으로서 논증을 93% 정도 정확하게 확인하였지만, 1/3이 넘는 비증명 논증을 증명으로 분류하였다. 10명의 교사들은 한 명제의 역의 증명을 그 명제의 증명으로 받아들였다. 13명은 강력한 예 또는 시각적 표상에 기초한 논증을 찾아냈다. Knuth는 더 나아가 학교수학의 맥락에서 이 교사들의 증명에 대한 아이디어를 검사했다. NCTM이 제안한 학령기의 모든 단계에서 추론과 증명은 수학 공부의 기초가 되어야 한다는 관점에서 볼 때, Knuth의 교사들의 "증명은 소수의 학생들에게 적합한 수학교육의 목표"라는 관점은 실망스럽지 않을 수 없다. 14명은 학교수학에서 증명이 주요한 내용이 되어야 한다고 생각하지 않았으며, 7명이 입증으로서의 증명의 역할을 언급하였음에도, 아무도 설명으로서의 증명의 역할은 언급하지 않았다. 13명은 논리적 사고나 추론의 발달을 학교수학에서 증명

의 기본적인 역할로 간주하였다. 교사들은 정당화를 완전히 기각하지는 않았으나, 결론을 뒷받침하는 그림이나 예와 같은 비형식적 증명에 의존하려고 하였다. 이러한 관행은 학생들이 그러한 것을 수학적 증명으로 받아들일 수 있다고 생각하도록 잘못 이끌었고, 그들의 경험적 증명 스킴의 수용을 강화했다(Harel & Sowder, 2007).

이상의 연구 결과를 살펴볼 때, 예비 또는 현직 교사들의 수학적 정당화에 대한 이해도 및 정당화의 능력이 그리 높지 않음을 알 수 있다. 비록 외국에서의 연구 결과이기는 하지만, 초등학교 학생들의 정당화 가능성에 비해서 정당화에 대한 교사들의 낮거나 잘못된 인식은 상당한 문제가 아닐 수 없다. 특히 우리나라의 경우 교사들의 정당화에 대해 대부분 소규모의 사례 중심으로 그리고 학생 대상으로 연구가 이루어지고 있어서, 정당화를 지도해야 할 교사들을 대상으로 한 연구가 절실히 필요하다고 할 수 있다.

2. 정당화의 유형 및 수준에 관한 선행 연구

증명이나 정당화에는 식으로 표현되거나 완벽한 논리에 의해서만 전개되는 형식적인 것만을 말하는 것은 아니다. Samandeni(1984)는 초등학교 아동들을 위해 활동적 증명을 고안하여 아동들이 어떤 명제의 타당성에 대한 확신을 얻을 수 있도록 직관적 설명과 형식적 논증을 매개하는 것에 목적을 두어 연구를 하였다. 이러한 Samandeni의 생각과 일치하는 것으로 Blum & Kirsch(1991)는 타당하게 표현된 형식적 결과는 아니지만 옳지만 형식적이 아닌 전제들의 고리를 전형식적 증명이라고 하였다. 논증에 바탕이 되는 직관적이면서도 명확한 것은 개인적 지식에 바탕을 두고 각각의 개인에 의해 결정될 수 있어야 한다는 것이다. 엄밀한 것과 형식적인 것을 같은 의미로 보아서는 안 된다는 것이다.

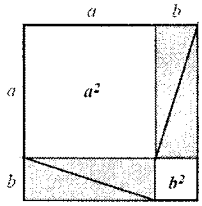
김민주(2006)는 수학적 정당화에는 일정한 수준이나 순서는 존재하지 않고 학습하는 과제의 특성에 따라 그 유형이 전해지는 것이라고 하였다. 또한 학생들이 사용하는 수학적 정당화의 유형을 통하여 학생들의 문제 해결 전략이 산술적인 방법에서 대수적인 방법에 기반을 둔 문제 해결 방법으로 자연스럽게 이행되는 과정을 확인할 수 있었다고 한다.

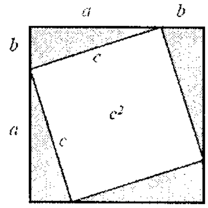
이와 같이 여러 학자들의 연구에 따르면, 수학적 정당화에 관한 다양한 의견이 있다. 이에 본 연구에서는 수학적 정당화에 대한 교사들의 인식을 조사하기 위해 수학적 정당화의 유형 및 수준에 대한 선행 연구를 분석하였다.

Balacheff(1987)는 개념화의 특징, 형식화, 정당화의 세 가지 기준을 바탕으로 하여 증명을 활동적 정당화와 지적 증명, 논증의 세 가지 수준으로 구분하였다. 첫째, 활동적 정당화는 실제적인 행위나 보여주기를 통한 정당화로 순수한 경험주의(naive empiricism)와 결정적 실험(crucial experiment)으로 나누었다. 순수한 경험주의는 소수의 평범한 사례로부터 그 추측이 참일 것이라고 결론짓는 단계를 말하며 결정적 실험에서는 매우 특별하고 극단적인 사례를 조사함으로써 보다 명백하게 일반화하는 것에 대한 가능성을 다룬다. 이 두 수준의 차이는 순수한 경험주의에서는 학생들이 몇 가지 예를 선택하고 추측하고 그 결과가 타당하다고 확신하는 반면, 결정적 실험에서는 일반화의 가능성을 의식하여 극단적인 예를 가지고 확신할 필요가 있다고 생각하는 것이다. 이 수준의 학생들은 아주 대조적인 두 예에서 자신들의 추측이 참이면 그 사이에 있는 다른 모든 경우도

참일 것이라고 생각한다. 그러나 자신들의 추측이 왜 참이 되는지를 형식적으로 입증하지는 못한다. 따라서 형식적인 정당화와는 구분된다. 둘째, 지적 증명은 활동은 없지만 문제에 제시된 특성을 형식화하고 그들 간의 관계에 의존하여 행하는 증명으로 포괄적 예(generic example)와 사고실험(thought experiment)으로 범주화하였다. 포괄적인 예에서는 특정한 사례가 초점이 되기는 하지만 특정한 하나의 사례에 지나지 않고 가능한 모든 경우의 대표적인 예를 선택하여 자신의 추측을 조사한다. 사고 실험 수준에서 학생들은 앞에서의 세 가지 경우와 마찬가지로 귀납적인 방법으로 추측을 할지도 모르지만 몇 가지 예에 의존해서 자신의 설명 또는 정당화를 시도하지 않는다. 경험적인 정당화에서 벗어나 형식적인 정당화를 시도한다. 이 수준의 학생들은 자신들의 기하에 관한 지식을 근거로 증명한다. 전통적인 증명 지도에서 나타나는 증명 전개 양식과 유사하지만 일단 증명과 같은 형식적인 증명 전개 양식만을 고집하지는 않는다. 세 번째로 논증은 이론으로 조직되어 수학계에서 인정받을 수 있는 방법이라고 하였다(김성대, 2006; 류희찬 · 조완용, 1999; 송상헌 외, 2006).

Tall(1995)은 증명을 활동적 증명, 시각적 증명, 조작적 증명, 형식적 증명으로 나눈다. 활동적 증명은 어떤 대상이 참임을 보이기 위해서 물리적인 활동을 실행하는 방법이며, 이 과정에서 시각적이고 언어적인 요소도 포함되지만 관계를 보여주기 위해서 물리적인 움직임이 필요하다는 것이 가장 중요하다. 시각적 증명은 활동적 증명과 마찬가지로 활동적인 요소와 언어적 요소가 수반되지만 활동 과정보다는 결과가 중시되는 방법으로 이는 위에서 설명한 Balacheff의 포괄적 예와 유사하다. Tall의 시각적 증명은 종종 활동적인 요소를 포함한다. 시각적 증명의 예로 인도의 유명한 수학자 바스카라가 피타고라스의 정리를 증명한 것을 들 수 있다. 바스카라는 삼각형의 두 변 a, b 그리고 빗변이 c인 직각 삼각형을 4개 그리고, 이를 적절히 배치하여 한 변의 길이가 a+b인 정사각형을 두 가지의 다른 방법으로 그렸다. 그 남아 있는 부분은 두 정사각형의 넓이 a^2과 b^2, 그리고 다른 하나의 정사각형의 넓이 c^2이 되므로 $a^2+b^2=c^2$이다.





조작적 증명은 대수식과 같은 기호를 조작함으로써 증명하는 방법이며, 형식적 증명은 형식적 추론을 통한 증명이다.

