대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 19 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 19, No. 3, 355-369. Aug 2009

수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할

이 경 화*

수학자들은 종종 유추적 사고에 의해 수학적 지식을 구성한다. 유추적 사고는 서로 다른 대상 사이의 유사성을 찾아 연결함으로써, 고립된 것처럼 보였던 대상 사이의 관계성을 확보할 수 있게 한다. 수학적 개념, 절차, 원리, 법칙 등은 관계성의 확보에 의해 낱낱의 지식에서 이론으로 발전한다. 이와 같이 유추적 사고는 수학의 주요한 도구로 활용되고 있으므로, 수학교육에서도 유추적 사고를 활용하는 방안에 대한 연구가 필요하다. 이를 위해서는 수학자들의 유추적 사고 활용의 주요 양상이나 세부 과정, 특징에 대한 연구가 필요하다. 이 연구에서는 수학자들이 유추적 사고를 어떤 맥락에서 어떻게 활용했는지 파악함으로써, 유추적 사고 모델을 개발한다. 이를 토대로 교육적 시사점과 후속연구 주제를 도출한다.

Ⅰ. 서 론

수학적 사고에 대해 언급한 수학자들은 수학적 사고 중에서 유추가 매우 유용한 도구라는 것을 강조한다. 예를 들어, Atiyah는 수학이 유추의 과학이며, 감추어진 심오한 유추를 발견하기 위한 엄청난 노력에 의해 수학이 다양한 분야에 적용될 수 있었다고 주장한다(Atiyah, 1976: Corfield, 2003, p. 82에서 재인용). 다시 말하여, 유추에 의해 낱낱의 지식이 서로 연결되면 수학이 이론적으로 체계화되며, 이것이 다른 분야에 적용된다는 것이다. 불행히도 유추는 종종 감추어져있어서 수학자들의 통찰에 의해 발견되기 전에는 고립된 개념들의 집합만 존재할 뿐이다. 수학을 학습하는 과정에서도 지식과 지식 사이의 연결은 매우 중요하기 때문에, 유추적 사고의 교육적 가치는 매우 크다.

Poincarè는 과학자들이 실험을 통해 과학적 법칙을 발견하듯이, 수학자들은 유추를 통해 수학적 법칙을 발견한다고 설명한다. 이미 오랫동안 알려진 지식이면서도 서로 다른 것처럼, 서로 관련이 없는 것처럼 다루어지다가 유추에 의해 적절히 연결됨으로써 분명한 관계가 드러나고 그것이 곧 수학적인 발견으로 연결된다는 의미이다. 그러므로 수학적인 발견은 연결해야 할 대상을 선택함으로써 이루어지지만, 단지 주어진 표본 중에서 골라내는 것이 아니다. 그는 이를 무의미한 조합은 가치로운 발견으로 이어지지 않기 때문이라고 주장한다(Poincaré, 1982: 51-52). 과학에서의 실험은 구체적인 상황, 예를 들어, 온도, 약품, 절차, 등에 대한 특별한 조건을 만족하는 가운데 이루어지므로, 그 결과를 토대로 일반적인 법칙을 이끌어내는 것은 깊은 통찰이 없이는 불가능하다. 실험과 법칙 사이에는 큰 간격이 존재하며, 종종 그

* 서울대학교 khmath@snu.ac.kr

간격은 메워지지 않는다. 마찬가지로 수학에서의 유추적 사고 역시 제한된 조건에서 우연하고 과감한 추측으로 연결되며, 종종 수학적 법칙과는 무관한 방향으로 전개된다. 그럼에도 불구하고 유추적 사고는 위험하고 대담한 추측과 비약을 가능하게 한다는 바로 그 점 때문에 놀라운 수학적 발견을 가능하게 하며, 엄격한 정당화를 거쳐 수학적 법칙에 도달하게 한다. 실험이 과학자의 도구인 것과 마찬가지로 유추는 수학자들이 미지의 세계를 탐험하는 도구이다. 수학을 학습하는 과정에서도 탐구와 도전을 강조한다면, 유추적 사고의 함양은 필수적인 조건이라고 할 수 있다.

Polya는 특수화와 일반화를 반복하면서 수학이 발전하고, 그 과정에서 특수한 예들 사이의 유추가 개연적 추론에 의한 수학적 발견의 유용한 도구라고 설명한다(Polya, 1954). 또, 관찰과 추측은 수학을 학습하는 중요한 과정이며, 비슷한 문제를 풀어본 기억이 있는지 생각해보는 것, 다른 문제를 해결할 때 사용한 개념이나 절차 중 유사한 구조와 성격을 가지고 있는 것을 떠올려보는 것, 등 구체적으로 유추에 의해 수학을 학습하는 것이 중요하다고 강조한다 (Polya, 1962).

국내외의 교육과정 문서에서 수학적 사고 교육은 학교수학의 중요한 목표 중 하나로 강조되어 왔다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007; NCTM, 1989, 2000). 그러나 교육과정 관련 문서에서 수학적 사고 교육을 논의할 때, 유추적 사고가 명시적으로 다루어지는 경우는 거의 없다. English(1997, 2004)는 수학적 사고 중 유추가 교육적으로 매우 큰 잠재성을 가진 사고 방법임에도 불구하고 학교수학에서 충분히 다루어지지 않았다고 주장한다. 국내에서 유추의 수학교육적 활용가능성에 주목한 연구가 일부 있으나(이승우, 우정호, 2002; 정승윤, 2006; 이종희, 김선희, 2002; 이경화, 2009), 아직은 유추적 사고를 활용한 수학교육에 대한 연구가 매우 부족한 상황이다. 이 연구는 수학적 지식의 구성에서 유추적 사고의 역할을 탐색하는 것에 목표를 둔다. 먼저 수학의 역사에서 수학자들이 어떤 맥락에서, 어떤 의도로, 어떤 방식으로 유추적 사고를 활용하였는지 알아볼 것이다. 다음으로 수학의 역사에 나타난 유추적 사고 사례를 분석하여 교육적 시사점을 도출하고자 한다.

