대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 317-333. Jun. 2009

변형된 상금 분배 문제의 해결과정에 나타나는 초등학교 수학영재들의 사고 특성 분석

김 우 현* · 송 상 헌**

본 연구는 전통적인 '파스칼과 페르마의 상금 분배 문제'를 변형하여 초등학교 수학영재들에게 제시하고 그것을 해결하는 과정에서 나타나는 집단의 수준별 사고특성과 또래 학생들과의 토론과정에서 변화해가는 개인의 사고 과정을 분석하고 있다. 변형한 문제는 원문제보다 상황에 따라 여러 가지 답을 도출할 수 있도록 재구성하였는데, 선행 연구 및 실제 수업 적용을 통하여 얻은 10가지의 답을 3가지 유형으로 분류하였다. 문제를 해결하는 동안 나타나는 수학영재들의 사고 특성 및 변화 과정을 분석한 결과 학생들이 소속한 집단의 수준별로 해법의 유형에는 차이점이 나타났으며 개별 학생이 문제 해결 과정이나 사고 수준에 있어도 그 특성이 뚜렷하였다. 일반적으로는 일어날 상황만을 고려하여 상금을 분배하려는 생각보다는 일어난 결과와 일어날 상황을 함께 고려하는 것이 더 우수한 방법이라고 생각할 수 있다. 하지만 가장 수준이 높은 영재집단에서도 토론 수업이 진행되는 동안 다양한 논의가 도출되어 어느 한 가지 방법이 더 우수하다고 확정지을 수 없을 정도로 좋은 토론 과제였다.

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 목적 및 필요성

Freudenthal은 '확률이 응용수학의 전형이며 실제에 가깝고 관계로 충만하다.'고 하면서 수학의 응용성과 실용성 측면에서 확률 교육을 강조하였고, NCTM(전미수학교사협의회)도 자료의 분석, 통계, 확률의 학습이 학생들로 하여금 수학을 다른 교과나 일상적인 경험과 자연스럽게 연결하는 기회를 제공하며 수학적 의사소통 기능을 강화시킨다고 하면서 확률 교육의 중요성을 말하였다(이소연, 2001:1에서 재인용). 우리나라는 제7차 교육과정 <6-나> 단계에서 '경우의 수' 알아보기로 확률을 도입하고는 있으나 Jones et al.(1999)이 규정한 표본 공간, 사건의 확률, 확률 비교, 조건부 확률의 확률 사고 체계 중에서 주로 간단한 사건의 표본공간에 관한 확률 개념만을 다루다가 <8-나> 단계에서는 표본공간과 사건의 확률에 관한 확률 개념까지 다루고 있는 실정이다. 그런데 우정호(2007:426)는 현행 학교수학에서는 확률 개념의 지도보다 계산 패턴에 따라 여러 가지 복잡한 사건의 확률을 구하는 형식적인 알고리즘 중심의 지도가 이루어지고 있어 학생들은 확률 개념을 배웠으면서도 여전히 우연 현상과 확률에 대한 실제적인 의식은 크게 바뀌지 않고 오개념을 그대로 갖고 있는 모순된 현상이 일어나고 있다고 주장하면서 확률적 사고의 발달을 위해 학생들의 확

* 제1저자, 백사초등학교(kwhpmj@empal.com)
** 교신저자, 경인교대/아주대(song2343@hanmail.net)

률적 경험과 그들이 구사하는 판단 전략과 오개념을 스스로 드러내게 하여 그 문제점을 반성하게 하고 토론을 통하여 조정하도록 이끌어 주는 것이 바람직하다고 주장하였다.

현재 한국교육개발원의 위탁을 받아 개발하고 전국의 시도교육청에서 활용하고 있는 수학영재교육 교수-학습 자료 중에 통계 영역의 내용은 일부 있으나 확률 영역의 내용은 적고 수학영재들의 사고특성에 관한 연구도 확률영역이 다른 내용영역에 비해 적은 편이다.

이경화(1996)와 이정연(2005)은 확률 개념에 관한 교수학적 분석 및 교과서 분석을 하였고, 이소연(2001)과 안미정(2005)은 실제 초등학교 6학년과 3학년을 대상으로 한 확률 프로그램을 개발하였다. 나귀수 외 3인(2007)은 수학 영재 학생들을 대상으로 조건부 확률 문제해결 방법에 대한 질적인 연구를 진행하였으며, 최병훈(2007)과 이은희(2007)는 일반 학생과 영재 학생들을 대상으로 양적인 비교 연구를 하였다. 이러한 선행연구들에서의 시사점은 확률 개념의 교수학적 분석과 교과서 분석을 바탕으로 문제를 해석하고 해결하는 과정에 초점을 둔 추론과정에 대한 연구가 요구되며, 특별히 확률 비교 과제를 해결하는 과정에 초점을 둔 추론과정에 대한 질적, 양적 연구를 병행하여 수학영재들의 사고 특성을 보다 세밀히 분석해 볼 필요가 있다는 것이다.

이 연구는 전통적인 '파스칼과 페르마의 상금 분배 문제'를 몇 가지 관점에서 변형하여 초등학교 수학영재들이 해결하는 동안 드러나는 집단의 수준별 사고특성과 그들이 또래 학생들과의 토론과정에서 보여주는 개인의 사고 과정을 분석하고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 확률과 확률적 사고

교육인적자원부(2006:94-104)는 "어떤 일이 일어날 수 있는 경우의 가짓수를 경우의 수"라고 정의하였으며, "모든 경우의 수에 대한 어떤 사건이 일어날 경우의 수의 비율을 확률"이라고 정의하였다. 이경화(1996:57)는 빈도적 관점에서 '확률을 무한 번의 또는 충분히 많은 횟수의 실험을 하여 구할 수 있는 특정한 사건이

<표 II-1> 확률 비교의 수준별 사고 특성(Jones et al., 1999:489)

수 준	사 고 특 성
수준 1 주관적 수준	►다른 표본 공간을 가진 사건이 확률을 비교하는데 **주관적 판단**을 사용함 ►공정한 상황과 공정하지 않은 상황을 구별 못함
수준 2 전환적 수준	►**양적인 판단**을 바탕으로 확률 비교를 하나 **항상 바르지는 않음** ►양적인 판단을 기반으로 일어날 것 같은 사건을 예측하나 주관적 판단으로 돌아가기도 함 ►공정한 상황과 공정하지 않은 상황을 구분하기 시작함
수준 3 비형식적 양적 수준	►확률 비교를 설명하는데 **타당한 양적인 사고**를 사용 ►공정, 비공정한 상황을 구별하는데 **양적인 사고**를 이용함 ►확률을 표현할 때 '덜, 더, 똑같은, 4개 중 1개'와 같은 비형식적인 용어를 사용함. ►확률을 비교하기 위해 수를 사용함 ►비복원 상황에서 모든 사건의 확률은 변화한다는 것을 이해함
수준 4 수치적 수준	►사건을 측정하고 비교할 때 **수치적 확률**을 부여하며 사고가 일관적임. ►사건의 결과를 열거하기 위해 일반적인 전략을 채택하여 적용함 ►복원/비복원 상황에서 수치적 확률을 부여함 ►종속과 독립의 사건을 구분할 수 있음

발생하는 극한 값'으로 정의하였다. 본 연구에서는 확률을 교과서에 제시된 고전적 관점 뿐 아니라 통계적 경험에 의하여 확률값을 얻게 되는 빈도적 관점에서도 함께 생각해 보고자 한다.