Harel과 Sowder(1998, 2007)는 증명 또는 정당화의 스킴을, 외적 확신 증명 스킴, 경험적 증명 스킴, 형식적 증명 스킴의 3가지 범주로 나누었다. 첫째, 외적 확신 증명 스킴에는 (a) 권위적 정당화로 책이나 교사와 같은 권위에 의존하는 것, (b) 관습적 정당화는 논증의 외적 형식에 강하게 의존하는 것(예를 들면 기하 증명은 반드시 이단 형식이어야 한다), (c) 참조가 없는 기호주의는 의미 없는 기호 조작에 의존하는 것 등이 있다. 둘째, 경험적 증명 스킴은 (a) 대수적 표현에서 특수한 숫자를 대입하거나 직접적인 양을 측정하는 예로부터의 증거에 의존하는 귀납적 증명과 (b) 지각에 의존하는 지각적 증명 스킴이다. 셋째, 형식적인 증명 스킴은 변환적 증명 스킴(transformational proof scheme)과 공리적 증명 스킴(axiomatic proof scheme)의 하위 범주를 갖는다. 모든 변환적 증명 스킴은 일반성, 조작적 사고, 논리적 추론의 필수적인 특징을 가지고 있다.

Simon과 Blunme(1996)은 예비 초등 교사들이 보이는 정당화 수준을 범주화하였다. 0수준은 정당화가 나타나지 않은 단계로 단순히 동기를 확인하려는 반응에 해당한다. 1수준의 학생들은 수학이 수학 교사나 교과서와 같은 권위 있는 근거로부터 기인하기 때문에 타당하다고 간주한다. 2수준에서는 특정한 예의 옳음을 통하여 정당화를 제시하는 경험적인 증거에 의존한다. 3수준에서는 논증의 일반적인 특징을 포함하는 포괄적인 예에 의하여 정당화하고, 4수준에서는 특정한 예와 독립적으로 형식적인 논거를 통하여 타당성을 확립한다. 그리고 이와 같이 범주화된 수준이 외부적으로 결정되는 타당성에 의존하는 것에서부터 결과와 알려진 초기 전제를 연결하고 집단의 공유된 지식에 근거한 수학적 관계에 참여하는 것에 이르기까지 수준에 따라 단계적으로 발달한다고 설명하였다.

이상의 연구 결과를 볼 때, 여러 학자들이 다른 표현을 사용하고 있기는 하지만, 공통적으로 정당화에 일정한 수준이 있음을 확인하고 있다는 사실을 알 수 있다. 그러므로 이 연구에서는 Balacheff(1987), Tall(1995), Harel & Sowder(1998, 2007), Simon & Blume(1996) 등의 연구를 바탕으로 하여 정당화의 유형을 크게 외적 확신에 의한 정당화, 경험적 귀납적 정당화, 포괄적 예에 의한 정당화, 형식적 정당화의 4가지로 범주화하였다. 좀 더 세부적으로는, 외적 확신에 의한 정당화를 권위적 정당화, 관습적 정당화, 의미 없는 기호주의 정당화로 구분하고, 경험적 귀납적 정당화는 평범한 예에 의한 정당화와 결정적(극단적) 예를 사용하는 정당화로, 포괄적 예에 의한 정당화는 포괄적 예와 시각적 예에 의한 정당화로 구분하였다. 마지막으로 형식적 정당화, 즉 논증으로 범주화하고, 이를 바탕으로 하여 교사들의 수학적 정당화에 대한 이해 및 인식을 조사하려고 한다.

Ⅲ. 조사 및 결과 분석

1. 설문 도구의 개발

설문 도구는 크게 두 부분으로 나누었다. Part Ⅰ은 정당화에 대한 교사들의 인식을 확인하고자 하는 문항으로, 교사들의 전공(심화과정)과 수학에 대한 선호도 그리고 수학을 가르친 경력, 증명에 대한 여러 가지 인식에 대해 물었다. Part Ⅱ는 몇 가지 명제에 대해 교사가 직접 증명하는 문항과 주어진 여러 가지 증명 방법 중에서 선호하는 증명을 선택하는 문항으로 구성하였다. 예비설문에서 이 부분이 너무 많고 어렵다고 반응하는 교사들이 있어서 일부 문항을 삭제하였다.

본 설문 도구는 여섯 차례의 수정을 걸쳤으며 수학교육전공 대학 교수 2명과 수학교육전공 대학 강사 1명에게 이메일과 전화 통화를 통해 수정 보완하였고 1차 예비 설문 조사를 통하여 설문에 대한 교사들의 생각을 물었다.

Part Ⅰ의 1-5번 문항은 교사들의 전공(심화과정)과 수학에 대한 선호도, 수학을 가르친 경력에 대해 물었다. 예비설문에서 6번 문항부터 11번 문항까지는 수학적 정당화에 대한 교사의 생각을 직접적으로 묻는 것으로 구성하였으나 뒤 설문의 내용이 길고 어렵다고 반응하는 교사들이 있어서 4번째의 증명 문제와 중간 중간 점검하는 설문지를 삭제하는 대신 12, 13번 문항을 추가하였다. 6번과 7번 문항은 수학적 정당화의 필요성에 대해 묻는다. 8번과 9번 문항은 수학적 정당화가 논리적 사고와 수학적 지

식의 이해에 어떤 관계가 있는지를 묻고 있다. 10번 문항은 교사가 가지고 있는 수학적 정당화의 유형을 확인하기 위한 것으로, 포괄적인 예를 통한 정당화(Balacheff, Simon과 Blunme), 극단적 예를 통한 정당화(Balacheff), 귀납적 정당화(Harel과 Sowder, Balacheff, Simon과 Blunme), 권위적 정당화(Harel과 Sowder, Balacheff, Simon과 Blunme), 형식적 정당화, 즉 논증(Harel과 Sowder, Balacheff, Tall, Simon과 Blunme)으로 구성되어 있다. 11번 문항에서 권위적 정당화를 다시 한번 확인하고 있다. 12번과 13번 문항은 학생들에게 바라는 정당화의 유형 또는 학생들이 선호할 것으로 생각되는 정당화의 유형을 묻고 있다.

Part II에서는 Leddy(2001)의 토론토에서의 연구와 Healy & Holyes(1998)의 런던에서의 연구에서 아이디어를 얻어 수학적 정당화의 유형을 제시하고 교사의 입장에서 각각의 수학적 정당화에 대해 점수를 1점에서부터 5점까지 부여하도록 하였으며 각각의 수학적 정당화에 대해 '잘못된 부분이 있다' '명제가 항상 참이라는 것을 보였다' '단지 몇 개의 연속된 수에 대해 명제가 참이라는 것을 보였을 뿐이다' '명제가 왜 참인지 보였다.' '잘 이해하지 못하는 친구에게 설명하기에 쉬운 방법이다.'라는 항목에 대해 동의하는지, 그저 그런지, 동의하지 않는지에 대해 체크하도록 체크리스트를 만들었다. 첫 번째와 두 번째 문제는 대수 영역이고, 세 번째 문제와 네 번째 문제는 모두 기하 영역이다. 첫 번째 문제는 '홀수 더하기 홀수는 짝수이다'에 대한 수학적 정당화의 예를 제시하였다. 두 번째 문제로는 '두 연속된 자연수의 제곱수를 더할 때 답은 항상 홀수이다'를 자신을 확신시키기 위한 수학적 정당화와 교사로서 학생들을 확신시키기 위한 정당화의 두 가지 방법으로 수학적 정당화를 시도하도록 하였다. 세 번째 문제는 4학년 나 단계에 나오는 사각형의 내각의 크기의 합에 대한 수학적 정당화의 예를 제시하였다. 네 번째 문제는 '선분 AB의 수직이등분선 위에 있는 점을 C라고 할 때 삼각형 ABC는 항상 이등변삼각형이다'라는 명제를 정당화한 예를 보여준 것이다. 예비 설문 조사에서는 다섯 번째로 '사각형 RSTW와 SXTW가 평행사변형일 때, 삼각형 RSW와 삼각형 SXT는 합동이다'라는 명제를, 자신을 확신하기 위한 수학적 정당화와 교사로서 학생들을 확신시키기 위한 정당화의 두 가지 방법으로 수학적 정당화를 시도하도록 하였으나 본 설문조사에서는 이 문항을 삭제하였다.

2. 설문 조사의 대상자

예비 설문 대상자는 인천광역시 소재 G 초등학교 교사 11명이었다. 1명은 10년 이상, 1명은 16년 이상, 그 외의 교사들은 1-5년 차의 교직 경력을 가지고 있었다. 3학년 담임교사 3명과 4학년 교사 5명, 그리고 5학년 교사 3명이 참여했다. 이들은 대체로 수학에 대한 거부감이 약한 그룹이다. 설문지를 통한 조사를 한 후 그 결과를 토대로 하여 개별 면담을 통해 그 반응의 이유를 묻는다.