II. 수학사에서의 유추적 사고 사례

수학의 발달과정에서 많은 수학자들의 주목을 끌었던 논점과 발견과정을 살펴보면, 유추적 사고의 흔적을 확인할 수 있다. 이를 위해 그 동안 선행연구에서 제시된 유추적 사고의 의미를 살펴보면 다음과 같다. 먼저 고전적 유추는 'A:B::C:?'를 만족하는 D를 찾는다는 의미이며, 구조 사상 능력 또는 토대가 되는 지식의 인식과 활용 또는 특수한 사례에 기반한 추론에 의해 이것이 가능하다(Alexander et. al., 1997; Sternberg, 1977; Gentner, 1989; Goswami, 1989). Peirce는 개별자와 개별자를 귀납과 가설, 귀납과 연역, 연역과 가설에 의해 연결하는 것으로 유추적 사고의 과정을 설명하였다 (Hoopes, 2008에서 재인용). 개념적 관계에 의한 연결이라는 Piaget(1952)의 의미나 의도적인 유사성을 발견하고 명확한 개념에 의해 연결한다는 Polya(1954)의 의미에서 유추적 사고 과정을 이해할 수도 있다. Erdiniev와 한인기(2005)의 설명에 따라 공통의 속성을 확인한 후 한 대상에서 성립하는 성질이 다른 대상에서도 성립할 것이라고 생각하는 추론으로 볼 수도 있다. 두

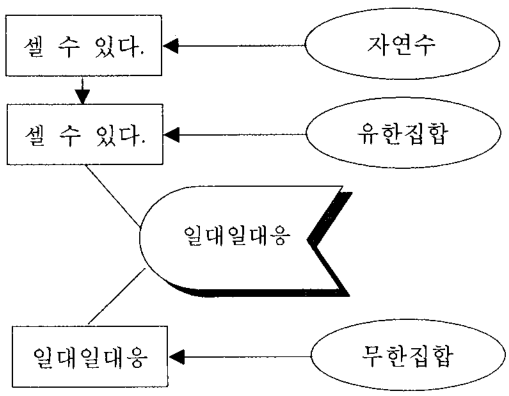
대상의 바탕에 있는 공통의 개념에 기초하여 연결을 시도하는 추론이라는 English(2004)의 설명도 참고할 수 있다. 이 글에서는 집합론, 무한급수의 합, 음수의 이해, 복소수의 이해 관련 수학사 자료에서 각각 유추적 사고의 흔적을 확인하는 데 목표를 두기 때문에, 단일한 유추적 사고의 의미를 채택하기보다는 다양한 의미를 모두 참고하여 수학자들의 사고 과정을 이해하고자 한다. 특히 수학자들이 유추적 사고를 어떤 맥락에서, 어떤 방식으로 활용하였는지 알아본다.

1. 집합론에서의 유추적 사고

Rota는 수학에서의 발전이 무한으로부터 유한으로의 발전이라고 설명한다(Rota, 1997). 이는 수학자들이 유추에 의해 새로운 추측을 하고, 새로운 표현 도구를 개발하고, 새로운 이론을 구축하면서 이해하기 어려웠던 무한한 세계를 이해 가능한 유한한 세계와의 유사성에 비추어 이해할 수 있었다는 의미이다. Cantor가 집합론의 주요 개념을 발견하고 정의하여 체계화한 과정에서도 유추는 유용한 도구로 활용되었으며, 이에 의해 무한에 대한 구체적이고 수학적인 이해와 해석이 가능해졌다.

Cantor는 집합에 대한 일반적인 개념을 '대상들이 주어진 모임에 속하는 것을 정확히 구분해주는 어떤 규칙에 의해서 정의된 대상들의 모임'으로 규정하였다. 그가 제시한 예는 '교실 안에 있는 의자들의 집합', '이 대학의 모든 학생들의 집합', '문자 a, b, c, d의 집합', '우리 기숙사의 규칙의 집합', '제곱해서 2가 되는 유리수의 집합', '모든 자연수들의 집합', '0과 1 사이의 모든 실수들의 집합'이었다(Lin & Lin, 1974: 28).

Cantor는 유한집합은 유한개의 원소로만 이루어진 집합으로, 무한집합은 유한집합이 아닌 집합으로 정의하였다. 두 집합의 상등은 동일한 원소들로 이루어진 집합으로, 두 집합의 비교는 대등(equipotent) 개념을 이용하여 설명하였다. 두 집합 A와 B에서 A의 원소를 B의 원소 꼭 하나에 대응시키고, B의 원소에 A의 원소를 꼭 하나 대응시키는 방법으로 각 원소끼리 쌍을 만드는 대응관계를 일대일대응이라고 하고, 이 때 A와 B는 대등하다고 한다. 두 유한집합이 같은 개수의 원소를 가질 필요충분조건은 두 집합의 원소가 일대일대응을 이루어야 하므로, 유한집합 사이의 대등관계는 세어서 얻은 수, 곧 기수의 상등과 같은 의미를 가진다. 기수의 상등은 세려는 대상과 수집합인 {1, 2, 3, ⋯} 사이의 일대일대응을 만들어 확인 가능하므로, 센다는 것이 어떤 의미인가에 의존한다. 결국 Cantor는 자연수에 대해 가지고 있는 직관에 의존하여 기수의 상등과 유한집합의 대등관계 사이의 유추, 유한집합의 대등관계와 무한집합의 대등관계 사이의 유추를 완성한 것이다([그림 Ⅱ-1] 참조). 이는 무한집합의 산술체계를 완성하는 데 결정적인 역할을 하였다 (Courant & Robbins, 2002: 101).



[그림 Ⅱ-1] 무한집합의 비교 도구 개발 과정에서의 유추

일대일대응은 유한집합과 무한집합의 비교

도구이면서 동시에 유한집합과 무한집합을 구분하는 도구가 된다. 유한집합이 아닌 집합으로서 무한집합을 정의하는 것이 아니라, 무한집합 자체를 정의하는 데 활용되기 때문이다. Cantor 이전에 이미 Bolzano가 유한집합을 이용하지 않고 일대일대응을 이용하여 무한집합을 정의하였으나, 정치적인 문제로 출판하지 못하였다. 이어서 Dedekind가 일대일대응을 이용하여 무한집합을 정의하였고, 이 때문에 '자신의 진부분집합과 일대일대응이 되는 집합'이라는 무한집합의 정의는 Dedekind-무한집합이라고 불린다. 이 정의에 의해, 무한집합을 둘러싼 다양한 수학적 논의가 가능해졌고, 유한집합에 대해 성립했던 많은 성질을 무한의 맥락에서 재해석할 수 있었다. 이러한 관점의 유용성 덕분에 집합론은 다른 영역에 널리 활용되었다 (Herrlich, 2006).

한편, 많은 수학자들은 상당기간 동안 원소의 개수가 유한인 것을 유한집합으로, 유한집합이 아닌 집합을 무한집합으로 보는 관점과, Dedekind-무한집합에서 출발한 관점이 동일한 이론을 이룬다고 가정하였다. 그러나 Dedekind-무한집합에 기초한 접근은 많은 문제를 발생시켰다. 결국 수학자들은 선택공리를 받아들인 후 유한집합을 정의하고, 무한집합으로 나아가는 방식으로 집합론을 재정비하게 되었다. 집합론을 전개함에 있어 자연수에 대한 직관은 유용한 유추적 사고의 원천이 되었다. 이는 대등관계를 이용한 무한집합의 정의를 가능하게 하였고, 집합론의 발전에 핵심적인 역할을 하였다. 그러나 많은 역설과 오류에 부딪혔으며, 이를 극복하기 위해 새로이 공리체계를 구축한 후, 다양한 분야를 점검하고 다시 구축하게 하는 중요한 도구가 되었다. 유추적 사고에 의한 과감한 도전이 없었다면 무한은 여전히 수학적으로 조작 가능한 개념으로 길들여지지 않았을 것이다.

