대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 281-299. Jun. 2009

동적조작 환경이 융합된 수학교과과정에서의 교수-학습 과제 사례 분석과 교사의 역할1)

홍 성 관*

본 논문에서는 동적조작 환경 속에서 이루어지는 물리적 실험을 도구로 선택하여 발명되고 있는 과정으로서의 수학을 학생들이 접할 수 있도록 1) 정의 도입 방식을 변화시켜 의미 있는 수학적 정의를 만들어내는 2) 시각화를 통한 연속성 사고 능력을 강화하는 3) 발견과 탐구를 통하여 수학을 만들어내는 4) 문제를 제기하고 일반화하는 능력을 강화하는 사례들을 제시하고 분석함으로써 수학교과과정에 어떻게 동적조작 환경을 융합시킬 수 있는가를 보였다.

이러한 교수-학습 환경 하에서 발생할 수 있는 문제점을 분석하고, 이러한 문제점을 해결하기 위한 교사의 역할에 대해 논하였다.

I. 서 론

모든 수학을 하는 사람은 현상을 수학적으로 해석, 조직하여 현상에 내재된 본질을 파악하고, 예언하고 표현하며 새로운 개념을 창조해낸다. 수학은 개념과 절차의 수동적 숙달과는 매우 다른 창조적이고 능동적인 과정이다.

그러면 수학자는 어떻게 수학을 하는가? 다음의 인용문은 시사하는 바가 크다.

> 연구 중인 수학자는 불분명한 추측을 하고, 폭넓은 일반화를 마음에 떠올리며, 보장되지 않은 결론을 내리기도 한다. 그는 자신의 아이디어를 이리저리 배열해보다가 마침내 그것들이 참이라는 확신에 도달하게 되는데, 이는 자신이 논리적 증명을 해내기 훨씬 이전에 일어나는 일이다. 이러한 확신은 초기에 생기는 것 같지는 않다. 이것은 보통 수많은 시도, 수많은 실패와 좌절, 수많은 잘못된 출발점을 거치고 난 후에 찾아온다. 이 과정에서 실험적 작업 즉, 사고 실험이 필요하게 된다. (Halmos, 1984, p.23)

즉, 수학자는 알려지지 않은-본인에게든 세상에게든-새로운 사실을, 경험한 현상의 재해석, 직관과 추측, 시행착오, 가설과 조사, 그리고 측정과 분류와 같은 구체적이고 결론이 불확실한 조작 활동을 통하여 발견해내고 확신하게 되며, 논리적 증명은 이 확신의 토대 위에 이루어진다. 다시 말해 발견이 우선이고 그 다음이 증명을 위한 단계가 따라와야 한다.

수학을 왜 가르쳐야 하는가? 자연 환경이나 인문 환경에 담긴 수학적 현상의 원리와 질서를 파악할 수 있는 안목을 길러주고 자신의 내면에서 제기되거나 외부에서 제기된 문제에 대한 창의적 해결 능력을 배양시켜 주고자 하는 것이 수학교육의 궁극적 목적일 것이다.

그런 목적을 달성하기 위해서는 학생들이 수학자가 수학을 하는 사유의 양식에 익숙해질

* 부산대학교(aromhong@hanafos.com)
1) 본 논문은 부산대학교 자유과제 학술연구비(2년)에 의하여 연구되었음.

수 있도록 교육과정이 구성되어야 한다.

Polya(1957)의 다음 인용문에서 언급된 바와 같이 수학은 두 가지 면모를 지니고 있다.

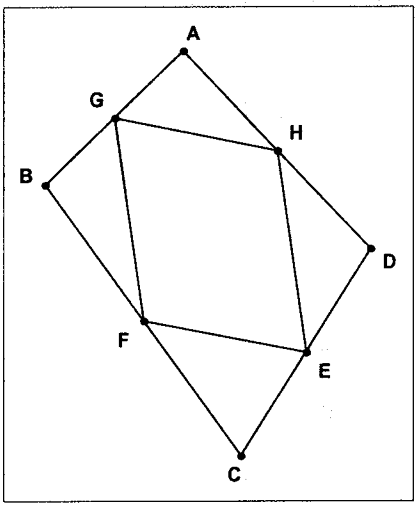
> 수학은 두 얼굴을 갖는다. 수학은 유클리드식의 엄밀한 과학이지만, 동시에 그와 다른 무엇이기도 하다. 유클리드식으로 제시된 수학은 체계적이고 연역적인 과학으로 보인다. … 그러나 구성 도중에 있는 수학은 실험적이고 귀납적인 과학으로 보인다. … 두 번째의 측면은 어떤 관점에서 본다면, 새로운 것이다. 발명되고 있는 과정에 있는 수학이 바로 그 방식 그대로 학생 또는 교사에게 제시된 적이 없다.(p. 6)

현재의 지필형 교육과정은 전자와 같은 체계적이고 연역적인 방식으로 제시되는 수학에 편중되어 있다. 실험적이고 귀납적인, 즉 발명되고 있는 과정으로서의 수학은 학생들이 접할 기회가 별로 없다. 그러나 창의적인 사고는 타인에 의해 완성된 개념을 이해하고 그를 문제해결에 이용하는 과정 속에서 배양되는 것보다는 자신이 실험과 귀납적 사고를 통하여 새로운 수학을 만들어가는 과정 속에서 배양될 가능성이 더 크다.