예비설문 결과를 분석하고 이를 수정 보완하여 설문지를 완성한 후, 150명의 초등학교 교사들을 대상으로 하여 설문 조사를 실시하였으며, 그 중 회수된 설문지는 73개이다.

설문에 응한 교사들의 전공은 수학 관련 교과(수학, 과학, 컴퓨터 전공) 교사 37명, 그 외 교과 전공 교사 36명이었다(이하 이를 각각 '수학 관련 교사'와 '비관련 교사'로 부르기로 한다).

비관련 교사들은 대학에서 대체로 3과목의 수학 관련 과목을 수강하였고 수학 관련 교사의 경우에는 대학에서 수학을 5과목 이상을 수

강한 교사들이 70.2%였다. 비관련 교사들은 52.8%가 수학을 좋아하고 있으며 수학 관련 교사들은 94.6%가 수학을 좋아하고 있다. 수학을 가르치는 것을 좋아하는가에 대한 질문에 대해 비관련 교사는 63.9%가 긍정적인 응답을 하였고 수학 관련 교사의 경우는 91.8%가 수학을 가르치는 수업시간을 좋아한다고 응답하였다. 이것으로 보아 설문에 응답한 초등학교 교사들은 대체적으로 비관련 교사나 수학 관련 교사 모두 수학을 가르치는 것을 좋아하는 것으로 보인다. 설문에 응한 교사들은 비관련 교사의 경우 86.1%가 10년 이하의 경력을 지니고 있었으며, 수학 관련 교사의 경우 89.2%가 10년 이하의 경력을 지니고 있었다. 이는 예비 설문에서도 알 수 있듯이 본 설문의 특성상 수학이라는 것에 대해 비호감이거나 학교를 졸업한지 오래되었을 경우 설문에 응하는 것 자체를 거부하는 경향이 있었기 때문이다.

저학년을 담당하고 있는 교사나 교육 경력이 많은 교사들은 증명이라는 단어만으로도 거부반응을 일으키면서 설문에 응하지 않았다. "아마도 몇 날 며칠 걸리겠다." 또는 "난 증명은 못해." "내가 수학을 못한다는 게 드러날까 봐 싫어." "난 증명은 고등학교 때도 안했어." "난 앞부분만 할래. 뒷부분은 자신이 없어" 등 다양한 반응으로 설문에 응하지 않았다.

3. Part Ⅰ의 설문 조사 결과 분석

수학적 정당화가 필요한 이유에 대해서, Reid(1995)와 de Villiers(1999)가 강조한 타당화하기에 설문조사에 응한 교사 중 비관련 교사 34.3%, 수학 관련 교사 48.6%가 응답하여 가장 높은 백분율을 차지하였다. Harel & Sowder(1998)는 정당화의 과정을 확인하기의 과정과 설득하기의 과정으로 분류하고 그 중요성을 강조한 것과 같이 초등교사 역시 확신하기와 설득하기에 수학 관련 교사의 24%, 비관련 교사의 22.9%가 응답하였다. de Villiers(1999)의 발견과 여러 학자들이 강조하고 있는 의사소통은 각각 다음으로 비슷한 백분율을 보였으나 Reid(1995)가 증명 또는 수학적 정당화의 우선순위의 관계망 중 첫 번째 순위로 꼽았던 설명하기를 선택한 교사의 비율은 아주 낮았다.

6. 수학적 정당화(증명)는 왜 필요하다고 생각하십니까?	비관련 교사	수학 관련 교사
① 타당화하기	34.3	48.6
② 설명하기	8.6	2.7
③ 확신하고 설득하기	22.9	24.3
④ 발견하기	17.1	14
⑤ 의사소통하기	17.1	10.8

'초등학교에서' 수학적 정당화가 필요하다고 생각하는가에 대한 질문(문항 7)에 대해서는, 비관련 교사는 69.5%, 수학 관련 교사는 62.1%가 조금 그렇다 또는 매우 그렇다고 대답하고 있으며, 응답한 73명의 교사 중에서 2명만이 초등학교에서 수학적 정당화가 필요하지 않다고 응답하였다. 이로써 대부분의 초등학교 교사들은 초등학교에서도 수학적 정당화의 필요성을 느끼고 있음을 알 수 있다.

7. 초등학교에서의 수학적 정당화(증명)가 필요하다고 생각하십니까?	비관련 교사	수학 관련 교사
① 매우 그렇다	16.7	16.2
② 조금 그렇다	52.8	45.9
③ 보통이다.	27.8	32.4
④ 그렇지 않다.	0	5.4
⑤ 매우 그렇지 않다.	0	0

수학적 정당화가 학생들의 논리적 사고(문항 8)나 수학적 지식의 이해(문항 9)에 도움이 된다고 생각하는가에 대한 문항 모두에 대해서, 비관련 교사는 91.7%, 수학 관련 교사는 86.4%,

89.2%가 매우 그렇다거나 조금 그렇다고 응답하고 있으며, 그렇지 않다고 한 교사는 한두 명에 불과하였다. 설문에 응한 교사들은 수학적 정당화가 학생들의 논리적 사고나 수학적 지식의 이해에 도움이 된다고 생각하고 있음을 알 수 있다.

8-9. 수학적 정당화(증명)가 학생들의 논리적 사고에 도움이 된다고 생각하십니까?	8. 논리적 사고를 도움		9. 수학적 지식의 이해를 도움	
	비관련 교사	수학 관련 교사	비관련 교사	수학 관련 교사
① 매우 그렇다	38.9	43.2	27.8	32.4
② 조금 그렇다	52.8	43.2	63.9	56.8
③ 보통이다.	8.3	10.8	8.3	8.1
④ 그렇지 않다.	0	2.7	0	2.7
⑤ 매우 그렇지 않다.	0	0	0	0

10번 문항에서는 교사들이 어떤 유형의 수학적 정당화를 선호하는지를 조사하였다. 다음 표에서 알 수 있듯이, 비관련 교사는 귀납적 정당화 → 형식적 정당화, 포괄적인 예에 의한 정당화 → 극단적인 예에 의한 정당화 →권위적인 정당화의 순으로, 수학 관련 교사는 귀납적인 정당화, 형식적인 정당화 →극단적인 예에 의한 정당화 →포괄적인 예에 의한 정당화 →권위적인 정당화 순으로 선호하고 있음을 알 수 있다. 수학 관련 교사들은 비관련 교사보다 형식적 정당화를 선호하는 것으로 나타났다. 설문에 응한 교사들은 "될 수 있는 한 많은 예를 들어 주어야 그 정리가 맞는 것인지를 확신할 수 있다."라고 하는 경험적 · 귀납적 정당화를 가장 선호하였다. 비관련 교사들은 수학 관련 교사보다 포괄적 예에 의한 정당화를 보다 많이 선호하고 있음도 알 수 있다.

10. 어떤 명제나 정리가 참인지 거짓인지를 알아보려고 할 때 당신의 생각은 어떠하십니까?	비관련 교사	수학 관련 교사
① 좋은 예를 제시한다면, 예가 하나여도 충분하다.	25	10.8
② 극단적인 예 몇 개만을 조사해 보아도 그 정리가 맞는지 틀린지 알 수 있다.	16.7	13.5
③ 될 수 있는 한 많은 예를 들어 주어야 그 정리가 맞는 것인지를 확신할 수 있다.	30.6	35.1
④ 책에 제시되어 있는 정리는 훌륭한 학자들에 의해 참이라고 증명되어서 나온 것이므로 사실은 증명하지 않아도 된다.	2.8	5.4
⑤ 수학적으로 참으로 인정된 명제들이나 정리를 가지고 직접 증명을 해보아서 확인해야 확신한다.	25	35.1

11번 문항은 권위적인 정당화와 관련된다. 비관련 교사들은 72.2%가, 수학 관련 교사들은 54.1%가 권위적인 정당화를 인정하고 있다. 앞의 10번 문항에서는 권위적인 정당화를 각각 2.8%, 5.4% 선호하는 것에 비하면 높은 비율이다. ①번을 선택한 교사들 중 몇 명을 면담한 결과 "10번은 학생들을 가르칠 경우라고 생각했고 11번은 어려운 증명이라고 생각하여 학생보다는 교사 자신이 어떻게 할 것인가라고 생각했다."고 응답하였다.