2. 무한급수의 합 문제해결 과정에서의 유추

Polya는 Euler의 예를 이용하여 유추에 의한 문제해결 과정을 설명한다(Polya, 1954: 17-19) 해결하고자 했던 문제는 다음 무한급수의 합을 구하는 것이었다:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\cdots$$

Euler는 n개의 항을 가지는 다항식이 다음과 같이 표현된다는 것에 주목하였다.

$$\begin{aligned} & a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \\ &= a_0\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha_n}\right)\end{aligned}$$

(α_i는 다항식의 근, $\alpha_i \neq 0$)

(여기서 $a_1=a_0\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\frac{1}{\alpha_n}\right)$)

이를 변형하면,

$\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2, \cdots\beta_n, -\beta_n$을 근으로 하는 방정식을 다음과 같이 생각해볼 수 있다.

$$\begin{aligned} & b_0-b_1x^2+b_2x^4+\cdots+(-1)^n b_n x^{2n} \\ &= b_0\left(1-\frac{x^2}{\beta_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\beta_2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\beta_n^2}\right)\end{aligned}$$

(여기서 $b_1=b_0\left(\frac{1}{\beta_1^2}+\frac{1}{\beta_2^2}+\cdots\frac{1}{\beta_n^2}\right)$)

Euler는 $\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\cdots=0$이며, 이 근이 $0, \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi\cdots$이 될 것이고, 앞서 확인한 근과 계수와의 관계를 활용하면 문제가 해결될 것이라고 추측하였다. 여기서 대담한 유추가 활용되었다. 유한개의 항으로 표현되는 다항방정식의 근에 대해 성립하는 성질을 무한개의 항을 가지는 삼각방정식에 확장하여 적용하였기 때문이다. Euler는 이 추측에 기초하여 문제를 해결하였다. 먼저 근 중에서 0을 제외하기 위해 다음과 같이 변형하였다.

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= 1-\frac{x^2}{2\cdot3}+\frac{x^4}{2\cdot3\cdot4\cdot5}-\cdots \\ &= \left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)+\cdots\end{aligned}$$

그러면 근과 계수와의 관계로부터

$\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots$을 얻게 된다.

이제 문제를 다음과 같이 해결할 수 있다:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler는 유한개의 항을 가지는 다항방정식의 근과 계수의 관계가 무한개의 항을 가지는 사인방정식에도 적용된다는 것을 정당화하지 않고 위 문제를 해결하였다. 유추적 사고는 종종 이와 같은 비약을 시도하게 한다. Polya(1954)는 이것이 엄밀한 정당화 이전에 개연적 추론에 의해 수학에 대한 통찰을 얻는 과정이라고 본다. Poincaré(1982) 역시 논리적인 비약이 있음에도 불구하고 유추에 의해 이미 알고 있는 수학적 사실들을 서로 연결하여 수학적인 지식을 얻게 된다고 보았다. Euler는 비약에 의해 위의 문제를 해결한지 10년 후에야 수학적으로 그 정당성을 증명하였다고 한다(Fischbein, 1987: 132).

3. 음수와 음수의 연산 체계화 과정에서의 유추

우정호와 최병철(2007)에 의하면, 수학의 역사에서 음수 개념의 체계화의 과정은 인식론적 장애의 발생과 극복의 과정이며, 이는 학습 과정에서도 재연될 가능성이 많다(우정호 & 최병철, 2007: 2-4). 첫 번째 장애는 수를 이산적인 양으로만 인식함으로써, 음수를 이해하기 어려워한다는 것이다. 자연수는 이산적인 양을 세는 완전한 도구였으며, 이 때문에 수개념은 이산적인 양과 밀접하게 관련되는 것으로 생각할 수 있다. 그러나 음수는 이 관점에 부합되지 않는다. 두 번째 장애는 두 수의 곱을 덧셈의 반복으로 인식하는 것에서 비롯된다. 양수와 음수의 곱, 음수와 음수의 곱은 이러한 인식으로부터 설명될 수 없기 때문이다. 세 번째 장애는 비를 동종의 양 사이의 비, 곧 내적인 비로만 인식함으로써, 음수를 이용한 비 표현을 이해하지 못하는 것이다. 네 번째 장애는 음수를 양적인 문맥에서 상대적인 수로 본다는 것, 곧 지불해야 할 금액과 같이 생각함으로써 음수의 본질을 파악하지 못하는 것이다. 다섯 번째는 방정식의 근으로서 음수가 존재하는 것을 보면서도 이를 인정하지 않는 것이다. 여섯 번째는 한 수체계를 형식불역의 원리에 의해 보다 포괄적인 수체계로 확장가능하다는 것이다.

수학사에서 음수에 대한 인식론적 장애는 Descartes가 방정식의 근으로 음수를 다루는 것을 출발점으로 하여, Hankel이 형식적 존재로서의 음수를 체계적으로 이론화하면서 극복되었다(우정호 & 최병철, 2007). 음수의 역사발생에 대한 이러한 분석에서 주목할 만한 점은 인식론적 장애가 발생하는 주된 이유에 유추적 사고가 관련된다는 점이다. 수가 이산적인 양이라고 생각하여 곱셈을 반복된 수의 덧셈으로 보는 장애는 '자연수: 자연수의 반복덧셈으로서의 곱셈::음수:음수의 반복덧셈으로서의 곱셈'이라는 유추가 성립되지 않기 때문에 발생한 것이라고 할 수 있다. 이는 유추적 사고를 하지 않는다면 발생하지 않는 장애이다. 내적인 비만을 인정한 것도 수를 양적인 존재로 인식하고, 양 사이의 관계를 표현하는 방식으로 비를 파악하여 음수에 적용하려고 했기 때문으로 볼 수 있다. 다시 말하여, '양: 양 사이의 대소관계를 나타내는 방법으로서의 비::음수: 양 사이의 대소관계를 나타내는 방법으로서의 비'라는 유추가 성립되지 않기 때문에 발생하는 인식론적 장애라고 볼 수 있다. 마찬가지로 양적인 문맥에서 상대적인 수로만 음수를 파악하는 것에서 비롯되는 장애 역시 양적인 문맥을 음수에 적용하여 유추할 수 없다는 것으로 설명할 수 있다. 방정식의 근으로 음수를 채택하면서도 여

전히 수로 인정하지 않은 것도, 이전까지 수에 양적인 의미를 대응시켜서 파악했던 경험을 음수에 적용하지 못함으로써 발생하는 것이다. Peacock에 의해 도입된 수체계 확장에 대한 형식불역의 원리 또한 대수적 연산법칙을 유지하는 가운데 새로운 수체계로의 확장을 시도하려는 유추적 사고에서 비롯된 것이다.