현실의 수학 수업은 이미 완성된 수학을 수용하는 방식에 편중되어 있으나, 바람직한 것은 학습자 스스로가 능동적으로 수학적 개념을 만들고 지식을 구성해가는 방식이라 말할 수 있다.

다음의 두 가지 문제를 비교해보자. 전통적인 기하학 교재에는 대부분 다음과 같은 문제가 실려 있다.

> [그림 I-1]에 임의의 사각형 *ABCD* 가 주어져 있다. 각 변의 중점을 *E*, *F*, *G*, *H*라고 할 때, 사각형 *EFGH*는 평행사변형임을 증명하라. (김호우 · 박교식 · 신준국 · 정은실 (2000a), p.258; 김연식 · 김흥기(1998), p.283)



[그림 I-1]. 각 변의 중점을 연결하여 생긴 사각형

위의 문제는 학생들에게 정확하게 그들이 무엇을 증명해야할 지를 말해준다. 그러나 그 증명에 앞서 사각형 *EFGH*가 평행사변형이라는 사실이 먼저 발견되어야 한다. 이 문제에서 그림을 보고 발견되는 사실에 대한 가정을 세우라고 요구할 수도 있겠지만, 전통적 기하 학습관은 학습자가 단 한 개의 정적인 그림에 의해서 제공되는 제한된 증거에 근거를 둔 가설을 세우지 않는 것을 원칙으로 하고 있다.

그러나 동적조작을 도입했을 경우 위의 문제는 다음과 같은 식으로 제시될 수 있다

> [그림 I-1]에 임의의 사각형 *ABCD*가 주어져 있다. 각 변의 중점을 잡아 *E*, *F*, *G*, *H*라고 이름을 붙이고 그들을 연결하여 사각형 *EFGH*를 작도하라. 사각형 *ABCD*의 각 꼭짓점의 위치를 마우스로 끌어 변화시킬 때, 사각형 *EFGH*의 모양에 관해 당신은 무엇이라고 말할 수 있는가? 그러한 당신의 주장에 대하여 타당성을 주장할 수 있는가? (Scher(2000), pp.6-8)

동적조작을 도입하였을 경우 학습자들은 더 이상 단 하나의 교재에 제시된 그림에-정확하

게 그려졌거나 그렇지 않거나에 관계없이-제한 되지 않는다. 예를 들어, 학습자들은 GSP 도구를 사용하여 [그림 I-1]의 상호작용적 동적모형을 작도할 수 있고, 사각형 *ABCD*의 꼭짓점의 위치를 자유롭게 변화시킬 수 있다. 이런 엄밀하고 매우 정교한 예들을 풍부하게 관찰하는 가운데 시각적인 증거를 발견하고 스스로 가설을 세울 수 있다. 즉 동적조작을 허용하는 환경에서 수집된 시각적 자료의 총체적 양은 학습자들에게 그것이 나중에 공식적인 증명을 통하여 증명되거나 또는 거부될 가설을 만드는 것을 허용한다.

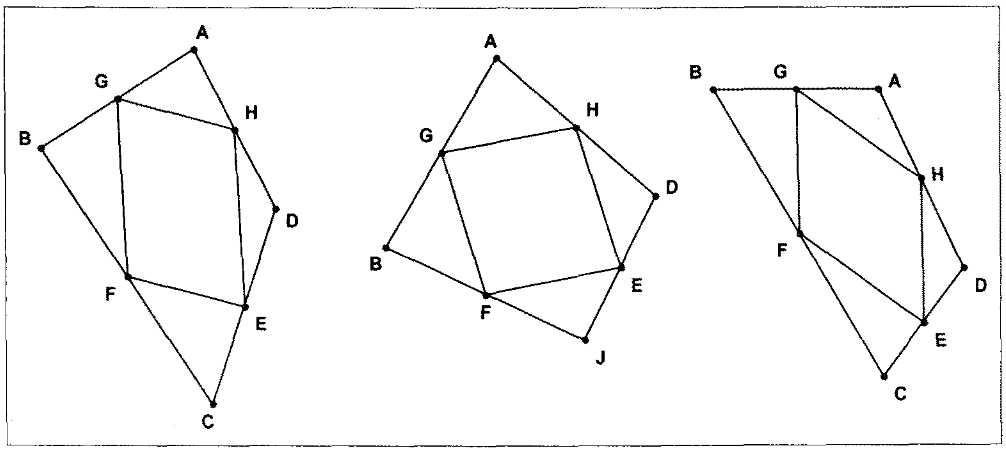
무수히 많은 예들 중 세 개를 [그림 I-2]에 나열하였는데, 각각의 경우에서 (사실은 모든 경우에서) 사각형 *ABCD*의 중점을 이어 만들어진 사각형의 모양은 시각적으로 평행사변형과 흡사함을 알 수 있다. 동적모형의 수많은 변형에도 불구하고 중점사각형은 시각적으로 항상 평행사변형과 유사하다는 것은 평행사변형이 되리라는 가설에 긍정적인 확신을 갖게 하고 이러한 확신이 논리적 증명을 위한 노력으로 나타난다.