11. 어떤 명제들은 10페이지 이상의 증명을 필요로 한다고 합니다. 이러한 증명이 유명한 학회에서 제시되었다면 당신의 선택은 어떠하겠습니까?	비관련 교사	수학 관련 교사
① 유명한 학자들이 참으로 인정했으므로 그 증명은 분명이 잘된 것으로 생각한다.	72.2	54.1
② 유명한 학자들이 참으로 인정했다 하더라도 내가 직접 증명해 보아야 그 증명이 잘 되었는지 잘못되었는지 알 수 있다.	27.8	40.5
무응답	0	5.4

학생들의 수학적 정당화에 점수를 줄 경우 어떤 학생에게 높은 점수를 줄 것인가에 대한 질문(문항 12)에 대해서, 비관련 교사는 형식적인 수학적 정당화(30.6%) → 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 수학적 정당화(19.4%) →귀납적인 수학적 정당화(13.9%) →포괄적인 예, 권위적인 수학적 정당화(5.6%) 순이며, 수학 관련 교사는 형식적인 수학적 정당화(32.4%) → 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 수학적 정당화(32%) →귀납적인 수학적 정당화, 권위적인 수학적 정당화(13.5%) →포괄적인 예에 의한 정당화(2.7%) 순으로 나타났다. 수학 관련 교사가 비관련 교사보다 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 수학적 정당화와 권위적인 수학적 정당화에 높은 점수를 주는 것으로 나타났다. 두 집단 모두 형식적 정당화와 귀납적 정당화에 있어서는 비슷한 비율을 차지하고 있으나 선택지 4번에서 "이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하여 정당화 하는 학생"에게 높은 점수를 주는 비율에서 비관련 교사는 19.4%, 수학 관련 교사는 32%로 큰 차이를 보였다.

그런데, 이런 결과는 교사 자신에게 정당화하는 경우(10번 문항)와는 차이점이 있다. 10번과 11번 두 문항에서 형식적 정당화를 요구하는 비율은 비슷하며 가장 높은 비율을 차지하고 있지만, 교사 자신의 경우에는 귀납적 정당화나 포괄적 예에 의한 정당화의 비율이 꽤 높은 편이지만 학생에게 요구할 때는 반 이하로 그 비율이 낮다. 수학자들도 정리의 증명을 읽어보지도 않고 수학자 자신이 그 정리가 참임을 믿을 수 있을 때 참인 것으로 인정하는 것처럼, 교사들도 귀납적이나 포괄적 정당화로 정리의 참을 인정하는 것 같아 보인다. 다만 학생들에게는 '교육적' 차원에서 형식적 증명을 요구하는 것이라고 생각된다.

12. 학생들에게 수학시간에 정당화하기를 시켰을 때 어떤 학생에게 높을 점수를 주겠습니까?	**비관련 교사**	**수학 관련 교사**
① 형식적으로 식과 문자를 쓰면서 정당화하는 학생	30.6	32.4
② 여러 가지 예를 들어가면서 정당화 하는 학생	13.9	13.5
③ 결정적으로 좋은 예가 되는 것 하나만을 찾아서 정당화 하는 학생	5.6	2.7
④ 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하여 정당화 하는 학생	19.4	32
⑤ 교과서나 선생님이 수업시간에 설명했던 것을 근거로 해서 정당화하는 학생	5.6	13.5
무응답	25	5.4

문항 13에서는 보기 중에서 학생들이 가장 선호할 것이라고 생각되는 수학적 정당화를 선택하도록 하였다. 비관련 교사는 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하는 시각적인 정당화(33.3%) → 포괄적인 예를 이용한 수학적 정당화(16.7%) → 귀납적인 수학적 정당화, 권위적인 수학적 정당화(11.1%) → 형식적인 수학적 정당화(2.8%)로 응답하였다. 수학 관련 교사는 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하는 시각적인 정당화(38%) → 귀납적인 수학적 정당화, 권위적인 수학적 정당화(21.6%) → 포괄적인 예를 이용한 수학적 정당화(8.1%) → 형식적인 수학적 정당화(5.4%)로 응답하였다.

12번 문항의 분석 결과에서는 형식적 정당화에 가장 높은 점수를 주었으나, 그럼에도 불구하고 학생들이 시각적 정당화를 가장 선호할 것이라고, 그리고 형식적 정당화에 대한 선호도가 가장 낮을 것이라고 생각하고 있었다.

13. 다음의 다섯 가지 보기 중에서 학생들이 가장 선호할 것이라고 생각되는 정당화의 방법은 무엇입니까?	비관련 교사	수학 관련 교사
① 형식적으로 식과 문자를 쓰면서 정당화하는 학생	2.8	5.4
② 여러 가지 예를 들어가면서 정당화 하는 학생	11.1	21.6
③ 결정적으로 좋은 예가 되는 것 하나만을 찾아서 정당화 하는 학생	16.7	8.1
④ 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하여 정당화 하는 학생	33.3	38
⑤ 교과서나 선생님이 수업시간에 설명했던 것을 근거로 해서 정당화하는 학생	11.1	21.6
무응답	25	5.4

지금까지의 분석에서 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째, 초등학교 교사들은 수학적 정당화가 주로 타당화하기, 확신하기와 설득하기의 기능을 가지고 있다고 생각하고 있는 것으로 나타났다. 둘째, 교사들은 초등학교에서도 수학적 정당화가 필요하다고 생각하고 있다. 셋째, 교사들은 수학적 정당화가 학생들의 논리적 사고와 수학적 지식의 이해에 도움이 된다고 생각하고 있다. 넷째, 초등학교 교사들은 자신이 초등학생들에게 수학적 정당화를 할 경우 귀납적 방법의 수학적 정당화를 선호하고 있으며 그 다음으로 형식적 방법의 수학적 정당화를 선호하고 있지만, 권위적인 방법의 수학적 정당화는 그다지 많지 않은 것으로 나타났다. 다섯째, 학생들의 수학적 정당화에 대해서는 문자와 식을 사용하는 형식적 정당화에 가장 높은 점수를 주고 다음으로는 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하는 수학적 정당화에 높은 점수를 주려고 하고 있다. 마지막으로, 교사들은 아동들이 이해하기 쉬운 단서가 들어있는 그림을 이용하는 정당화를 가장 많이 선호할 것으로 생각하고 있으며, 그 다음으로 수학 관련 교사들은 권위적인 방법에 의한 수학적 정당화를 그리고 비관련 교사들은 포괄적인 예에 의한 수학적 정당화를 선호할 것으로 생각하고 있다.

4. Part II의 설문 조사 결과 분석

문항 II-1에서는 "홀수 더하기 홀수는 짝수이다."라는 명제를 증명한 5명의 학생의 답안지를 다음 [그림 III-1]과 같이 제시하고, 두 가지 질문을 하였다.

집단에 구분 없이 설문에 응한 많은 교사들은 자신이 이 명제를 증명한다면, 영미와 같이 기호를 사용한 형식적인 수학적 정당화를 선호한다고 대답하였다(비관련 교사는 55.6%, 수학 관련 교사는 64.9%). 다음으로 비관련 교사는 여러 가지 예를 사용하여 귀납적으로 수학적 정당화를 시도한 민희의 답안지를 19.4% 선호하였고, 서술식이기는 하나 형식적 수학적 정당화를 한 훈이의 답안지(16.7%)를 자신의 답과 가까울 것이라고 하였으며 극단적인 예를 사용하는 진수의 답안지를 선택한 교사는 아무도 없었다. 수학 관련 교사는 상진의 포괄적인 예를 사용한 답안지를 11%, 훈이의 서술식 형식적 수학적 정당화를 10.8%로 자신의 답과 가까울 것이라고 응답했다. 비관련 교사가 민희의 귀납적 수학적 정당화를 선택한 비율에 비해 수학 관련 교사의 경우 37명 중 단 2명만이 민희의 방법을 선택했다. 두 집단의 교사 모두 진수의 극단적인 예로 수학적 정당화를 할 것이라는 것은 선택하지 않았다.

그러나 학생들에게 가르칠 때에는 기호를 사용한 형식적 방법을 사용하지 않는다. 비관련 교사는 상진이의 포괄적인 예를 사용한 수학적 정당화를 52.8% 그리고 민희의 귀납적 정당화를 27.8% 그리고 훈이의 서술적 형식적 정당화의 방법을 19.4%가 선택하였다. 수학 관련 교사의 경우 상진이의 포괄적 예에 의한 수학적

정당화의 방법을 32%, 훈이의 서술적 형식적 수학적 정당화를 29.7%, 민희의 귀납적 수학적 정당화의 방법을 24.3%가 선택하였다. 교사를 면담한 결과 "제가 풀기에는 영미의 것이 가장 간단하고 좋지만, 초등학생들은 문자를 배우지 않고 그렇기 때문에 영미의 증명은 이해할 수 없을 것 같다."고 응답하였다.