음수를 형식적인 의미로 파악하기 이전에 진리로 인정된 지식이나 직관, 이에 기초한 유추적 사고는 음수의 실제적인 의미를 파악하는 과정에서 끊임없이 인식론적 장애의 원인이 되었다. 그러나 그 장애를 극복하는 과정에서 다시 유추적 사고가 중요한 역할을 하였다. Peacock이 $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$에서 $a=0$, $c=0$인 경우가 음수와 음수의 곱셈에 해당한다고 설명한 예(Katz, 1998)를 생각해보자. 결국 음수 사이의 연산은 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 만족하는 문자 산술의 규칙을 음수에 확장하여 정의한 것이며, 문자와 음수 사이의 유추를 통해 음수를 체계화한 것이다. De Morgan 역시 특정한 맥락이나 의미와 관련되지 않은 형식적인 정의, 곧 대수적인 성질의 유지에 기초한 유추에 의해 음수와 음수의 연산을 체계화하였다(Arcavi, 1985). 이러한 일련의 노력들은 한편으로는 이산양의 크기와 밀접하게 관련되는 자연수에 대한 직관에 기초한 유추를 거부하면서, 다른 한편으로는 대수적 규칙과 구조에 대한 수학적 발견의 결과를 적용하려는 유추의 활용으로 볼 수 있다.

4. 복소수와 복소수 연산의 체계화 과정에서의 유추

복소수는 $x^2+1=0$이 해를 갖는 확장된 수체계가 필요하기 때문에 정의한 수이다. 음수와 마찬가지로 직관이나 이전 수체계에서 성립하는 성질에 비추어 유추적 사고를 하면 인식론적 장애에 부딪힌다. 예를 들어, 어떤 실수도 제곱하면 음수가 되지 않는다는 성질로부터 유추하면, 복소수는 이해하기 어려운 수이다. 실수에 대해서는 가능했던 대소비교가 불가능하다는 점도 복소수를 이해하기 어렵게 한다. 다시 말하여, '실수: 대소비교에 따른 실수의 배열::복소수: 대소비교에 따른 복소수의 배열'은 완성될 수 없는 유추이다.

복소수의 연산을 정의하는 과정에서는 의도적으로 실수에 대한 성질을 유지하는 것, 곧 유추에 의해 복소수 체계를 완성한 것이 분명하게 드러난다. 복소수의 덧셈과 뺄셈은 $x^2+1=0$의 근을 i로 나타내고, 이를 문자와 마찬가지로 생각하되, $i^2=-1$로 고쳐서 다음과 같이 정의한다:

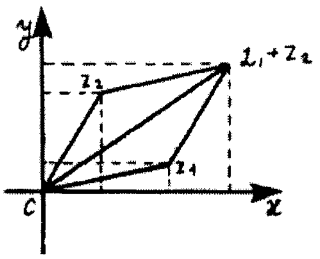
$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

이렇게 복소수의 연산을 정의하면 실수에 대해 성립했던 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하며, 복소수 집합은 체를 이룬다(Eves & Newsom, 1958: 124). 이 정의 과정은 동일한 성질이 유지되도록 한다는 점에서 유추적 사고에 따른 것이다.

Fischbein(1987)에 의하면, 수학자들은 종종 형식적인 표현을 완성하기 이전 또는 이후에라도 다양하고 직관적인 표현을 시도하며, 이를 통해 대상의 실제성을 파악하고자 한다(Fischbein, 1987: 133-135). 수학자들은 복소수에 대해 형식적인 정의를 이용하여 탐구하면서 연산의 의미 또는 연산을 정의하는 방식의 타당성에 대해서는 계속해서 의심하였다. 그러나 Wessel, Argand, Gauss 등이 거의 동시에 만든 기하적인 표현은 이 연산의 의미와 정의 방식의 타당성에 대한 의심을 제거하는 데 도움을 주었다. 이로써 복소수는 직관적이면서도 의미

가 풍부한 기하적 표현에 의해 실제성을 획득하게 되었다(Courant & Robbins, 2002: 118).

Wessel, Argand, Gauss 등이 사용한 기하적 표현은 복소수 $z = x + yi$를 복소평면 위의 점 (x, y)에 대응시킨 것을 가리킨다. 이제 원점으로부터 z까지의 거리를 ρ라고 하면, $\rho^2 = x^2 + y^2$이다. 수직선 위의 점에 실수를 일대일대응시키고, 원점으로부터의 거리를 절대값으로 정의한 것처럼, 복소평면 위의 점에 복소수를 일대일대응시키고, 역시 원점으로부터의 거리를 절대값으로 정의한다. 이로부터 실수에 대한 기하적 표현과 복소수에 대한 기하적 표현 사이의 다양한 유추가 선명하게 드러난다.



[그림 Ⅱ-2] 복소수의 덧셈(Fischbein, 1987: 134)

복소수의 합은 [그림 Ⅱ-2]와 같이 복소평면 위의 세 꼭지점 O, z_1, z_2과 평행사변형을 이루는 네 번째 꼭지점으로 나타난다. 이로부터 다음과 같은 중요한 부등식이 성립한다는 것을 발견할 수 있다:

$$| z_1 + z_2 | \le | z_1 | + | z_2 |$$

또한, 두 복소수의 합은 평행이동의 합성을 나타낼 수 있게 되어 물리적 세계를 모델링하는 유용한 도구가 된다. 마찬가지로 두 복소수의 곱은 확대회전을 표현하기 때문에 다양한 학문 분야에서 활용된다(이동환, 2008: 53). 무엇보다 수학사에서 중요한 것은 복소수를 기하적으로 표현함으로써, 다음과 같은 유용한 식을 얻게 되었다는 것이다:

임의의 정수 n에 대하여,

$$z^n = \rho^n (\cos n\phi + i \sin n\phi) \quad (\text{단, } \phi\text{는 편각})$$

결국 복소수와 그 연산은 형식적으로 정의되었지만, 기하적 표현 도구에 의해 재조명되면서 그 의미가 분명해졌다. 실수에서 복소수로의 확장은 대수적인 구조로부터의 유추에 의해 시도되었으며, 확장에 의해 만들어진 새로운 개념과 연산의 의미는 기하적 표현에 의해 확보되었다. 이는 대수적인 구조의 유지와 적용이라는 유추적 사고에 의해 수체계를 확장하고, 실수의 성질에 기초한 기하적 표현이라는 또 다른 유추적 사고에 의해 그 의미를 보다 실제적이고 직관적으로 설명한 예로 볼 수 있다.

Ⅲ. 유추적 사고 사례의 분석

앞서 살펴본 유추적 사고 사례는 수학의 발견 과정에서 유추가 매우 중요한 역할을 하였다는 것을 구체적으로 드러낸다. 이 절에서는 수학교육의 관점에서 유추적 사고를 함양할 수 있는 모델을 개발하기 위해 앞서 확인한 사례를 메타적으로 분석한다.