Jones et al.(1999)은 초·중등 학생들에 대한 교수 실험을 수행하며 그들의 사고를 체계적으로 관찰한 결과, 확률적인 사고를 드러내는 기본적인 확률 개념을 표본공간, 사건의 확률, 확률 비교, 조건부 확률로 분류하고 있는데 이 중 '확률 비교'는 어떤 확률적 상황에서 특정 사건이 일어날 확률이 다른 사건이 일어날 확률보다 큰 것인가를 밝히는 행위이다. 그는 확률적 사고 특성을 <표 II-1>과 같이 주관적 수준, 전환적 수준, 비형식적 양적 수준, 수치적 수준의 4단계 수준으로 구분하면서 학생들의 확률적 사고는 이러한 네 단계를 거치면서 성장하지만 이 사고 수준이 반드시 선형적으로 배타적인 것은 아니고 모든 확률 개념을 포괄하는 것도 아니며 한 학생이라도 각 개념에 따라 다른 수준을 보일 수 있다고 하였다.

2. 페르마와 파스칼의 공정한 상금 분배 문제

> 친애하는 파스칼
> 나는 다음과 같은 심각한 문제에 봉착했네. 실력이 비슷한 A, B 두 사람이 32피스톨씩을 걸고 내기를 했다네. 한 번 이기면 1점을 얻는 것으로 하고, 먼저 3점을 얻는 사람이 64피스톨 모두를 가지기로 했다네. 이 내기에서 A가 먼저 2점을, B가 1점을 땄는데, 더 이상 게임을 진행할 수 없는 상황이 발생했다네. 이럴 경우 게임을 무효로 하자니 먼저 2점을 딴 A가 억울해 하고, A가 먼저 2점을 얻었으므로 A가 이긴 걸로 하자니 B가 앞 일은 모르는 것인데 어떻게 A가 꼭 이긴다고 할 수 있느냐며 항의를 해 도무지 어떻게 판정을 내려야 할지 혼란스럽게 되었다네. 도대체 64피스톨을 어떻게 분배하는 것이 좋겠나? 파스칼 자네라면 이 문제를 충분히 풀 수 있을 거라 나는 믿네. 성의껏 대답해 주기 바라네.

[그림 II-1] 파스칼과 페르마의 상금 분배 문제

카르다노로부터 시작된 게임의 공평한 룰은 파스칼, 페르마를 거쳐 베르누이에 이르러 기초적 이론이 정립되었다. [그림 II-1]은 17C에 프랑스에 살았던 유명한 도박사 드메레가 친구 파스칼에게 편지로 질문한 내용이다. 당시의 유명한 수학자 파스칼 역시 고심 끝에 이 문제를 다음과 같이 해결하였다고 한다.

> "만약 시합을 중단하지 않고 계속할 경우 A가 이긴다면 A는 3번 이기는 것이므로 A는 64피스톨을 다 가져야 한다. 만약 B가 이긴다면 A가 2번, B가 2번 이긴 것이 되므로 둘이 32피스톨씩 나누어 가지면 된다. 결과적으로, A는 시합에서 이기든 지든 상관없이 32피스톨은 가져야 한다. 그 다음 시합에서는 이기는 사람이 최종 승자가 되는데, A가 이길 가능성과 B가 이길 가능성은 각각 1/2 이므로 남은 32피스톨은 둘이 똑같이 16피스톨씩 가지면 된다. 따라서 A는 32+16=48(피스톨), B는 16(피스톨)을 가지면 문제는 합리적으로 해결된다."

당초 파스칼과 페르마의 생각은 각각 사전확률과 사후확률이라는 이론 탄생의 배경이 되었다. 이같은 이론은 베르누이의 이항분포론 이전까지는 혼용되었다. 베르누이의 이항분포를 이용하면 B가 상금을 가질 수 있는 확률은 연속하여 두 번을 모두 이겨야 하므로 $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4}$, 즉, A와 B는 3:1로 상금을 나누어야 한다는 것이다.

3. 상금 분배 문제의 기존 해법

"공정한 상금 분배 문제"에서 공정하게 상금을 분배하는 방법은 매우 다양하다. 이 경우 두 게임자의 실력이 같다거나 비슷하다는 조건은 없다. 임재훈(2008:76-77)은 '지금까지 한 것'과 '앞으로 할 것'을 고려하여 상금을 분배하는 것으로 6가지의 예상 반응을 제시하고 있다.

가. 공정한 상금 분배 문제

"A, B 두 사람이 같은 돈을 걸어 5번을 먼저 이기는 사람이 돈을 모두 가지기로 한다. 그런데 A가 4번, B가 3번 이긴 상황에서 게임을 더 진행할 수 없는 상황이 발생하였다. 돈은 어떻게 나누어야 공정한가?"

[그림 Ⅱ-2] 임재훈(2008)의 공정한 상금 분배 문제

나. 상금 분배 방법

1) 1:1로 분배한다.

누가 이길지 알 수 없다. A가 5번을 이길 수도 있지만 B가 역전승할 수도 있다. 또 현재 승패가 4:3이므로, A와 B 사이에 별로 실력 차이가 있는 것 같지도 않다. 앞일을 알 수 없으므로 사이좋게 반반씩 나눈다.

2) 4:3으로 분배한다.

1:1로 분배하면 A가 손해를 보는 것이다. A가 B보다 한 판 더 이기고 있는 것을 고려하여 A에게 상금을 더 주어야 한다. 얼마나 더 주어야 하는가가 문제인데, '지금까지 한 것'을 고려하면 A는 4번 이기고 B는 3번 이겼으니 그에 따라 4:3으로 나누어주면 좋을 것이다.

3) 2:1로 분배한다.

2)와 같이 상금을 4:3으로 나누어 주면 A가 동의하지 않을 것이다. 만일 100승하면 끝나는 게임에서 99대 98로 중단되었다고 하자. 앞에서와 같이 생각하면 상금을 99:98로 분배하게 되는데, 그러면 결국 상금을 거의 반반 나누는 것과 마찬가지가 된다. 그러므로 4:3으로 분배하는 것은 A에게 불리한 것이다. '지금까지 한 것'이 아니라 '앞으로 할 것'이 중요하다. A는 한 판만 더 이기면 끝나고 B는 두 판을 더 이기야 끝난다. 그러므로 그것을 역으로 고려하여 상금을 2:1로 분배하는 것이 적절하다.

4) 3:1로 분배한다.

페르마와 파스칼이 한 것과 같은 수학적 모델링을 통해 A가 이길 확률과 B가 이길 확률을 계산하여 그에 따라 상금을 분배한다. 실제로, A가 5번 이길 확률을 P(A)라고 하면 $P(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ 이고, B가 5번 이길 확률을 P(B)라고 하면 $P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이다.

5) 40:9로 분배한다.

4)는 A와 B가 이후의 게임에서 이길 확률이 각각 1/2로 같다고 생각하였다. 그런데 A와 B가 이길 확률이 같다고 생각하는 것보다는 지금까지 승수를 고려하여 A와 B가 이길 확률이 다르다고 생각해야 할 것 같다. A는 지금까지 7번 중에 4번을 이겼으므로 A가 이길 확률은 4/7, B가 이길 확률은 3/7이다. 그러므로 A가 5번 이길 확률을 P(A)라고 하면 $P(A)=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{7}=\frac{40}{49}$이고, B가 5번 이길 확률을 P(B)라고 하면 $P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{9}{49}$이다.

6) 11:3으로 분배한다.

5)와 같이 생각할 때 8번째 게임이 끝난 다음에 A와 B가 이길 확률이 달라진다. 7번 게임을 한 상태에서 A는 지금까지 7번 중에 4번을 이겼으므로 A가 이길 확률을 4/7, B가 이길 확률은 3/7이다. 그러나 8번째 게임을 해서 A가 지면 전체 스코어는 4:4가 되므로 9번째 게임을 앞둔 상태에서 A와 B가 이길 확률은 각각 1/2로 같아진다. 따라서 A가 5번 이길 확률을 P(A)라 하면 $P(A)=\frac{4}{7}+\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{11}{14}$이고, B가 5번 이길 확률을 P(B)라 하면 $P(B)=\frac{3}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{14}$이다.