연구 결과 교사 자신이 수학적 정당화를 하는 방법과 학생들에게 지도할 때의 수학적 정당화의 방법에 많은 차이가 있는 것을 알 수 있으며, 진수의 극단적인 예를 사용하는 수학적 정당화는 선호하지 않았다(<표 Ⅲ-1>).

민희의 답 :

1+1=2 짝수
3+3=6 짝수
3+5=8 짝수
7+9=16 짝수
11+13=14 짝수

예에서 보듯이 홀수+홀수가 모두 짝수이므로 홀수+홀수=짝수라는 명제는 참이다.

진수의 답:

1+1=2짝수이고 13267+23489=36756으로 큰 수에서도 마찬가지로 홀수와 홀수를 더했을 때 짝수가 나오므로 모든 홀수+홀수=짝수라는 명제는 참이다.

훈이의 답:

모든 홀수는 둘씩 묶어 나머지가 하나가 남으므로 각각 두 홀수에서 하나씩 남는 것이 하나씩 하나씩 생겨서 그것을 다시 둘로 묶을 수 있으므로 결국에는 나머지가 생기지 않아서 짝수가 된다

상진의 답:

7+5를 예를 들어보기로 하자.
●● ●● ●● ● +●● ●● ●
7도 홀수이고 5도 홀수이다.
7의 경우 둘씩 묶어서 ●가 하나남고
5의 경우 둘씩 묶어서 ●가 하나남는다.
따라서 이것 둘이 다시 하나의 묶음이 되어서 결국에는 짝수가 된다.
모든 홀수와 짝수에서도 동일할 것이므로 이 명제는 참이다.

영미의 답:

n을 자연수라고 할 때
짝수는 2의 배수이고 즉 2n
홀수는 2의 배수 더하기 일 즉 2n+1이다
따라서 홀수+홀수=(2k+1)+(2m+1)
=2k+2m+1+1
=2(k+m+1)
따라서 홀수+홀수=짝수 명제는 참이다.

☞ 위의 답 가운데에서 하나를 택한다면 어떤 것이 당신의 답과 가장 가까울 것 같은가?
나는 ＿＿＿＿＿의 답을 택할 것이다.
☞ 당신의 초등학교 5,6학년 학생들을 가르치려고 한다면 어떤 방법을 선택할 것인가?
나는 ＿＿＿＿＿의 답을 택할 것이다.

선생님으로서 초등학교 5,6학년 학생들에게 점수를 준다면 몇 점을 줄 것인지 아래의 표에서 5점부터 1점까지에 표시하세요.

	가장 못함	못함	보통	잘함	아주 잘함
민희의 답	1	2	3	4	5
진수의 답	1	2	3	4	5
훈이의 답	1	2	3	4	5
상진의 답	1	2	3	4	5
영미의 답	1	2	3	4	5

[그림 Ⅲ-1]

<표 Ⅲ-1>

문항	교사분류	민희	진수	훈이	상진	영미	무응답
Ⅱ-1-(1)	비관련 교사	19.4	0	16.7	8.33	55.6	0
	수학 관련 교사	5.41	0	10.8	11	64.9	8.11
Ⅱ-1-(2)	비관련 교사	27.8	0	19.4	52.8	0	0
	수학 관련 교사	24.3	0	29.7	32	2.7	10.8

다음으로, 교사로서 초등학교 5, 6학년 학생들에게 점수를 준다면 몇 점을 줄 것인지를 1점부터 5점까지 주도록 하였다. 비관련 교사들은 영미(4.5점)→ 상진(4.3점)→ 훈이(4.1점) → 민희(3.5점) → 진수(3.2점), 수학 관련 교사들은 영미(4.5점) →훈이(4점)→ 상진 (3.9점) → 민희 (3.1점) → 진수(2.9점)로 각각의 학생의 정당화에 점수를 주었다. 대체로 비관련 교사들이 수학 관련 교사들보다 학생들의 수학적 정당화에 더 높은 점수를 주고 있다. 비관련 교사와 수학 관련 교사 모두는 학생들이 영미와 같은 형식적 수학적 정당화를 했을 경우에 가장 높은 점수를 주었고, 그 다음으로 비관련 교사는 포괄적인 예를 사용한 상진의 답에, 수학 관련 교사는 서술적이기는 하지만 형식적인 수학적 정당화의 방법을 사용한 훈이의 답에 높은 점수를 주었다. 교사 자신의 수학적 정당화에서 진수의 극단적인 예에 의한 방법을 사용하지 않았던 것과 같은 경향인지, 학생들의 답에서도 극단적인 예를 사용한 경우에 보다 낮은 점수를 주는 것을 알 수 있었다. 한편, 다른 학생에 비해 영미의 응답에 낮은 점수를 준 두 교사를 면담한 결과 "아무래도 선수학습의 영향이지 자기 자신이 이해하고 해결했다고 보기 힘들다"고 해서 4점을 주었다고 했다(<표 III-2>).

문항 II-2는 "두 연속된 자연수의 제곱수를 더할 때 답은 항상 홀수이다."라는 명제를 (1) 교사 자신이 직접 정당화하고, (2) 학생들에게 가르칠 경우는 어떻게 하겠는가에 대해 물었다.

문항 II-1에서와 마찬가지로, 비관련 교사와 수학 관련 교사 모두 자신이 직접 정당화할 때는 형식적인 방법을 가장 많이 선호하고 있다 (비관련 교사 63.9%, 수학 관련 교사 86.5%). 그 다음으로 비관련 교사들은 여러 가지 예를 사용하여 정당화하고 있으며(16.7%), 그 외의 방법을 사용하는 교사는 아주 적었다. 특히 수학 관련 교사는 거의 대부분 연역적 수학적 정당화의 방법을 사용하였다.

반면에, 학생들에게 가르칠 때(문항 II-2-2)는 비관련 교사와 수학 관련 교사 각각 47.2%, 37.8%로 모두 여러 가지 예를 사용하여 귀납적으로 정당화를 시도하는 것으로 나타났다. 그 다음으로는 형식적 정당화를 사용하고, 소수이기는 하지만 구체물이나 그림, 또는 포괄적인 예를 사용하기도 한다. 교사를 면담했을 때, "학생들은 여러 가지 예를 들어 주어야 잘 이해할 것 같다."라고 응답하는 교사가 많았다.

이러한 결과들은 문항 II-1에서의 결과와 일관성이 있다. 즉, 교사 자신이 수학적 정당화를 할 때는 형식적 정당화를 선호하지만, 학생들을 대상으로 수학적 정당화를 할 때는 경험적·귀납적 정당화를 선호하고 있음을 알 수 있다(<표 III-3>).

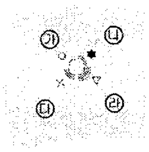
<표 III-2>

답지	교사분류	1점	2점	3점	4점	5점	무응답	총득점	평균
민희	비관련 교사	2.78	8.33	36.1	44.4	8.33	0	125	**3.5**
	수학 관련 교사	8.11	10.8	43.2	22	13.5	2.7	116	**3.1**
진수	비관련 교사	2.78	22.2	38.9	22.2	13.9	0	116	**3.2**
	수학 관련 교사	0	37.8	37.8	8.1	13.5	2.7	107	**2.9**
훈이	비관련 교사	0	0	11.1	50	36.1	2.78	149	**4.1**
	수학 관련 교사	0	2.7	16.2	35	40.5	5.41	147	**4.0**
상진	비관련 교사	0	0	13.9	38.9	47.2	0	156	**4.3**
	수학 관련 교사	0	2.7	21.6	43	29.7	2.7	145	**3.9**
영미	비관련 교사	0	2.78	8.33	22.2	66.7	0	163	**4.5**
	수학 관련 교사	2.7	0	2.7	16	75.7	2.7	168	**4.5**

<표 Ⅲ-3>

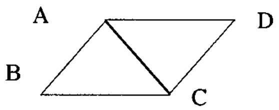
문항	교사분류	구체물이나 그림	여러 가지 예	극단적인 예	포괄적인 예	형식적 정당화	무응답
Ⅱ-2-(1)	비관련 교사	8.3	16.7	2.8	0	63.9	8.3
	수학 관련 교사	0	0	0	2.7	86.5	10.8
Ⅱ-2-(2)	비관련 교사	11.1	47.2	2.78	5.6	19.4	13.9
	수학 관련 교사	5.4	37.8	0	11	27	18.9

민재의 답:



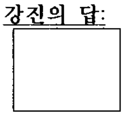
한 개의 사각형을 잘라서 네 각을 네 각을 모두 찢어서 붙여보았다. 360° 임을 확인할 수 있다. 그러므로 사각형의 내각의 합은 360° 이다.