1. 유추의 두 가지 기능: 표현의 변형과 가설 생성

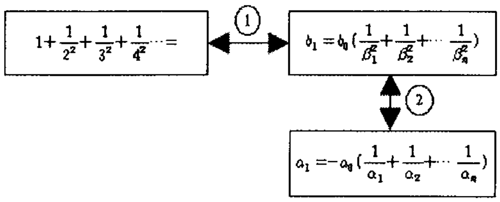
Parsons(2008)에 의하면, 수학은 추상적인 대상을 다루는 언어이며, 추상적인 대상 사이의 관계, 특히 인과 관계를 논리적으로 파악하려는 일련의 추론에 의존한다. 수학적 대상의 존재성과 본질은 수학적 언어 또는 표상에 의해 규정되며, 이는 다시 직관과 논리에 기초하여 새로운 체계를 이루면서 확장된다(Parsons, 2008: 1-4). 이와 같은 수학의 본성 때문에 수학은 오로지 추상적인 대상이 갖춘 일반적인 개념 또

는 성질을 인식할 수 있을 때에만 탐구할 수 있다고 생각하기 쉽다. 그러나 일반적인 개념 또는 성질을 인식하지 못한 단계에서 불완전한 직관 또는 정당화되지 않은 추측에 의해 비약을 시도하고, 이를 다시 정당화함으로써 수학을 발견한다는 설명이 많은 학자들에 의해 제시되고 있다(Fischbein, 1987; Lakatos, 1976; Corfield, 2003; Byers, 2007; Polya, 1954; Freudenthal, 1992 등).

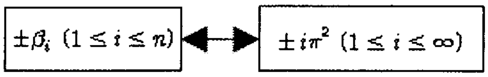
유추적 사고는 불완전한 직관 또는 정당화되지 않은 추측을 사용하게 되는 대표적인 맥락을 제공한다. 앞서 Euler가 유한개의 항을 가지는 방정식에 대해 성립하는 근과 계수와의 관계를 무한개의 항을 가지는 방정식에까지 확장하여 적용함으로써, 무한급수의 합 문제를 해결한 예를 살펴보았다. Euler는 이 방법의 정당성을 문제해결 후 10년이 지나서야 증명할 수 있었다. 집합론에서 자연수에 대한 직관으로부터 유한집합의 원소를 셈으로써 비교하고, 이를 일대일대응 개념과 연결시키고, 이를 다시 무한집합 사이의 비교 도구로 활용하고, 무한집합을 정의하는 데까지 활용한 예에서도 불완전한 직관에 의한 유추를 확인할 수 있다. Dedekind가 정의한 무한집합은 공리체계가 완성되기 이전까지 오류 없는 도구로 활용되었다. 이러한 맥락에서 과학자들이 실험을 통해 추측을 만들고 정당화하듯이 수학자들은 유추를 이용하여 가설을 세우고 진행한 후, 서서히 그 진리성을 입증한다고 할 수 있다.

Euler의 문제해결 과정을 세부적으로 살펴보면 유추적 사고가 문제해결 과정에서 어떤 기능을 하였다고 할 수 있는지 보다 구체적으로 확인할 수 있다. 먼저 구해야 하는 문제는 '$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$'과 같이 '제곱수가 포함된 특별한 형태'의 무한급수의 합이다. Euler는 이미 알고 있는 식에서 이와 같은 특별한 형태의 항이 포함된 것을 찾으려고 노력하였을 것이다. [그림 III-1]의 ①과 같이 다항방정식의 근과 계수와의 관계 속에서 이와 유사한 형태의 항이 포함되어 있음을 확인하였을 것이다. 이는 [그림 III-1]의 ②와 같이 간단한 유추에 의해 확인가능하다. 이제 만약 근이 $\pm1, \pm2, \pm3, \cdots$과 같은 형태로 나타나는 방정식을 찾을 수 있다면 문제해결의 중요한 과정이 완성된다.

Euler는 $\sin x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}-\cdots=0$에서, $\frac{\sin x}{x}=0$으로 형태를 바꾸면 그 근이 $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi\cdots$이 되어 주어진 급수의 항과 유사하다는 점에 주목하였을 것이다. 결국 [그림 III-2]와 같이 유한급수로 표현되는 다항방정식의 근과 계수와의 관계가 무한급수로 표현되는 다항방정식에 대해서도 성립한다면 주어진 문제를 해결할 수 있다고 생각했을 것이다.



[그림 III-1] Euler의 유추적 사고 1



[그림 III-2] Euler의 유추적 사고 2

[그림 III-1]의 경우에는 표현 형태에 주목하고 표현 방법을 변형함으로써 유추를 완성하였다면, [그림 III-2]의 경우에는 유추에 의해 기존의 성질이 유지된다고 가정하였음을 알 수 있다. 여기서 식 또는 표현의 유사성에 근거하여 표현 방법을 의도적으로 변형하면서 연결성을 추구하는

것과, 기존의 개념이나 성질을 유지하려는 가설적인 사고에 따르는 것의 두 가지 기능이 유추적 사고에 내재되어 있음을 알 수 있다.

복소수와 그 연산의 체계화 과정에서는 방정식의 근과 계수와의 관계를 유지하려는 가설적인 사고에 따라 새로운 수체계를 구성하고, 대수적인 표현 체계를 기하적인 표현 체계로 변형함으로써 새로운 수체계의 의미를 확립한 것으로 볼 수 있다. 이 과정에서도 역시 가설 생성과 의도적인 표현의 변형 두 과정이 실행되었음을 알 수 있다. 유추적 사고에 기초한 가설 생성은 개념적 이해를 동반하지 않으며, 이 때문에 인식론적 장애가 발생하고, 이를 극복하기 위해 의도적인 표현의 변형이 시도되며, 이를 통해 수학적 지식이 안정된 체계를 이룬다. 이와 같이 수학적 지식을 구성하는 과정에서 유추적 사고가 하는 두 기능은 수학학습 과정을 설계할 때에도 고려해야 할 필요가 있다.

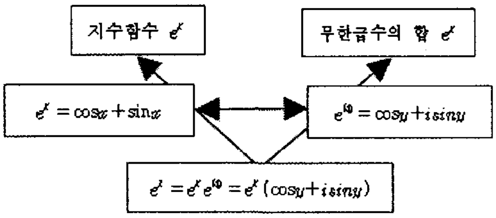
2. 유추적 사고의 과정: 모호성의 유발[1] 과 해결

Byers(2007)에 의하면, 하나의 대상이 두 가지 이상의 맥락을 가질 때 모호성이 생긴다. 예를 들어, e^x는 밑이 초월수 e이고 정의역이 실수 전체 집합인 지수함수 맥락을 가진다. 동시에 e^x는 $e^x=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}\ (-\infty<x<\infty)$과 같이 무한급수의 합으로도 표현된다. e^x가 가진 두 가지 맥락, 곧 지수함수와 무한급수의 합 맥락은 각각 유용하지만, 두 맥락이 어떻게 연결되는지 파악하지 못하면 e^x는 모호한 채로 남아있게 된다. 특히 e^x의 급수 전개는 삼각함수 $\sin x$와 $\cos x$의 급수 전개로 표현된다는 점을 생각하면 모호성은 더욱 분명해진다. 지수함수의 성질과 $\sin x$와 $\cos x$의 성질이 전혀 유사하지 않은 것처럼 보이기 때문이다. 예를 들어, $\sin x$와 $\cos x$의 그래프는 주기성을 가지고, -1부터 1까지의 범위의 값만 가진다. 이에 비해 지수함수는 주기성도 없고, 유계도 아니다. 그러므로 지수함수가 $\sin x$와 $\cos x$의 급수 전개로 표현된다는 것은 신비로운 성질로 보일 수 있다.