Ⅲ. 연구의 방법

1. 연구의 과제

본 연구에 사용한 "변형된 상금 분배 문제"는 역사적으로 잘 알려진 파스칼과 페르마의 상금 분배 문제를 좀 더 심화한 문제이다.

대부분의 사람들은 이 문제를 이미 일어난 결과만 가지고 상금을 분배하려고 한다. 하지만 파스칼과 페르마는 일어난 결과가 아닌 일어날 상황(미래)을 고려하여 문제를 해결하였다. 본 과제는 원 과제에서 '실력이 비슷하다'는 조건을 삭제하여 남은 경기에서 이길 확률을 고전적 관점의 50%가 아니라 조금 전에 일어난 결과(조건부확률)까지도 고려한 빈도적 관점에서의 이길 확률로 정의하여 사용하는 것이 공정한지 생각해 볼 수 있게 하였다. 그리고 남은 경기 수를 좀 더 많이 제시하여 남은 상황을 고려하는 경우를 심화하는 등 좀 더 다양한 문제 해결 방법을 찾아보고자 하였다.

여기서는 확률비교 상황이 주어졌을 때 주어진 조건을 잘 활용하여 공정하게 상금을 분배하는 확률비교의 사고 수준과 토론을 통하여 확률비교의 사고가 좀 더 발전되게 변화되어 가는 과정을 분석하고자 한다. 이렇게 변형한 상금 분배 문제는 다음과 같은 특징이 있다.

> "20**년 큐브행성에서 행성 간 스포츠 결승전이 열리고 있습니다. 5번을 먼저 이기는 팀이 20억 큐브의 상금을 모두 갖게 됩니다. 현재 A팀이 4번 이겼고 B팀이 2번을 이겼는데, 더 이상 게임을 진행할 수 없는 상황이 되었습니다.
> 이때 상금을 어떻게 분배하는 것이 타당하여 두 팀 모두 불만 없이 공정하다고 생각하겠습니까?"

[그림 Ⅲ-1] 본 연구의 변형된 상금 분배 문제

첫째, 해법은 한 가지만 있는 것이 아니라 어떤 조건을 고려하느냐에 따라 여러 가지 답이 나올 수 있다.

둘째, 어떤 조건을 고려하여 상금을 분배했는지를 살펴보면 수학영재들의 확률비교의 수준을 파악하기에 적합하다.

셋째, 다양한 의견이 도출될 수 있으므로 토론을 통하여 수학영재들의 다양한 사고 과정의 변화를 파악할 수 있다.

2. 연구의 대상자

본 연구의 대상자는 경기도 C초등학교 부설

<표 Ⅲ-1> 연구의 대상자

구분	소속		인원(명)	비고(해당연령에서의 집단수준)	학생 ID(집단_이름)
집단 A1	A대학부설과학영재교육원	심화반(5-6학년 통합)	15	상위 0.1%	A1_DW A1_KW A1_HK
집단 A2		기초반(4-6학년 통합)	15	상위 0.5%	A2_KH A2_SH A2_JK
집단 B	B교육청 부설영재교육원 6학년		19	상위 1%	B_YJ B_SJ
집단 C	C초등학교부설지역공동영재학급 6학년		18	상위 5%	예비실험동시 적용

지역공동영재학급(C집단) 6학년 18명과 경기도 B교육청부설영재교육원(B집단) 6학년 학생 19명, 경기도 A대학 부설 과학영재교육원 기초반(A2집단) 15명, 심화반(A1집단) 15명이며 <표 Ⅲ-1>로 정리하였다.

이들 중 개인별 사고특성을 질적으로 분석하는 사례연구의 대상자는 각 집단의 학생들을 대상으로 해당 연도에 10시간 이상의 수업을 진행하면서 관찰해보았던 지도교사(수)에게 "수업시간에 집중도가 높고, 자신의 생각을 분명히 표현할 수 있어 관찰이 용이하다고 판단되는 학생들을 3~4명 정도 추천해 달라."고 하여 추천을 받은 학생들이다.

3. 연구의 절차

본 연구 과제를 적용하기 위하여 C집단을 대상으로 3차에 걸쳐 예비 적용과정을 거치는 동안 나타나는 문제점을 여러 차례 수정, 보완하였다. 본 연구를 진행한 절차는 다음과 같다.

첫째, 선행연구 분석을 통해 초등학생들의 수준에서 확률 개념을 파악할 수 있는 확률 과제를 우선 선별하고 이를 맥락에 맞게 수정/개발한다.

둘째, 지역공동 영재학급 학생들에게 1차 투입하여 확률 과제에 대한 이해의 정도와 반응의 사례들을 통해 수준을 확인하고 이로부터 발생하는 문제점들을 수정하면서 과제의 표현 방법과 예상되는 반응을 추출한다.

셋째, 수정한 과제를 교육청부설 및 대학부설 과학영재교육원 학생들에게 투입하여 수준에 따른 집단별 학생들의 반응을 유형별로 분류한다.

넷째, 문제에 대한 개인별 해결과정과 특성을 분석한다.

다섯째, 수집, 분류, 분석한 자료들을 기존의 문헌에 비추어 해석하고 논의한다.

4. 자료 수집 및 분석

본 연구는 변형된 상금 분배 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 수학영재들의 개인별, 집단별 사고 특성과 토론 및 재고를 통하여 변해가는 개인별 사고의 변화과정을 분석하기 위하여 양적, 질적인 방법을 병행하였다. 다양한 자료 수집 방법을 통하여 자료를 다원화하는 것은 사례 연구의 신뢰도와 타당도는 높이기 위함이다. 특히 문제에 대한 개인별 해결과정과 특성을 분석하기 위해 연구자의 수업 진행을 담은 비디오 1대의 녹화물과 수업자의 수업 진행일지, 그리고 학생 1명당 연구보조원 1명이 밀착하여 관찰한 기록지, 면담자료, 비디오 촬영자료 등을 수집하고 이를 바탕으로 수업 내용과 학생들의 사고 유형 및 개인별 특성을 분석하였다.

Ⅳ. 연구 결과 및 논의

이은희(2007)에서 초등학교 5-6학년 수준의 수학영재들의 경우 대부분이 Jones et al.(1999)이 분류한 확률 개념의 발달 수준 중 3수준인 비형식적 양적 수준이나 4수준인 수치적 수준의 발달 수준을 보였다. 본 연구에서도 동일한 분석도구를 사용하고자 하였으나 본 연구에서 제시한 확률비교 과제에서는 연구대상자의 대부분이 4수준인 수치적 수준에 속하여 각 학생들의 확률 개념의 발달 수준을 구분하여 분석하기에는 적절하지 않은 것으로 나타났다. 그 이유는 Jones et al.(1999)의 확률 개념 발달수준 분류에서 확률비교의 경우 사건을 측정하고 비교할 때 주관적인 판단을 하는지, 양적인 사고

를 하는지, 수치적 확률을 부여하는지에 따라서만 수준을 구분하였기 때문이다. 반면 본 연구에서는 양적인 사고와 수치적 확률을 부여하는 상황 이외에 확률비교와 관련된 다양한 맥락까지 포함하는 과제이기 때문이다.