보라의 답:



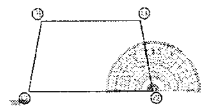
사각형 ABCD에서 점A와 점C를 잇는 대각선을 그리면 삼각형ABC와 삼각형 ACD로 나누어진다. 삼각형의 내각의 합은 180° 라는 걸 이미 알고 있고 교과서에서도 위와 같이 사각형을 삼각형 두개로 나눌 수 있기 때문에 내각의 합이 360도라고 나왔으므로 이 명제는 참이다.

강진의 답:



사각형의 대표적인 예로 정사각형을 생각해 보자 정사각형의 경우 한 각이 직각이 되고 직각은 90° 이다 이러한 직각이 모두 네 개 있으므로 90° ×4=360° 이다.

아름의 답:



여러 가지의 사각형의 내각을 모두 각도기로 재어서 그 각의 크기를 더해본다.

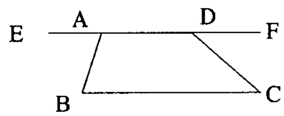
90° +90+90° +90° =360° 이고

60° +120° +60° +120° =360° 이다.

40° +50° +120° +150° =360° 이다.

위와 같은 예에서 보듯 사각형의 내각의 합은 모두 360° 이므로 위의 명제는 참이다.

혁주의 답:



선분BC / / 선분AD라고 하자.

선분AD의 연장선을 긋는다. 그 직선 위에 점E와 점F를 잡는다.

각EAB=각ABC　엇각(평행선의 성질)

각DAB+각ABC=평각=180°

각FDC=각DCB　엇각(평행선의 성질)

각DCB+각ADC=평각=180°

∴각DAB+각ABC+각DCB+각ADC=360°

따라서 명제는 참이다.

☞ 위의 답 가운데에서 하나를 택한다면 어떤 것이 당신의 답과 가장 가까울 것 같은가?
나는 __________의 답을 택할 것이다.

☞ 당신의 초등학교 5,6학년 학생들을 가르치려고 한다면 어떤 방법을 선택할 것인가?
나는 __________의 답을 택할 것이다.

선생님으로써 초등학교 5,6학년 학생들에게 점수를 준다면 몇 점을 줄 것인지 아래의 표에서 5점부터 1점까지에 표시를 하여라.

	가장 못함	못함	보통	잘함	아주 잘함
민재의 답	1	2	3	4	5
아름의 답	1	2	3	4	5
보라의 답	1	2	3	4	5
강진의 답	1	2	3	4	5
혁주의 답	1	2	3	4	5

[그림 Ⅲ-2]

문항 II-3에서는 "사각형의 내각의 크기의 합은 360°이다."라는 기하 명제를 증명한 5명의 학생의 답안지를 문항 II-1과 같은 방식으로 제시하고, 두 가지 질문을 하였다. 여기서 제시된 정당화의 유형은 한 가지 예를 사용한 정당화(민재), 귀납적 정당화(아름), 권위적 정당화(보라), 포괄적인 예를 사용한 정당화(강진), 2단 형식의 정당화(혁주) 등이다([그림 III-2]).

문항 II-3에서 비관련 교사들은 서술형의 권위적인 방법(41.7%)과 2단 형식의 정당화 방법(38.9%)을 사용할 것이라고 했으며, 수학 관련 교사들은 2단 형식의 정당화 방법(43.2%)과 서술형의 권위적인 방법(32.4%)을 사용할 것이라고 대답하였다. 그러나 학생들에게 가르칠 때에는 서술적이면서도 권위적인 보라의 방법(비관련 교사 38.9%, 수학 관련 교사 40.5%)과 구체적 예를 사용하는 민재의 방법(비관련 교사 30.6%, 수학 관련 교사 32.4%)을 선호하고 있다(<표 III-4>).

초등학교 5, 6학년생이 이와 같이 정당화하였을 때 주는 점수에 대해서는, 비관련 교사들은 혁주(4.3점) → 보라 (4.2점) → 아름(3.5점) → 민재(3.4점) → 강진(3.2점), 수학 관련 교사들은 혁주(4.4점) → 보라(4.1점) → 민재(3.4점) → 아름(3.1점) → 강진(2.8점)으로 점수를 주었다. 문항 II-1에서와 마찬가지로 비관련 교사들이 수학 관련 교사들보다 대체적으로 높은 점수를 부여하고 있으며, 기호를 사용한 형식적인 방법에 가장 높은 점수를 주는 것 역시 동일하다(<표 III-5>).

마지막으로, "선분 AB의 수직이등분선 위에 있는 점을 C라고 할 때 삼각형 ABC는 이등변삼각형이다."라는 명제를 증명하는 여러 사례를 다음과 같이 제시하고 평가하게 하였다. 여기서 제시된 정당화의 유형은 한 가지 예를 구체적으로 측정하여 정당화하는 방법(동민), 기호를 사용한 2단 형식의 올바른 증명(유진), 기호를 사용한 2단 형식의 잘못된 증명(수미), 서술형의 형식적 정당화(철이) 등이다([그림 III-3]).

<표 III-4>

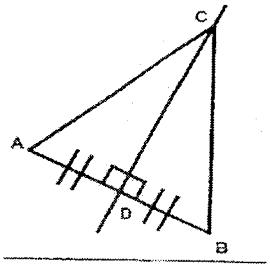
문항	교사분류	민재	아름	보라	강진	혁주	무응답
II-3-(1)	비관련 교사	8.33	2.78	41.7	2.78	38.9	5.56
	수학 관련 교사	8.11	2.7	32.4	0	43.2	13.5
II-3-(2)	비관련 교사	30.6	19.4	38.9	2.78	5.56	2.78
	수학 관련 교사	32.4	5.41	40.5	5.4	5.41	10.8

<표 III-5>

답지	교사분류	1	2	3	4	5	무응답	총득점	평균
민재	비관련 교사	8.33	8.33	27.8	33.3	19.4	2.78	122	**3.4**
	수학 관련 교사	0	10.8	40.5	19	24.3	5.41	126	**3.4**
아름	비관련 교사	2.78	2.78	41.7	30.6	19.4	2.78	127	**3.5**
	수학 관련 교사	0	18.9	51.4	2.7	21.6	5.41	115	**3.1**
보라	비관련 교사	0	0	5.56	55.6	36.1	2.78	151	**4.2**
	수학 관련 교사	0	0	10.8	41	43.2	5.41	152	**4.1**
강진	비관련 교사	8.33	11.1	41.7	27.8	8.33	2.78	111	**3.1**
	수학 관련 교사	10.8	18.9	37.8	14	13.5	5.41	105	**2.8**
혁주	비관련 교사	0	0	11.1	30.6	55.6	2.78	156	**4.3**
	수학 관련 교사	0	5.41	0	19	70.3	5.41	162	**4.4**

<table>
<tr><td>

<u>동민의 답:</u>



점C를 수직 이등분선의 다른 곳으로 이동하고 선분 AC와 선분 BC를 측정했다. 그 길이가 항상 같았으므로 모두 이등변 삼각형이다.

따라서 이 명제는 참이다.

</td><td>

<u>유진의 답:</u>

<u>명제</u>	<u>근거</u>
선분AD=선분BD	이등분선
각ADC=90°	수직선
각BDC=90°	수직선
선분DC=선분DC	동일한 선
△ADC=△BDC	두변과 그 끼인 각이 동일

∴ AC=BC

따라서 이 명제는 참이다.

</td></tr>
<tr><td>

<u>수미의 답:</u>

<u>명제</u>	<u>근거</u>
각ADC=90°	수직선
각BDC=90°	수직선
각CAB=각CBD	이등변 삼각형의 밑각의 크기는 같으므로

AC=BC

따라서 이 명제는 참이다.

</td><td>

<u>철이의 답:</u>

선분 CD는 AB를 직각으로 이등분하고 B는 A의 반사가 된다. 그래서 각각에 대칭이 되는 두 개의 직각이 있다고 생각할 수 있다. 이것은 선분AC와 BC가 길이가 같다는 것을 의미한다.