Euler는 $e^x=\sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$, $\cos x=\sum_0^\infty (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x=\sum_0^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 이 복소수에 대해서도 성립할 것으로 유추하고, 임의의 복소수 z에 대해 '$e^{iz}=\cos z+i\sin z$'임을 추측한 후 이를 증명하였다. 한편 앞서 확인한 바와 같이, Wessel, Argand, Gauss 등은 복소수 $z=x+yi$를 복소평면 위의 점 (x,y)에 대응시켰고, 원점으로부터 z까지의 거리를 이용하여 복소수의 절댓값이라는 유사 개념을 창안하였다. 이는 복소수의 정의에 주목하고 나서 꽤 오랜 시간이 지난 후였다. 이 밖에도 실수에 대한 기하적 표현과 복소수에 대한 기하적 표현 사이의 여러 유추가 선명해짐으로써 복소수의 연산에 대한 의미도 분명해졌다. 더욱이 복소수 $z=x+yi$를 이용하여 $e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$를 구해보면, e^x가 절댓값에, e^{iy}가 복소평면 위에서의 회전에 관련됨을 알 수 있다. 그러므로 지수함수를 복소수 z에 대해 확장하면, 지수함수 형태인 e^z가 회전에 따른 주기성과 절댓값에 의한 유계성을 갖추어 삼각함수와 연결됨을 알 수 있다. [그림 III-3]와 같이 실수 범위에서는 전혀 연결되지 않는 것으로 보였던 지수함수와 삼각함수의 성질이 복소수 범위로

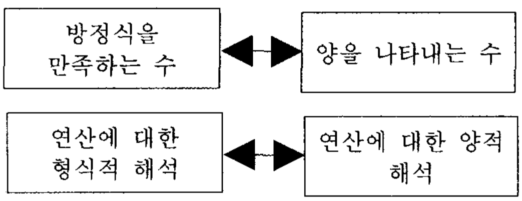
1) 여기서 모호성은 이 연구를 위해 참고한 Byers(2007)에서 ambiguity를 번역한 용어이다. 이 글에서는 모호성이 존재하지 않았던 상황에서 유추적 사고에 의해 모호성이 발생하고, 이를 해결하는 과정에서 수학적 지식이 구성되었다는 것을 설명하기 위해, '모호성의 유발'이라는 표현을 사용하였다.

확장된 이후에는 서로 연결되어 하나의 체계 안에 포괄할 수 있게 된 것이다.



[그림 Ⅲ-3] 하나의 체계로 통합하여 모호성을 해결하는 경우

음수의 경우에는, 방정식을 만족하는 수와 양을 나타내는 수, 두 맥락이 모호성을 유발한다. 앞서 확인한 바와 같이, 음수의 인식론적 장애는 본질적으로 수가 양의 수학적 표현에 해당하고, 수 사이의 연산 결과도 여전히 양적인 해석 대상이라고 생각하였기 때문에 발생하였다. [그림 Ⅲ-4]에서 방정식을 만족하는 수로서의 음수를 양을 나타내는 수로서의 자연수에 대한 직관에 비추어 유추하고, 마찬가지 맥락에서 연산에 대해 유추하려는 경향 때문에 음수와 음수의 연산을 이해하기 어려웠던 것이다. 음수와 그 연산이 형식적인 해석과 양적인 해석의 두 맥락을 가짐으로써 모호성이 출현하였고, 그 유추가 부적절하다는 것을 명확히 함으로써 모호성이 해결되었다.



[그림 Ⅲ-4] 유추의 부적절성 인식을 통하여 모호성을 해결하는 경우

수학적 발견 또는 수학적 지식의 구성 과정에서 유추적 사고의 목적은 하나의 맥락에 머무르지 않고 다양한 표현 도구 개발을 통한 복수의 맥락 형성에 의해 모호성을 유발하고, 그것을 해결하는 것이다. 모호성이 유발되지 않으면 수학이 확장되거나 재구성되기 어려우며, 모호성을 유발하는 가장 중요한 도구 중의 하나가 유추적 사고인 것이다. 그러므로 안정 상태에서 모호성을 유발하여 불안정 상태로, 모호성을 해결하여 다시 안정 상태로 변화하는 것이 발견에 의한 수학의 발달 과정 모델이라고 할 수 있다. 이상의 내용을 종합할 때, 수학적 지식의 구성 과정에서 유추의 역할을 [그림 Ⅲ-5]과 같이 나타낼 수 있다. 이는 유추가 안정 또는 평형 상태를 깨면서 동시에 다시 더 나은 안정 또는 평형 상태로 나아가도록 하는 역할을 한다는 Inhelder와 Piaget(1964)의 주장과 관련된다. 스키마를 적용하는 과정에서 조절을 통해 스키마를 변형하고, 동화를 통해 스키마를 구성하는 역할을 하는 것이다.

[그림 Ⅲ-5][2]과 같이 수학자들은 안정된 지식 체계를 그대로 유지하지 않고, 내부 구조의 변형 또는 확장하려는 성향을 가지고 있다. 이 과정에서 유추적 사고에 의해 표현 도구를 새로이 개발하거나, 새로운 관계 또는 새로운 성질에 대한 가설을 생성하면서, 모호성이 극대화되고 이를 해결하면서 다시 안정을 찾게 된다. 이 과정을 반복하는 가운데 새로운 수학적 지식을 구성하거나 기존 지식의 엄밀성을 획득한다. 이 때 동일한 대상에 대한 둘 이상의 표현, 관계, 성질은 모호성을 유발함으로써, 관점을 전환하고 기존 스키마를 재구성하거나 변형하게 한다. 앞서 살펴본 예에서 집합 사이의 일대일대응 개념, 방정식의