나귀수 외 3인(2007)은 이러한 수준은 과제별 특성에 따라서는 달라지는 경향이 있다고 하면서 영재 학생들이 나타낸 문제해결 방법에 근거하여 연구결과를 분석하였다. 따라서 본 논문에서는 Jones et al.(1999)의 확률 비교의 수준별 사고 특성을 토대로 학생들의 확률 비교 수준을 과제에 근거하여 좀 더 세분하여 파악하기 위하여 영재학생들의 반응 결과를 분석하여 다음과 같이 3가지 유형의 분석틀을 마련하였다.

(유형 1) <u>일어난 결과</u>에 기초하여 상금 분배
(유형 2) <u>일어날 상황</u>을 고려하여 상금 분배
(유형 3) <u>일어난 결과와 일어날 상황을 함께 고려</u>하여 상금 분배

1. 집단별 비교를 통한 수학영재들의 사고 특성 및 변화 과정 분석

변형된 상금 분배 문제에서 공정하게 상금을 분배하는 방법은 다양할 것으로 예상했지만 수업 결과, 예상보다 더욱 더 다양하게 나왔다. 뿐만 아니라, 집단별로 확률적인 사고 특성과 재고 및 토론을 통한 사고의 변화 과정이 뚜렷하게 나타났다. 다음의 <표 Ⅳ-1>를 살펴보면 집단별 사고 특성 및 사고의 변화 과정을 잘 알 수 있다.

가. 집단별 사고 특성 및 변화 과정 분석

C집단의 경우 대부분의 학생들이 일어난 결과에만 기초하여 상금을 분배하려고 하였고 재고 및 토론을 거치는 동안 일어날 상황(미래)을 고려하여 상금을 분배하려는 학생들이 조금 늘어났다. 하지만 여전히 일어난 결과에 기초하여 상금을 분배하려는 학생들이 많았는데 결과와 미래의 상황을 모두 고려한 학생은 없었다.

B집단의 경우도 C집단과 마찬가지로 초기에는 일어난 결과에 기초하여 상금을 분배하려는 학생이 많았다. 하지만 재고 및 토론을 거치는 동안 일어날 상황(미래)을 고려하여 상금을 분배하려는 학생이 늘어났으며, 일어난 결과와 일어날 상황을 함께 고려하여 상금을 분배하려는 학생들도 생겨났다. 명확하게 수치화시키지 못하거나 수치화시켰더라도 다른 친구들의 질문에 답하지 못하는 등 확신은 없었지만 C집단과 비교하여 좀 더 발전된 모습을 보였다.

A2집단의 경우는 단 한 명의 학생도 결과에만 기초하여 상금을 분배하는 학생이 없었다. 대부분이 앞으로 일어날 경우의 수까지 고려하여 상금을 분배하였으며, 한 명의 학생은 일어난 결과와 일어날 상황을 모두 함께 고려하여 상금을 분배하려고 하였다. 오히려 재고 및 토론을 거치는 동안 잘못된 생각으로 인하여 일어난 결과에만 기초하여 상금을 분배하려는 학생이 늘어나기는 했지만 보다 많은 학생들이 결과와 미래 상황을 둘 다 고려하여 상금을 분배하는 쪽으로 자신의 생각을 바꾸었다.

A1집단 학생들의 80%가 처음부터 일어날 확률을 이용하여 상금을 분배하려고 했다. 일어날 상황(미래)을 고려하여 상금을 분배하고자 한 학생 12명 중 9명이 이 문제의 상황을 고려하여 사전 조건과 미래에 일어날 경우의 수까지 고려하는 등 높은 수준의 확률적인 사고를 하였다. 그리고 토론이 진행될수록 수업자도 예전에 생각하지 못했던 다양한 확률적 해법이 나타났다. 하지만 사고의 수준에 따라서는 상금을 분배하는 방법에 있어 주어진 조건 이외에도 보다 애매하고 복잡한 여러 가지 다른 조건들을 더 고

려해야 하는 경우가 있어 발표자이외에 다른 학생들이 그것을 이해하는데 어려움을 겪었다. 대표적인 예가 지난 6경기 동안의 승패뿐만 아니라 개인의 득점력과 수비력, 반칙, 건강상태까지도 고려하여 상금을 분배하는 것이 공정하다는 의견이었다. 하지만 이런 경우는 너무나 많은 불확실성이 개입되므로 그런 것은 기존의 승패에도 이미 반영된 것으로 약속하고 가능한한 수학적 이상화에 동의하기로 했다.

전체적으로 볼 때, 공정한 상금 분배에 관하여 다른 사람의 의견을 듣고 자신의 의견을 나누는 토론 수업과 여러 번의 재고(再考)가 진행되는 동안 일어난 결과만 생각하는 학생들보다는 일어날 상황(미래)을 고려하거나 일어난 결과와 일어날 상황(미래)을 함께 고려하는 것이 좀 더 공정하다고 생각하는 학생이 많아졌다. 위에서 제시한 <표 Ⅳ-1>을 보면 처음 상금 분배하는 방법과 다시 생각하고 토론을 거친 후의 상금 분배하는 방법을 비교해 보면 집단별로 차이는 있으나 미래 상황이나 결과와 미래를 함께 고려하는 학생이 증가하였음을 알 수 있다.

나. 반응 결과 유형별 분석

변형된 상금 분배 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 수학영재들의 사고 특성 및 변화 과정을 유형별로 분석한 결과는 다음과 같다.

1) (유형1) 일어난 결과에 기초한 상금 분배

가) **(상금 미 분배)** 5번을 이겨야 되는데 이긴 팀이 없기 때문에 어느 팀에게도 상금을 줄 수 없다.

나) **(무승부)** 5번을 이겨야 되는데 이긴 팀이 없기 때문에 5:5로 상금을 분배한다.

다) **(A팀에게 상금 전액 분배)** 5번을 먼저 이기면 승리하는데 A팀이 더 많이 이겼기 때문에 A팀에게 준다.

라) **(이긴 경기 수 고려 분배)** A팀이 4번 이겼고 B팀이 2번 이겼기 때문에 4:2로 상금을 분배한다. 하지만 20억의 상금을 4 : 2로 분배하기가 어려워 (장면1, 2)와 같이 13 : 7이나 14 : 6, 12 : 8로 분배하는 것이 공정하다는 의견도 나왔다.

(수업 장면 1 - 집단 B)

T : 자, 발표해 봅시다.

B_JW : 일단은 둘 다 못 받을 경우가 있으니까 1억씩 줘요.

T : 일단 1억씩 준다. 왜?

B_JW : 일단 둘 다 못 받을 경우가 있으니까 일단은 기본적으로 1억씩 줘요.

T : 일단은 1억씩 줍니다. 네.

B_JW : 그러면 18억원이 남아요. 그다음 18억을

<표 Ⅳ-1> 확률적인 사고의 변화 과정 집단별 비교

집단	인원	공정한 상금 분배 방법						비고
		개인별 초기 반응			재고 및 집단 토론 후 반응			
		결과만	미래만	결과와미래 모두	결과	미래	결과+미래	
집단 A1	15	1	12(DW, KW,HK)	2	1	8 (DW)	6(KW,HK)	
집단 A2	15	0	14(KH, SH,JK)	1	2	8(SH, JK)	5 (KH)	
집단B	19	15 (YJ)	4 (SJ)	0	7	5 (SJ)	3 (YJ)	
집단C	18	16	2	0	11	6	0	

※ 참고 : ( )안의 이니셜은 개별 관찰대상자임

6으로 나눠요. 왜냐면 6번 경기를 했기 때문에 6으로 나눠요. 그러면 3억원. 이긴 수만큼 여기다 곱해서 그 금액을 팀에게 나눠줘요.