따라서 이 명제는 참이다.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

☞ 위의 답 가운데에서 하나를 택한다면 어떤 것이 당신의 답과 가장 가까울 것 같은가?

나는 ＿＿＿＿＿의 답을 택할 것이다.

☞ 당신의 초등학교 5,6학년 학생들을 가르치려고 한다면 어떤 방법을 선택할 것인가?

나는 ＿＿＿＿＿의 답을 택할 것이다.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

선생님으로써 초등학교 5,6학년 학생들에게 점수를 준다면 몇 점을 줄 것인지 아래의 표에서 5점부터 1점까지에 표시를 하여라.

	가장 못함	못함	보통	잘함	아주 잘함
동민의 답	1	2	3	4	5
유진의 답	1	2	3	4	5
수미의 답	1	2	3	4	5
철이의 답	1	2	3	4	5

</td></tr>
</table>

[그림 Ⅲ-3]

교사 자신의 수학적 정당화의 방법과 가장 유사하다고 생각되는 것은 무엇인가에 대한 질문에 대해 비관련 교사 58.3%, 수학 관련 교사 67.6%가 올바른 2단 형식의 형식적 정당화(유진)를 선택하였다. 다음으로 비관련 교사는 동민이의 구체적 측정 방법에 의한 수학적 정당화를 19.4%가 선택하였고, 수미의 잘못된 2단 형식의 형식적 정당화도 비관련 교사 16.7%, 수학 관련 교사 10.8%가 선택하였다. 이는 아마도 정당화의 내용보다는 그 형식만 보았을 것이라고 생각된다(<표 Ⅲ-6>).

학생들에게 몇 점을 주겠는가에 대한 질문에 대해, 비관련 교사는 유진(4.3점) → 동민(3.5점) → 철이(3.4점) →수미(3.3점), 그리고 수학 관련

교사는 유진(4.3점) → 수미, 철이(3.4점) → 동민(3점)이었다. 마찬가지로 수미의 잘못된 수학적 정당화에도 불구하고 그 형식에 의해 3.3점, 3.4점의 점수를 부여했고 이러한 현상은 수학 관련 교사에게서 더 강하게 나타났다.

수미의 수학적 정당화에 대해 1점을 준 교사는, "결론에 나와 있는 것을 증명할 때 사용했기 때문에 잘못된 증명이고 잘못된 증명이지만 ∠ADC와 ∠BDE가 90°라는 것을 썼기 때문에 1점을 주었다."라고 답했다. 반면에 수미의 답에 대해 5점을 준 교사는 면담할 때 "이거 맞은 거 아니에요?"라고 반문하였다. 유진의 수학적 정당화에 대한 반응으로는 4점과 5점을 준 교사들을 면담한 결과 교사들은 "틀린 곳이 없고 깔끔한 증명이다"라고 답했다(<표 Ⅲ-7>).

이상의 분석에서 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째, 교사들은 자신이 수학적 정당화를 할 때, 대수 영역에서는 수식을 사용한 형식적 정당화를 선호하고 기하 영역에서는 근거를 제시한 2단 형식의 형식적 정당화를 선호한다. 이런 결과는 Leddy(2001)의 토론토와 Healy & Holyes(1998)의 런던에서 행한 연구 결과와 아주 유사하다. 이 이단 형식의 형식적 정당화를 선호하는 경향은 Part II의 4번 문항에서 수미의 수학적 정당화가 잘못되었음에도 불구하고 그 형식으로 인해 잘못된 것을 인식하지 못한 채 선택하거나 점수를 주는 데서 분명해진다. 둘째, 비관련 교사보다는 수학 관련 교사가 자신이나 학생들에 대해 형식적인 정당화를 선호한다. 형식적인 정당화 다음으로는 구체적 예를 사용한 수학적 정당화를 선호하였으나 대부분의 경우 극단적인 예를 사용하는 수학적 정당화나 포괄적인 예를 이용한 수학적 정당화는 선택하지 않았다. 이에 대한 교사 면담에서 "제시되는 예가 적어서 그것으로 명제가 참이라는 것을 설득하거나 확신시키기가 어려운 것으로 생각하는 것 같다."라고 응답하였다. 셋째, 수학 관련 교사보다 비관련 교사가 학생들의 정당화에 대해 좀 더 높은 점수를 부여하고 있다. 넷째, 교사는 자기 자신이 수학적 정당화를 할 때는 형식적 정당화를 가장 선호하였지만,

<표 Ⅲ-6>

문항	교사분류	동민	유진	수미	철이	무응답
II-4-(1)	비관련 교사	19.4	58.3	16.7	2.78	2.78
	수학 관련 교사	5.41	67.6	10.8	8.1	8.1
II-4-(2)	비관련 교사	41.7	33.3	13.9	8.33	5.56
	수학 관련 교사	32.4	37.8	10.8	11	8.1

<표 Ⅲ-7>

답지	교사분류	1	2	3	4	5	무응답	총득점	평균
동민	비관련 교사	2.78	11.1	27.8	38.9	16.7	2.78	125	3.5
	수학 관련 교사	8.11	21.6	35.1	22	10.8	2.7	110	3
유진	비관련 교사	2.78	0	0	41.7	52.8	2.78	156	4.3
	수학 관련 교사	0	0	8.11	38	51.4	2.7	160	4.3
수미	비관련 교사	5.56	19.4	19.4	36.1	16.7	2.78	119	3.3
	수학 관련 교사	5.41	18.9	10.8	43	18.9	2.7	127	3.4
철이	비관련 교사	5.56	11.1	25	36.1	19.4	2.78	124	3.4
	수학 관련 교사	0	10.8	37.8	35	13.5	2.7	127	3.4

초등학교 5, 6학년 학생들에게 주어진 명제에 대해 수학적 정당화를 시키고자 할 경우에는 여러 가지 예를 사용한 귀납적인 정당화를 가장 선호하였다. 그러나 학생들의 정당화에 대해서 대부분의 교사들은 형식적인 수학적 정당화에 더 높은 점수를 부여한다. 한편, 교사 자신의 수학적 정당화에서 잘 나타나지 않았던 극단적 예에 의한 수학적 정당화에는 가장 낮은 점수를 주었다.

Ⅳ. 결론 및 제언

Hatzikiriakou & metakkidou(2007)은 초등학교에서도 형식적 논리를 가르쳐야 하는 이유를 다음과 같이 세 가지로 설명하고 있다. 첫째, 학생들의 논리적이고 수학적인 사고는 세계적으로 학교 교육과정에서 중요한 목표가 되고 있다. 둘째, 정보의 혁명에 의해 기술적인 요구가 증가하면서 기본적인 논리적 원리와 추론을 이해하는 것이 보다 중요해지고 있다. 셋째, 형식적인 논리는 학생들을 정확하게 생각할 수 있도록 하는 도구이다. 그러나 우리나라나 다른 나라의 연구 결과들에서 볼 수 있듯이, 학생들은 증명에 대해 그다지 자신감을 가지고 있지 않다. 연구자는 이러한 이유가 증명에 대한 교사의 태도에서 비롯된 것이 아닐까라는 생각을 했다. 학습에서 가장 중요한 환경은 바로 교사라고 생각할 때 이러한 교사들의 수학적 정당화에 대한 상황을 파악하는 것은 무엇보다 중요하다고 생각된다. 따라서 본 논문에서는 교사들의 정당화에 대한 인식을 조사하였다.

본 연구의 설문에 73명의 초등학교 현직 교사가 참여하였으며 이들 교사들의 대학에서의 심화과정(부전공)을 기준으로 하여 수학교육과, 과학교육과, 컴퓨터교육과는 수학과 관련성이 깊은 교과로 하여 '수학 관련 교사'로 분류하였고, 그 외의 과는 '비관련 교사'로 분류하여 설문 결과를 분석하였다. 본 설문지는 Part I과 Part II로 구분하고 Part I은 교사들의 수학적 정당화에 관한 생각을 묻는 것으로 질문에 대해 자신의 생각을 주어진 답지에서 선택하도록 하는 선택형이었다. Part II는 여러 가지 수학적 정당화의 예시를 제시하고 교사 자신이 선호하는 수학적 정당화의 방법과 학생을 가르치기 위해 선호하는 방법을 선택하고 각각의 수학적 정당화에 대해 점수를 부여한다면 몇 점을 줄 것인지 1점-5점을 부여하도록 하였다.