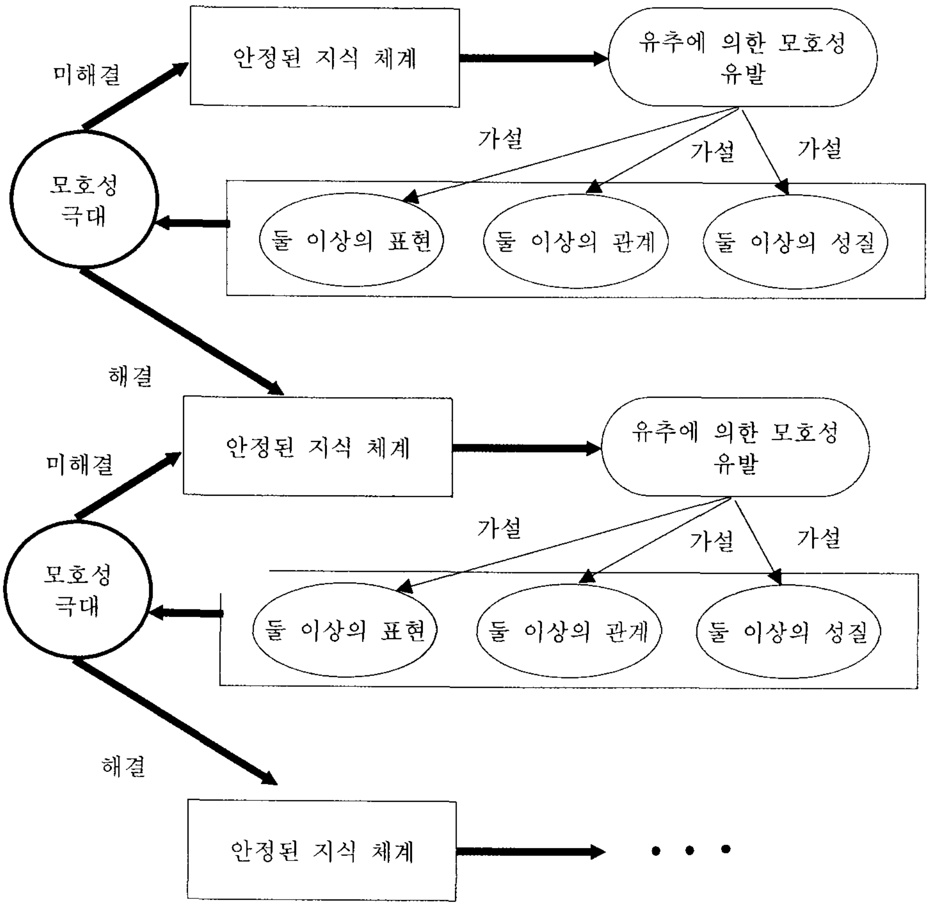
2) 이 다이어그램은 연구자가 개발한 것이며, 심사위원의 조언에 따라 수정·보완된 것이다. 심사위원의 좋은 의견에 감사드린다.

근과 계수와의 관계, 실수에 대한 기하적 표현 등은 모두 기존 지식 체계 내에서 안정적으로 적용된 것이었다. 이를 무한집합으로, 무한급수로 그리고 복소수로 확장하여 적용하면서 둘 이상의 표현, 관계, 성질이 발생하였으며, 이 확장의 정당성을 확보하려는 노력에 의해 집합론, 무한급수의 합, 복소수의 연산에 대한 수학적 지식의 안정화가 가능해졌다. 요컨대, 수학자들의 유추적 사고 과정은 '의도적인 개념과 관계, 표현의 변형'을 통한 '모호성의 유발'과, 이를 통한 '지식 체계의 불안정화', '모호성의 해결을 통한 지식 체계의 안정화'로 특징지어진다.

Ⅳ. 요약 및 결론

이 글에서는 먼저 수학의 역사에서 유추적 사고를 활용한 사례를 집합론, 무한급수의 합, 음수, 복소수로 나누어 살펴보았다. 이어서 각 사례를 세부적으로 분석하여 유추적 사고를 어떤 맥락에서, 어떤 방식으로 활용하였는지 알아보았다.

집합론의 발달 과정에서는 Dedekind가 유한집합의 크기 비교를 위해 사용하는 일대일대응 개념을 이용하여 무한집합을 정의하고, 무한집합의 크기 비교 방식으로 확장한 것을 통해 유추적 사고가 무한집합에 대한 산술의 기초를



[그림 Ⅲ-5] 수학적 지식의 구성 과정에서 유추의 역할

다지는 데 기여한 바를 확인하였다. 무한급수의 합에 대한 Euler의 해결 과정에 대한 논의는 유한개의 항을 가지는 다항방정식의 근과 계수와의 관계를 무한급수의 경우에도 성립될 것으로 가정하는 경우에 대한 것이었다. 음수의 발달 과정에서는 형식적인 존재로서의 음수가 양적인 맥락과의 지속적인 유추에 의해 거부됨으로써 인식론적 장애가 발생되는 것을 확인하였다. 마지막으로 복소수의 발달 과정에서는 형식적인 존재에 부여한 연산의 의미를 추구하는 과정에서 실수와 유사하게 정의된 기하적인 표현이 어떤 역할을 하는지 살펴보았다.

이 글에서 살펴본 네 가지 사례에서 의도적인 표현의 변형과 가설 생성, 모호성의 유발과 해결이라는 유추적 사고의 중요한 기능을 확인하였다. 음수의 경우에는 방정식의 근으로 정의된 형식적인 존재를 양적인 맥락에서 수가 가졌던 의미에 비추어 유추적으로 파악하려는 경향에 의해 인식론적 장애가 발생하였다. 이는 음수와 그 연산 체계에 대한 모호성의 원인이 되었으며, 음수의 형식성을 명확히 하면서 양적인 맥락과의 유추가 부적절하고 제거해야 한다는 것을 확인하는 계기가 되었다. 복소수의 경우에는, 실수에 대해 성립했던 연산법칙으로부터 유추에 의해 연산을 정의함으로써, 모호성이 유발되었고 이를 실수의 기하적 표현에 기초한 유추적 사고에 의해 해결하였다. 무한집합에 대한 논의 역시 자연수에 대한 직관에서 유한집합으로의 유추, 다시 무한집합으로의 유추가 모호성을 유발하고, 이를 엄밀화하여 집합론이 체계화되었음을 확인하였다. 이들은 공통적으로 이미 알고 있는 개념, 원리에 비추어 새로운 맥락에서의 개념과 원리를 이해하려고 하거나 또는 핵심 개념이나 원리를 유사하게 유지하려는 경향 때문에 발생하는 것이었다. 유추는 새로운 맥락 또는 둘 이상의 표현, 관계, 원리를 만들어내기 때문에 모호성을 유발하며, 수학자들은 새로운 이론을 발견하는 초기 단계에서 이와 같은 모호성에 직면하고 그것을 극복하는 과정에 의해 수학을 발전시켜 왔다. 결론적으로 수학자들의 유추적 사고 사례에 나타난 유추적 사고는 [그림 Ⅲ-5]과 같은 모델로 설명될 수 있다.