2) (유형 2) 일어날 상황을 고려한 상금 분배

가) **(A팀에게 상금 전액 분배)** 5번을 먼저 이겨야 되는 상황에서 A팀은 한 번만 이기면 되고, B팀은 세 번을 더 이겨야 되기 때문에 A팀이 유리하므로 A팀에게 상금을 다 준다.

나) **(남은 경기 수 고려 분배)** A팀은 한 번만 이기면 되고 B팀은 세 번을 이겨야 되므로 3:1로 상금을 분배한다.

(수업 장면 2 - 집단 B)

B_MH : A팀은 15억, B팀은 5억을 준다. 왜냐하면, A팀은 한 번만 이기면 되고, B팀은 세 번을 이겨야 되기 때문에 20÷4를 하면 5가 되는데 A팀은 1/4만 이기면 되고, B팀은 3/4을 이겨야 되니까 A팀은 15억이 되고, B팀은 5억이 됩니다.

다) **(이길 확률 고려 분배)** A팀은 한 번만 이기면 되므로 50%의 이길 확률을 가지고, B팀은 세 번을 이겨야 되기 때문에 50%×50%×50% 이므로 12.5%의 이길 확률을 가지므로 4:1로 상금을 분배한다. 이 학생의 경우, 진 다음 이기는 경우와 연속하여 두 번 진 다음 이기는 경우까지는 생각하지 못하였으며, 확률 값들의 합이 1이 되어야 하는 확률의 기본 성질을 이해하지 못한 경우라고 할 수 있다.

(수업 장면 3 - 집단 B)

T : SJ가 했던 것 다시 한 번 발표해 봅시다.

B_SJ : A팀은 네 번을 이겼으니까 한 번만 더 이기면 20억을 모두 가져갈 확률은 50%이고...

B_집단의 어떤 학생 : 왜 50%입니까?

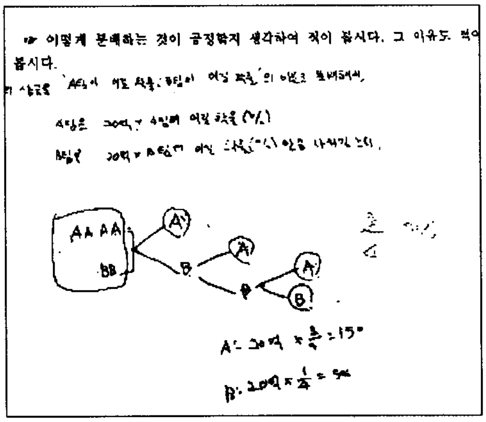
B_SJ : 이기거나 지거나 둘 중에 하나니까.

T : 뭐가?

B_SJ : 다음 경기에서 이길 확률이 50%.

B_SJ : B팀은 세 번을 이겨야 되니까 50%, 25%, 12.5%가 되니까... 50% : 12.5%니까 4:1이 되고 %는 100을 기준으로 하니까 4 : 1은 80 : 20이 되니까 20억을 80 : 20으로 나누면 A팀은 16억을 가져가고, B팀은 4억을 가져가면 됩니다.

라) **(남은 경우의 수 고려 분배)** 앞으로 게임이 끝나기 위해 남은 경우의 수를 구해보면 4가지이다. ① A가 한 번 이기는 경우, ② B가 이기고 A가 이기는 경우, ③ B가 두 번 이기고, A가 이기는 경우, ④ B가 세 번 다 이기는 경우. 이 중 ①②③은 A가 이기는 경우이고, ④는 B가 이기는 경우이다. 따라서 A가 이길 경우는 3가지이고, B가 이길 경우는 1가지이므로 상금을 3:1로 분배한다.



[그림 Ⅳ-1] 남은 경우의 수를 고려한 분배(A2_SH)

남은 경우의 수를 고려하여 상금을 분배한 내용을 정리하면 다음의 <표 Ⅳ-2>와 같다.

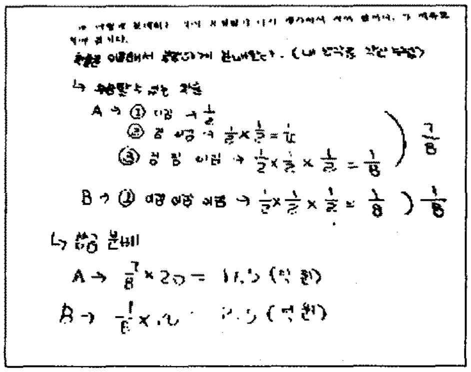
<표 Ⅳ-2> 남은 경우의 수를 고려한 상금 분배 방법

경우의 수	팀	현재상황	7번째 경기	8번째 경기	9번째 경기	최종 결과	경기 결과
1	A	4	승	×	×	5	A팀 승
	B	2	패	×	×	2	
2	A	4	패	승	×	5	A팀 승
	B	2	승	패	×	3	
3	A	4	패	패	승	5	A팀 승
	B	2	승	승	패	4	
4	A	4	패	패	패	4	B팀 승
	B	2	승	승	승	5	

<표 Ⅳ-3> 경우의 수와 이길 확률(1/2로 고정)을 고려한 상금 분배 방법

경우의 수	팀	현재 상황	7번째 경기	8번째 경기	9번째 경기	최종 상황	경기 결과	이길 확률
1	A	4	승(1/2)	×	×	5	A팀승	1/2
	B	2	패(1/2)	×	×	2		
2	A	4	패(1/2)	승(1/2)	×	5	A팀승	1/4
	B	2	승(1/2)	패(1/2)	×	3		
3	A	4	패(1/2)	패(1/2)	승(1/2)	5	A팀승	1/8
	B	2	승(1/2)	승(1/2)	패(1/2)	4		
4	A	4	패(1/2)	패(1/2)	패(1/2)	4	B팀승	1/8
	B	2	승(1/2)	승(1/2)	승(1/2)	5		

마) **(이길 확률 고려 분배)** 두 팀의 실력이 비슷하여 다음 경기에서 이길 확률을 1/2로 고정한다면, A팀이 이길 확률은 다음 경기(7번째 경기)에서 이길 확률 1/2 + 다음 경기(7번째 경기)에서 지더라도 그 다음 경기(8번째 경기)에서 이길 확률 1/2 × 1/2 + 두 경기를 연속해서 지더라도 그 다음 경기(9번째 경기)에서 이길 확률 1/2 × 1/2 × 1/2 을 가지므로 1/2 + 1/2 × 1/2 + 1/2 × 1/2 ×1/2= 7/8이고, B팀이 이길 확률은 세 번을 다 이겨야 되기 때문에 1/2 × 1/2 × 1/2 이므로 1/8의 이길 확률을 가지므로 7:1로 상금을 분배한다.



[그림 Ⅳ-2] 이길 확률을 고려한 상금 분배(A2_YK)

3) (유형 3) 일어난 결과와 일어날 상황을 함께 고려한 상금 분배

이 해법은 영재교육기관의 수준별로 큰 차이가 있었다. C집단의 경우 두 가지 상황을 고려하여 상금을 분배하는 단계까지 나아가지 못하였

다. 집단 B의 경우 결과와 미래의 두 가지 상황을 모두 고려하여 문제를 해결하려 하였으나 어려움을 겪거나 약간의 모순점을 드러내었다. 집단 A2의 경우 다양한 방법으로 결과와 미래 둘 다 고려하여 문제를 해결하는 학생들이 많았다.