본 설문에 참여한 교사들 대부분이 1년-10년 차의 경력을 가진 교사들로, 비관련 교사 중 86.1%, 수학 관련 교사 중 89.2%이었다. 이는 경력이 많은 교사, 즉 학교를 졸업한지 오래된 교사일수록 수학적인 설문에 응하는 것을 거부하는 경향이 있었음을 의미한다. 특히 학교에서 저학년을 담당하는 교사들은 수학적 정당화에 대한 설문에 응하는 것을 거부하였다.

설문 조사 결과 두 집단 사이에 특별히 큰 차이점은 없는 것으로 나타났으며, 다음과 같은 사실을 발견할 수 있었다.

첫째, 대부분의 초등학교 교사들은 초등학교에서도 수학적 정당화가 필요하며, 수학적 정당화는 학생들의 논리적 사고와 수학적 지식의 이해에 도움이 된다고 생각하고 있다. 둘째, 초등학교 교사들은 어떤 정리가 참인지를 알아보기 위해서는 형식적 증명이나 많은 예를 통한 귀납적 정당화가 필요하다고 생각하고 있으며, 교사 자신들은 형식적 증명을 선호하고 학생들의 정당화에 대해서도 형식적 정당화에 더 높은 점수를 부여하고 있다. 셋째, 교사의 선호도와 달리 학생들을 지도할 때는 형식적 정당화보다는 귀납적 정당화를 선호하고 있으며 권위

적 정당화는 사용하지 않았다. 넷째, 학생들의 정당화에 대하여 비관련 교사들이 수학 관련 교사들보다 더 높은 점수를 부여하고 있다.

이러한 사실에서 볼 때, 다음과 같은 결론을 내릴 수 있다. 첫째, 우리나라 초등학교 교사들은 비교적 수학적 정당화에 대해 대체로 이해하고 있다. 수학적 정당화는 필요하며 이는 논리적 사고를 기르거나 수학적 지식을 이해시키는 데에 좋은 방법이라는 것에 대해 잘 인식하고 있으며, 권위적 정당화를 선호하지 않고, 형식적 정당화, 귀납적 정당화를 더 가치 있게 여기고 있다. 둘째, 우리나라 초등학교 교사들은 자기 자신이 증명을 할 경우에는 형식적인 수학적 정당화를 선호하나, 학생들을 가르칠 경우 학생들의 이해를 위해 형식적 증명보다는 귀납적 정당화나 그림과 같은 단서를 이용하는 것이 더 효과적이라고 생각하고 있었다.

물론 본 연구의 결과를 일반화하는 데에는 어려움이 있다. 73명이라는 소수의 교사를 대상으로 이루어졌으며 경력이 1년차-10년차의 교사들이 대부분이었다는 점에서 특별한 상황이라고도 할 수 있다. 특히, 몇 가지 보기 중에서 한두 개를 선택하거나 간단하게 몇 줄 글을 쓰던 다른 설문지와 달리, 본 설문지는 직접 증명을 하거나 점수화하는 등의 부담감 때문에 수학을 싫어하는 교사들은 설문에 참여하기를 거부했다는 점에서, 이 설문 조사의 결과는 수학적 정당화에서 보다 긍정적인 쪽으로 기울어져 있다고 볼 수 있을 것이다. 또한, 이 연구는 초등학교 교사들의 수학적 정당화의 능력을 조사한 것은 아니며 단지 수학적 정당화에 대한 인식의 조사일 뿐이다. 그러므로 수학적 정당화의 가치를 잘 인식하고 정당화의 방법을 잘 이해하고 있다고 해서 그들의 수학적 정당화 능력이 높다고 판단해서는 안 될 것이다.

참고문헌

강문봉(1996). 초등학교에서의 수학적 추론의 지도에 관하여(1). **수학교육학연구, 6**(2), 71-85.

교육인적자원부(1999). **중학교 교육과정 해설.** 교육인적 자원부

권성룡(2003). 초등학생의 수학적 정당화에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 C <초등수학교육>, 7**(2), 85-99.

김민주(2006). **탐구지향학습에서 나타나는 학생들의 논증과 수학적 정당화.** 서울대학교 대학원 석사학위 논문.

김성대(2003). **증명지도에서 정당화의 의미와 사례 연구.** 한국교원대학교 대학원 석사학위 논문.

류성림(1998). 수학교육에서 증명의 의의에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학 교육>, 37**(1), 73-85.

류희찬 · 조완용(1999). 학생들의 정당화 유형과 탐구형 소프트웨어의 활용에 관한 연구. **수학교육학연구, 9**(1), 245-261.

송상헌 · 허지연 · 임재훈(2006), 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. **수학교육학연구, 16**(1), 79-94.

이경화 · 최남광 · 송상헌(2007). 수학영재들의 아르키메데스 다면체 탐구과정(정당화 과정과 표현과정 중심으로). **학교수학, 9**(4), 487-506.

Balacheff. N. (1987). Procesus de preve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18, 147-176.

Blum, W. & Kirsch, A. (1991). Preformal Proving: Example and reflection. *Educational Studies in Mathematics,* 7, 183-203.

Ellis. A. B.(2007). Connections between generalizing and justification : Students' reasoning with linear relationship, *Journal for Research in Mathematics Education,* 38(3), 194-229.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Types of students' justification. *Mathematics Teacher*, 91, 670-675.

Harel, G. & Sowder, L.(2007), Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof, In F. Lester(Ed.), *Scond Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* National Council of Teachers of Mathematics.

Healy, L. & Hoyles, C.(1998). *Justification and Proving in School Mathematics.* Institute of Education of University of London.

King, I. L.(1970). *A formative development of a unit on proof for use in the elementary school.* Technical report no. 111, Wisconsin Research and Development Center for Cognitive Learning.

King, I. K.(1973). A Formative Development of an Elementary School Unit on Proof. Journal for Research in Mathematics Education, 4(1), 57-63.

Krulik, S. & Rudnick, J. A.(1993). *Reasoning and problem solving; Handbook for elementary school teachers.* Allyn and Bacon. Massashusetts.

Leddy, J. F. J.(2001), *Justifying and Proving in Secondary School Mathematic.*, Doctor of Philosophy Department of Curriculum, Teaching and Learning, University of Toronto.

Lester, F. K. (1975). Developmental Aspects of Children's Ability to Understand Mathematical Proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 6(1), 14-25.

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof Frames of Preservice Elementary Teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20, 41-51.

NCTM(1989). *Curriculum standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM(2000). *Priciples and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Reid, D, A. (1995). *The need to prove.* Department Secondary Education Edmonton, Aberta.

Reid, D, A.(2000). *The Psychology of Student's Reasoning in School Mathematics: Grade2 Research Report.* Acadia University Wolfville, Nova scotia,Canada.

Russell, S. J. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. ed. L.V. Stiff & F. R. Curcio, *Developing mathematical reasoning, K-12.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 22-36 .

Samandeni, Z. (1984). Action proof in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics*, 4(1), 32-34.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs?. *The Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.

Showder, L., & Harel, G. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.

Simon, M. A & Blume, G. W(1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 3-31.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.

Tall, D. (1991). *Advanced Mathematic thinking*. Kluwer Academic Publisher(류희찬 외, (2007), 고등 수학적 사고, 경문사)

A Study on Mathematical Justification of Elementary School Teachers

Kim, Jeong Ha (Incheon Ilshin elememtary school)
Kang, Moon Bong (Gyeongin National University of Education)

A lot of researches state mathematical justification is important. Specially, NCTM (2000) mentions that mathematical reasoning and proof should be taught every student from pre-primary school to 12 grades. Some of researches say elementary school students are also able to prove and justify their own solution(Lester, 1975; King, 1970, 1973; Reid, 2002). Balacheff(1987), Tall(1995), Harel & Sowder(1998, 2007), Simon & Blume(1996) categorize the level or the types of mathematical justification. We re-categorize the 4 types of mathematical justification basis on their studies; external conviction justification, empirical-inductive justification, generic justification, deductive justification. External conviction justification consists of authoritarian justification, ritual justification, non-referential symbolic justification. empirical-inductive justification consists of naive examples justification and crucial example justification. Generic justification consists of generic example and visual example.

The results of this research are following. First, elementary school teachers in Korea respectively understand mathematical justification well. Second, elementary school teachers in Korea prefer deductive justification when they justify by themselves, while they prefer empirical-inductive justification when they teach students.

* **Key Words** : mathematical justification(수학적 정당화), external conviction justification(외적확신 정당화), empirical-inductive justification(경험적・귀납적 정당화), deductive justification(형식적 정당화)

논문접수: 2009. 5. 30.
논문수정: 2009. 8. 18.
심사완료: 2009. 8. 25.