이 연구의 결론과 이에 근거한 교육적 시사점을 다음과 같이 제시한다. 첫째, 수학적 발견 과정에서 유추적 사고를 활용할 때, 수학자들은 의도적으로 표현 방법이나 관계를 변형한다. 그러므로 수학 학습 과정에서도 표현 방법 또는 대상과 대상 사이의 관계를 변형해보도록 하고, 그 변형에 의해 기존 지식 체계에 어떤 변화가 생기는지 알아보도록 하는 기회를 제공해야 한다. 둘째, 수학자들은 유추적 사고에 의해 기존 체계에 모호성을 발생시키며, 이 때문에 불안정해진 체계는 서로 다른 맥락을 하나로 통합하거나 유추적 사고에 의한 불일치를 인식하고 정돈함으로써 안정된 새로운 체계로 발전하게 된다. 학교수학을 지도하는 과정에서도 모호성을 유발하고 도전하여 안정을 꾀하는 경험을 제공하는 것이 필요하다. 학생들의 탐구와 적극적인 참여를 권장한다면 모호성을 유발하여 이를 극복하는 것은 유익한 과정으로 볼 수 있다. 셋째, 수학자들은 유추적 사고에 의해 지속적인 발견과 확장을 시도하였으며, 정당화를 보류하고 대담한 가설을 세움으로써 비약에 의존하여 수학을 발전시켰다. 정당화는 수학적 추론이 진행되는 과정에서 필수적이기는 하지만 종종 완성되지 않은 채로 고립된 개념이나 절차를 연결하는 역할을 하였으며, 이러한 불완전한 정당화 또는 정당화의 보류는 학교수학을 지도하는 과정에서도 마찬가지로 고려되어야 한다.

서로 달라 보이는 두 대상 사이의 유사성을

찾아내고, 그것을 설명하기 위해 노력하는 과정은 천재적인 수학자보다는 탐구와 도전에 의존하는 인간적인 수학자의 모습을 드러낸다. 그러므로 수학사 자료를 반영하거나, 수학적 추론을 강조하고, 발견과 탐구를 유도하기 위해서는, 유추적 사고에 따른 수학적 발견의 메카니즘을 학교수학의 맥락에서 그리고 학생들의 수준을 반영하여 구체화하고 교수-학습 경로 설정에 반영하는 적극적인 노력이 필요하다 (English, 2004). 무엇보다 다양한 내용 영역별로 학생들의 유추적 사고 과정을 예측하고, [그림 Ⅲ-5]의 모델에 따라 실제로 교수-실험하고, 이를 통해 국소적인 교수-학습 이론을 세우는 시도가 이루어져야 한다.

참고문헌

교육부(1998). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 1997-15호.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2007-79호.

김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식(2002). 수학교육학 용어 해설, **학교수학, 4**(1), 127-145.

우정호 · 최병철(2007). 음수 개념 이해에 관한 교수학적 분석, **수학교육학연구, 17**(1), 1-31.

이경화(2009). 영재아들의 세 유형의 유추과제 해결, 수학교육학연구, 19(1), 45-61.

이동환(2008). 기하학적 측면에서 복소수의 지도가능성 고찰, **수학교육학연구, 18**(1), 51-62.

이승우 · 우정호(2002). 학교수학에서의 유추와 은유, **수학교육학연구, 12**(4), 523-542.

이종희 · 김선희(2002). 인수분해 문제해결과 유추, **학교수학, 4**(4), 581-599.

정승윤(2006). **중학교 2학년 학생들의 확률적 판단 전략과 유추에 의한 교정 효과 분석**. 한국교원대학교 석사학위 논문.

Alexander, P. A., White, G. S., & Daugherty, M. (1997). Analogical reasoning and early mathematics learning. In L. D. English (Ed.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images* (pp. 117-147). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Arcavi, A. (1985). *History of Mathematics as a Component of mathematics Teachers Background*. Rehovot: Weismann Institute of Science.

Byers, W. (2007). *How Mathematicians Think*. Princeton: Princeton University Press.

Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Courant, R., Robbins, H., & Revised by Stewart, I. (2002). *What is Mathematics? - An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press, Inc. (박평우, 김운규, & 정광택 역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1996 출판).

English, L. D. (1997). (ED.). *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors, and images*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

__________(2004) (ED.). *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Erdniev, P. M. & 한인기(2005). **유추를 통한 수학탐구**. 서울: 승산.

Eves, H., & Newsom, C. V. (1958). *An*

introduction to the foundations and fundamental concepts of mathematics. New York: Rinehart & Company, Inc.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach.* D. Reidel, Dordrecht.

Freudenthal. H. (1991). *Revisiting Mathematics Education: China Lectures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gentner, D. (1989). The mechanism of analogical learning. In S. Vosniadou & A. Ortony(Eds.), *Similarity and analogical reasoning* (pp. 199-241). NY: Cambridge University Press.

Goswami, U. (1989). Relational complexity and the development of analogical reasoning. *Cognitive Development, 4,* 251-268.

Herrlich, H. (2006). Axiom of Choice, *Lecture Notes in Mathematics* 1876, Heidelberg: Springer-Verlag.

Hoopes, J. (2008). (Ed.). 퍼스의 기호학. (김동식, 이유선 역). 서울: 나남. (영어 원작은 1992년 출판).

Inhelder, B., & Piaget, J. (1964). *The early growth of logic in the child. Classification and seriation* (E. A. Lunzer & D. P. Papert, Trans.). New York: Harper & Row. (Original work published 1959)

Kac, M., Rota, G., & Schwartz, J. T. (1986). *Discrete Thoughts: Essays on Mathematics, Science, and Philosophy.* Boston: Birkhauser.

Katz, V. J. (1998). *The History of Mathematics.* HarperCollins College.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations,* Cambridge: Cambridge University Press.

Lin, Shwu-Yeng T & Lin, You-Feng (1973). *Set Theory: an Intuitive Approach.* Boston: Houghton Mifflin.

Parsons, C. (2008). *Mathematical Thought and Its Objects.* New York: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1952). *The Origins of Intelligence in Children.* New York: Norton.

Polya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning I: Induction and Analogy in Mathematics,* Princeton, NJ: Princeton University Press.

_________(1962). *Mathematical Discovery.* New York: JOHN WILEY & SONS, Inc.

Poincaré, H. (1982) Science and Methods, Washington, D. C. : University Press of America, (불어원작은 1908년 출판).

Rota, G., & Palombi, F. (1997). Indiscrete thoughts. Boston: Birkhäuser

Sternberg, R. J. (1977). *Intelligence, information processing, and analogical reasoning: The componential analysis of human abilities.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

The Role of Analogical Reasoning in Mathematical Knowledge Construction

Lee, Kyung Hwa (Seoul National University)

Though there is no agreement on the definition of analogical reasoning, there is no doubt that analogical reasoning is the means of mathematical knowledge construction. Mathematicians generally have a tendency or desire to find similarities between new and existing ideas, and new and existing representations. They construct appropriate links to new ideas or new representations by focusing on common relational structures of mathematical situations rather than on superficial details. This focus is analogical reasoning at work in the construction of mathematical knowledge. Since analogical reasoning is the means by which mathematicians do mathematics and is closely linked to measures of intelligence, it should be considered important in mathe- matics education. This study investigates how mathematicians used analogical reasoning, what role did it play when they construct new concept or problem solving strategy.

* **Key Words** : Analogical reasoning(유추적 사고), Analogy(유추), Mathematical Knowledge Construction(수학적 지식의 구성)

논문접수: 2009. 5. 4.
논문수정: 2009. 8. 18.
심사완료: 2009. 8. 24.