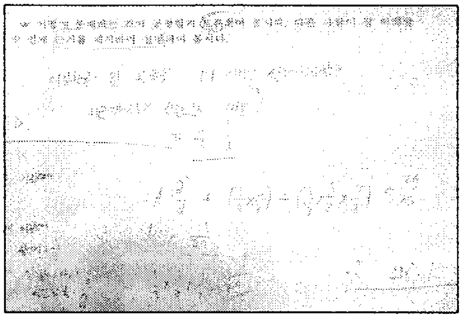
가) **(상금 미 분배)** 일어난 상황(결과)과 남은 상황(미래)을 함께 고려하여 상금을 분배해야 하지만 계산할 수가 없다.

나) **(결과와 미래의 경기 수 고려 분배)** 현재까지 일어난 상황(결과)이 4:2의 상황이고, 남은 상황(미래)은 1:3이므로 7:3으로 분배한다.

(수업 장면 4 - 집단 B)

B_YJ : A팀은 앞으로 경기가 한 번 남았고, B팀은 세 번 남았고. A팀은 두 번 졌고, B팀은 네 번 졌으니까 <u>A팀의 남은 경기수와 진 경기수를 더하면</u> 3이 되고, B팀은 7이 되므로 백분율로 계산하면 14억 대 6억이 됩니다.

다) **(결과를 바탕으로 미래의 확률 고려 분배)** 지금까지 경기 결과를 고려하여 남은 경기에서 A가 이길 확률은 2/3, B가 이길 확률은 1/3로 가정한다면, A가 이길 확률은 2/3 + 1/3*2/3 + 1/3*1/3*2/3 = 26/27이고 B가 이길 확률은 1/3*1/3*1/3=1/27이므로 26:1로 분배한다.

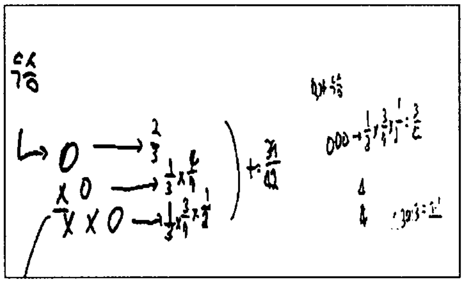


[그림 Ⅳ-3] 결과를 바탕으로 미래 확률 고려(A2_KH)

라) (결과를 바탕으로 미래의 확률 고려 분배) 현재까지 일어난 상황(결과)을 볼 때 다음 경기(7번째 경기)에서 A팀이 이길 확률은 4/6이고 B팀이 이길 확률은 2/6이다. 7번째 경기에서 B팀이 이겼을 경우 8번째 경기에서 A팀이 이길 확률은 4/7이고 B팀이 이길 확률은 3/7이다. 8번째 경기에서도 B팀이 이겼을 경우 9번째 경기에서 A팀이 이길 확률은 4/8이고, B팀이 이길 확률도 4/8이 된다. 따라서 A팀이 우승할 확률은 4/6 + 2/6*4/7 + 2/6*3/7*4/8 = 28/42 + 8/42 + 3/42 = 39/42 = 13/14이고, B가 우승할 확률은 세 경기를 다 이길 확률 2/6 × 3/7 × 4/8 = 1/14 이다. 따라서 A팀과 B팀의 상금은 13:1로 분배한다.

<표 Ⅳ-4> A팀이 이길 확률 2/3, B팀이 이길 확률 1/3으로 고정하여 상금 분배 방법

경우의 수	팀	현재 상황	7번째 경기	8번째 경기	9번째 경기	최종 상황	경기 결과	이길 확률
1	A	4	승(2/3)	×	×	5	A팀 승	2/3
	B	2	패	×	×	2		
2	A	4	패(1/3)	승(2/3)	×	5	A팀 승	2/9
	B	2	승	패	×	3		
3	A	4	패(1/3)	패(1/3)	승(2/3)	5	A팀 승	2/27
	B	2	승	승	패	4		
4	A	4	패	패	패	4	B팀 승	1/27
	B	2	승(1/3)	승(1/3)	승(1/3)	5		



[그림 Ⅳ-4] 결과를 바탕으로 미래의 확률 분배(Y2_KH)

마) (결과를 바탕으로 남은 경기 수 고려하여 상금 분배) 현재까지 일어난 상황(결과)만을 가지고 다음 경기(7번째 경기)에서 A팀이 이길 확률은 4/6이고 B팀이 이길 확률은 2/6이라고 할 수가 없다. A팀과 B팀의 득점율을 따져서 3α(α는 A팀의 득점율)가 β(β는 B팀의 득점율)보다 같거나 작으면 B팀에게 상금을 모두 주고, 3α가 β크면 A팀에게 20억의 상금을 모두 준다.

2. 개인별 사례를 통한 수학영재들의 사고 특성 및 변화 과정 분석

변형된 상금 분배 과제를 해결하는 과정에서 나타나는 집중 관찰 대상자들의 확률적 사고의 변화과정을 분석한 결과 다음과 같은 특징을 찾아볼 수 있었다.

가. B집단 소속 학생의 사고 특성 및 사고의 변화 과정 분석

B_YJ는 확률비교 과제의 해결과정에서 나타나는 B집단 수준의 사고 변화 과정을 가장 잘 대변해 주는 경우였다. B_YJ는 공정한 상금 분배 문제를 사전에 알지 못하였고 처음에는 일어날 결과에 기초하여 상금을 2:1로 분배하는 것이 공정하다고 생각하였다. 하지만 토론과 재고(再考) 과정에서 남은 상황을 고려하여 상금을 3:1로 분배하려고 하였으며 최종적으로는 일어난 결과와 일어날 상황(미래)를 함께 고려하여 상금을 14:6로 분배하는 것이 공정하다고 생각하였다.

(개별관찰 상황 1 - 개인 B_YJ)
B_YJ : A팀이 네 번 승리하고, B팀이 두 번 승리했는데, 실력을 따져봤을 때 A팀이 더 우세하지 않을까요?

(개별관찰 상황 2 - 개인 B_YJ)
B_YJ : A팀은 앞으로 경기가 한 번 남았고, B팀은 세 번 남았고. A팀은 두 번 졌고, B팀은 네 번 졌으니까 A팀의 남은 경기수와 진 경기수를 더하면 3이 되고, B팀은 7이 되므로 백분율로 계산하면 14억 대 6억이 됩니다.

나. A2집단 소속 학생의 사고 변화 과정 분석

대학부설 과학영재교육원 기초반에 속한 세 명의 학생 중 A2_KH는 공정한 상금 분배 문제를 사전에 알지 못하였고 처음에는 일어날 상

<표 Ⅳ-5> 경우의 수와 이길 확률(결과에 따라 변동)을 고려한 상금 분배 방법

경우의 수	팀	현재 상황	7번째 경기	8번째 경기	9번째 경기	최종 상황	경기 결과	이길 확률
1	A	4	승(4/6)	×	×	5	A팀 승	4/6
	B	2	패	×	×	2		
2	A	4	패(2/6)	승(4/7)	×	5	A팀 승	8/42
	B	2	승	패	×	3		
3	A	4	패(2/6)	패(3/7)	승(4/8)	5	A팀 승	1/14
	B	2	승	승	패	4		
4	A	4	패	패	패	4	B팀 승	1/14
	B	2	승(2/6)	승(3/7)	승(4/8)	5		

황(미래)의 경우의 수를 고려하여 상금을 3:1로 분배하는 것이 공정하다고 생각하였다. A2_SY의 다음 경기에서 이길 확률을 1/2로 정하여 4:1로 배분하는 것이 좋겠다는 내용과 A2_BS의 다음 경기에서 이길 확률을 지금까지의 경기 결과에 비추어 A팀이 이길 확률은 2/3, B팀이 이길 확률은 1/3으로 정하여 26:1로 상금을 분배하는 것이 좋겠다는 발표를 듣고 자신의 생각을 재빨리 변화시켜 나갔다.

또한 연구자와의 대화에서 연구자의 발문을 귀담아 듣고 자신의 사고를 변화시켜 나가는 모습을 보여 줬다. 이전 경기의 결과를 다음 경기에서 이길 확률로 정할 경우에는 매 경기마다 진행될 때마다 이길 확률이 바뀐다는 것을 깨달아 상금을 13:1로 분배하는 것이 공정하다고 생각하였다.

(개별 관찰 상황 3 - A2_KH)
(경기 결과에 비추어 다음 경기에서 A팀이 이길 확률을 2/3로 정하여 26:1로 상금을 분배하는 것이 공정하다고 생각하고 있는 중에...)
T : 2/3는 왜 나왔니?
A2_KH : 지금까지 경기에서 A팀이 6번 중 4번을 이겼으니까 다음 경기에서 이길 확률이 2/3에요.
T : 아... 그렇구나.
(잠시 후)
T : 그런데 2/3는 항상 2/3인거야?
A2_KH : 아!
(이 발문을 듣고 A2_KH는 이길 확률이 매 순간 변할 수 있다고 생각하고 다시 계산하여 최종적으로 상금을 13:1로 배분하는 것이 공정하다고 생각함)

A2_KH는 성격이 활달하고 수업에 적극적으로 참여하며 자신의 생각을 수학적으로 조리있게 잘 표현한다. A2_KH 역시 자기 혼자서 고민을 했다면 아마도 일어날 경우의 수를 고려하여 3:1로 상금을 분배하는 것에서 벗어나지 못했을 것이다. 하지만 A2_KH는 토론 및 재고(再考)과정을 거치면서 다른 친구들의 의견과 집중 관찰 연구자의 발문을 귀담아 듣고 자신의 확률적인 사고를 변화시켜 나가기 위해 노력한 결과 높은 수준의 사고를 보여줬다.

다. A1 집단 소속 학생의 사고 특성 및 사고의 변화 과정 분석

대학부설 과학영재교육원 심화반인 A1 집단의 집중 관찰 대상 학생인 A1_DW와 A1_KW, A1_HK는 모두 처음부터 높은 수준의 확률적

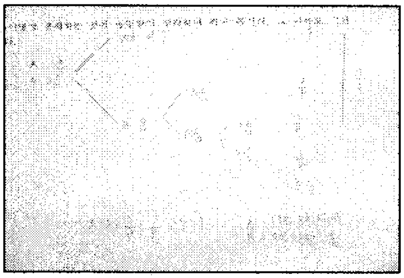
<표 Ⅳ-6> 개인별 확률적 사고 변화 과정 비교

집단	아이디	* 유사 문제풀이 경험	공정한 상금 분배 방법						비고
			처음			재고 및 토론 후			
			결과	미래	결과 + 미래	결과	미래	결과 + 미래	
집단 A1	A1_DW	3		7:1			7:1		
	A1_KW	3		7:1				13:1	
	A1_HK	3		7:1				13:1	
집단 A2	A2_KH	1		3:1				13:1	
	A2_SH	3		3:1			3:1		
	A2_JK	2		3:1			3:1		
집단 B	B_YJ	1	2:1					14:6	
	B_SJ	2		4:1			4:1		

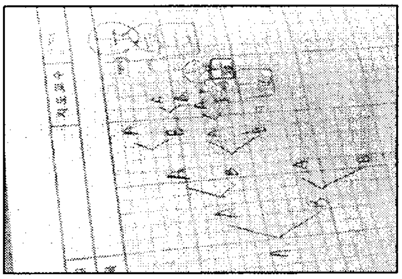
* 유사한 문제를 풀어본 적이 있나요?
1.없다 2.들어본 적 있다 3.유사한 문제를 풀어본 적이 있다 4.기타

사고를 하였다. 그러다 보니 토론 수업이 진행되는 동안 좀 더 다양한 형태로 문제를 해결하려 하였으나 정형화되지 못하고 친구들을 설득시키기가 힘들어지자 남은 상황만을 고려한 7:1로 분배하거나 일어난 상황(결과)과 남은 상황을 함께 고려하여 13:1로 상금을 분배하는 것이 공정할 것이라고 하였다.

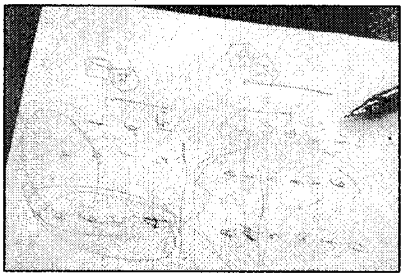
A1_DW의 경우만 살펴보면 변형된 상금 분배 문제의 사고 과정이 가장 잘 드러났다. A1_DW는 처음부터 경우의 수의 확률을 이용하여 7:1로 상금을 분배하는 것이 공정할 것 같다고 최고 수준의 사고를 하였다. 다른 집단의 학생들은 재고 및 토론 과정을 거친 후에도 몇몇 학생들만이 생각할 수 있었던 높은 수준



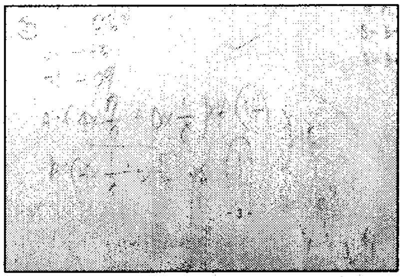
① 경우의 수의 확률을 이용하여 7:1로 분배하는 것이 공정할 것으로 생각함



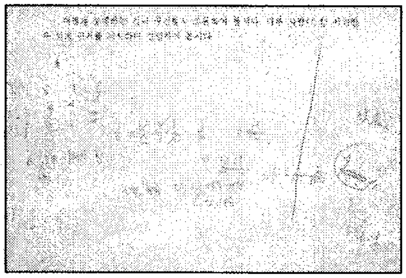
② 6경기가 진행되는 동안 A팀과 B팀이 전적이 4: 2가 되는 경우의 수를 구하여 문제를 해결해 보고자 함.



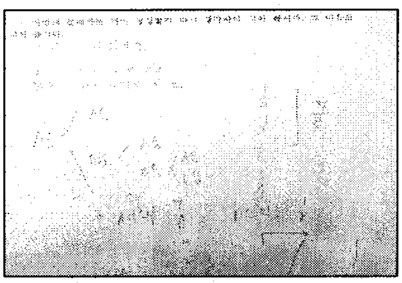
③ 6경기를 하는 동안 A팀이 4번 이상 이길 경우와 B팀이 2번 이상 이길 경우의 수를 구하여 문제를 해결해 보고자 함.



④ 전적(4:2)과 이길 확률(7:1)을 이용하여 14:1로 상금을 분배하는 것이 공정할 것 같다는 새로운 의견을 제시함.



⑤ 전적(4:2)과 이길 확률(7:1)을 잘 조합하여 상금을 분배하는 것이 좋을 것 같다고 생각하였으며 A6_YK이 발표한 13:1과 자신이 생각한 7: 1 둘 다 상황에 따라 좋은 방법이라고 생각함



⑥ 최종적으로 다시 생각해 보게 한 후 한 가지만 선택하라고 했을 경우 7: 1로 선택함.

[그림 Ⅳ-5] A1_DW의 확률적 사고의 변화 과정

의 사고를 처음부터 해내는 우수한 사고 수준을 보여 주었다. 하지만 A1_DW는 자신의 처음 생각에 머무르지 않고 더 좋은 상금 분배 방법을 찾기 위하여 다양하게 사고하였는데 [그림 IV-5]는 이 학생 사고의 변화 과정을 보여준다.

V. 결 론

변형된 상금 분배 문제를 해결하는 동안 나타나는 수학영재들의 사고 특성 및 변화과정을 분석한 결과 학생들은 자신이 소속한 집단별로 공통점과 차이점이 나타났으며, 개별적으로도 문제 해결 과정이나 확률적 사고 수준에 있어 그 특성이 뚜렷하였다. 수업과 개별 학생의 관찰에서 다음과 같은 점을 확인하였다.

첫째, 초등수학영재들이 변형된 상금 분배 문제 해결과정에서 보여주는 사고의 유형은 집단의 수준별로 차이가 뚜렷하였다.

변형된 상금 분배 문제를 해결함에 있어서 영재학급 학생들의 경우 대부분이 결과에 기초하여 상금을 분배하려 하였고 토론을 거친 후에도 많은 학생들이 결과에 기초하여 상금을 분배하려는 생각에 머물렀다. 교육청부설과학영재교육원 학생들의 경우 처음에는 결과에 기초하여 상금을 분배하려는 학생이 많았으나 점차 일어날 상황까지 고려하는 학생과 일어날 상황과 일어난 결과를 모두 고려하여 상금을 분배하는 학생이 늘어났다. 반면, 대학부설과학영재교육원 학생들의 경우에는 처음부터 결과에 기초하여 상금을 분배하려는 학생은 거의 없고 일어날 상황을 고려하여 상금을 분배하려는 학생이 대부분이어서 집단별로 사고 유형의 수준 차이를 알 수 있었다.

둘째, 변형된 상금 분배 문제는 전통적인 파스칼과 페르마의 원문제에 대한 예상 반응보다 다양한 사고유형이 드러났다.

선행연구에서 원문제는 6가지의 해법을 예상하고 있으나 변형된 문제는 3가지 유형의 10가지 해법을 도출하였다. 변형된 상금 분배 문제는 수학영재집단의 수준별로 다양한 차이를 드러내어 주는 의미 있는 과제였다.

셋째, 자신의 풀이에 대한 재고와 토론의 수업은 학생들의 사고에 대한 반성을 유도하며 보다 높은 수준으로의 사고의 변화를 유도하는 방법이었다.

이 방법을 통해 처음에는 결과에 기초하여 상금을 분배하려던 학생들도 앞으로 일어날 상황까지 고려하여 상금을 분배하려는 고등 수준의 확률적인 사고로 변화를 보였고, 경우의 수를 바탕으로 상금을 분배하려는 학생들도 확률을 고려하여 상금을 분배하려는 높은 수준의 사고로의 변화를 보였다. 이는 재고와 토론식 수업을 통한 자기 사고의 반성이 가져온 효과이다.

넷째, 변형된 상금 분배의 해법에서 상위 집단일수록 앞으로 일어날 결과와 일어날 상황까지 함께 고려하여 상금을 분배하는 방법을 제시하고 있다 하지만 최고 수준에 속한 집단의 학생들이라도 이것이 일어날 상황만을 고려하여 상금을 분배하는 것보다 우수한 생각이라고 단언할 수는 없었다.

이전 경기의 결과를 다음 경기에서 이길 확률로 정하는 부분에 있어서는 각각의 경기는 독립적이기 때문에 영향을 주지 않는다는 의견과 이전의 경기 결과는 그 팀의 본질적인 실력을 말해주는 것이므로 앞으로 일어날 경기의 결과에도 반영해 주어야 된다는 의견이 토론의 과정에서도 팽팽하게 대립하였다. 일어날 상황만을 고려하여 상금을 분배하려는 생각보다는 일어난 결과와 일어날 상황을 함께 고려하는 것이 더 복잡하고, 대학부설 심화반 학생들의

대부분도 이 후자를 선택했다. 본 연구자들도 연구의 설계 과정에서 후자를 더 나은 수준의 사고라고 생각하였다. 그러나 심화반 학생들조차도 실제로 토론 수업이 진행되는 동안 어느 한 쪽이 더 우수한 사고라고 단언하여 말하지는 못할 정도로 다양한 토론이 이루어졌다.

참고문헌

고성은 외(2001). **중학교 수학 8-나 교사용지도서.** 서울: (주)블랙박스.

교육인적자원부(2006). **수학 6-나.** 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정.** 서울: 대한교과서주식회사.

구본장 (1999). **초등학교 확률개념 지도에 관한 연구.** 석사학위 논문, 인천교육대학교.

김우현(2009). **변형된 상금 분배 문제의 해결 과정에 나타나는 초등 수학영재들의 사고 특성 분석.** 석사학위 논문, 경인교육대학교.

김지원(2002). **한 수학 영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구.** 석사학위 논문, 경인교육대학교.

나귀수 · 이경호 · 한대희 · 송상헌(2007). 수학 영재 학생들의 조건부 확률 문제해결 방법. **학교수학, 9**(3), 397-408. 대한수학교육학회.

안미정(2005). **초등학교 3학년 확률 프로그램 개발과 적용에 관한 사례 연구.** 석사학위 논문, 청주교육대학교.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초** (제2증보판). 서울: 서울대학교출판부.

이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구.** 박사학위 논문, 서울대학교.

이소연(2001). **초등학교 확률 학습 프로그램 개발과 적용에 관한 사례 연구.** 석사학위 논문, 한국교원대학교.

이은희(2007). **일반 학생과 영재 학생의 확률적 사고 특성 분석.** 석사학위 논문, 청주교육대학교.

이정연(2005). **조건부확률 개념의 이해에 관한 연구.** 석사학위 논문, 서울대학교.

임재훈(2008). 확률적 사고에 대한 고찰: 무작위성, 조건부 확률, 독립에 대하여. **과학교육논총, 21**(1), 65-80. 경인교육대학교 과학교육연구소.

최병훈(2007). **초등학교 5학년 수학영재와 일반아의 확률 판단 비교.** 석사학위 논문, 한국교원대학교.

Jones, G. A., Langrall, C. W. Thornton, C. A. & Mogill, A. T.(1997). A Framework for Assessing and Nurturing Young Children's Thinking in Probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W. Thornton, C. A. & Mogill, A. T.(1999). Students' Probabilistic Thinking in Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(5), 487-521.

Jones, G. A. (2005). *Exploring Probability In School(Challenges For Teaching And Learning)*. Springer.

Tarr, J. E., & Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 39-59.

Analysis on the Thinking Characteristics of the Mathematically Gifted Students in Modified Prize-Sharing Problem Solving Process

Kim, Woo Hyun (Baeksa Elementary School)
Song, Sang Hun (GINUE/Ajou University)

The purpose of this study was to examine the thinking characteristics of mathematically gifted elementary school students in the process of modified prize-sharing problem solving and each student's thinking changes in the middle of discussion.

To determine the relevance of the research task, 19 sixth graders enrolled in a local joint gifted class received instruction, and then 49 students took lessons. Out of them, 19 students attended a gifted education institution affiliated to local educational authorities, and 15 were in their fourth to sixth grades at a beginner's class in a science gifted education center affiliated to a university. 15 were in their fifth and sixth grades at an enrichment class in the same center. Two or three students who seemed to be highly attentive and express themselves clearly were selected from each group. Their behavioral and learning characteristics were checked, and then an intensive observational case study was conducted with the help of an assistant researcher by videotaping their classes and having an interview.

As a result of analyzing their thinking in the course of solving the modified prize-sharing problem, there were common denominators and differences among the student groups investigated, and each student was very distinctive in terms of problem-solving process and thinking level as well.

* key words : mathematically gifted students(수학영재), prize-sharing problem(상금분배문제), problem solving(문제해결), thinking characteristics(사고특성)

논문접수 : 2009. 4. 30
논문수정 : 2009. 6. 4
심사완료 : 2009. 6. 12