또한 동적조작이 융합된 교육과정 속에서의 증명의 역할과 의미는 종래의 관점과는 상당한 변화가 생길 수밖에 없다. 권석일(2006)은

> 역사 발생적 관점에서 Branford는 증명을 실험적 증명, 직관적 증명, 학문적(수학적) 증명의 세 가지 종류로 구분하고, 수학의 역사적 발전 과정에 비추어 볼 때, 증명의 학습도 이러한 과정을 거치는 것이 자연스럽다고 주장한다(p.128에서 재인용).

고 말하고 있다. 동적조작이 허용된 교육과정 속에서는 실제로 수많은 실험적인 조작 활동을 통하여 무엇이 그러한 가설을 성립하게 하는가에 대한 실험적 증명이나 직관적 증명이 가능하다. 위의 문제에서 [그림 I-1]의 동적모형을 [그림 I-2]와 같이 여러 가지로 변형시켰을 때 생기는 시각적 증거들은 선분 *EF*, 선분 *BD*, 선분 *GH*가 서로 평행이고, 또 선분 *FG*, 선분 *AC*, 선분 *EH*가 서로 평행임을 암시하고 있고 이 시각적 증거가 연역적 증명으로 이끌게 된다.

그러나 현재의 지필형 교육과정 속에서는 이러한 실험적 증명이나 직관적 증명을 위한 도구가 부족하기 때문에 도입이 용이한 연역적인 학문적 증명만을 강조하게 된다. 이는 수학에 대한 흥미를 감소시키고 오히려 수학을 만드는



[그림 I-2] 동적모형의 스냅 사진

능력의 저하를 불러온다.

이러한 탐구와 발견에 기초한 수학교과과정은 전통적 수학교과과정보다 더 수학이 만들어지는 방식에 부합되는데 동적조작 환경은 이러한 탐구와 발견을 고양하는 좋은 도구이므로 교육과정 속에 융합될 필요가 있으며 어떠한 방식으로 융합되어야 하는가에 대한 연구가 필요하다.

본 논문에서는 발명되고 있는 과정으로서의 수학을, 사고실험과 더불어 동적조작 환경 속에서 이루어지는 물리적 실험을 도구로 선택하여 교과과정 속에 융합시킬 수 있는 교수-학습 과제의 사례들을 제시하고 이를 적용했을 때의 문제점을 파악하며, 이러한 교육 환경 속에서 교사의 역할이 어떻게 변해야 하는가를 밝히려고 한다.

II. 이론적 배경

1. 구성주의적 교수-학습관

의미 있는 수학 학습은, 무엇인가 원활히 작동되지 않거나 무엇인가가 예상되지 않는 혼란과 자각을 다루는 기존의 인식 구조를 조정함으로써 학습자 자신이 만들어내는 반영적 추상화로부터 기인한다.

수학의 이해는 추상화에 더하여, 경험, 행위, 정신의 이행 과정을 표출하고, 그 결과 혹은 그것들이 어떻게 구성되는가를 사유하는 의식적인 과정인 반영화를 필요로 한다. (Glaserfeld, 1995).

수학적 개념화 및 그와 연관된 정신 모델은 그 자신의 정신적 행위에 관한 반영과 추상화로부터 나오므로, 수학의 교수-학습은 학생의 관심을, 현상의 수학화에 관한 적절한 개념화와 추론에 필요한 정신적 조작에 대한 반영과 추상화를 지원하는 방식으로 그 현상에 집중시켜야만 한다.

Battista(1998)가 동적조작 도구 중 하나인 모양 제작자(shape maker)를 가지고 10-11세의 초등학생을 대상으로 행한 실험을 살펴보면 이러한 반영과 추상화가 어떻게 이루어지는지를 알 수 있다. 마름모꼴 제작자(rhombus maker)로 네 변의 길이가 같지 않은 평행사변형을 만들려고 시도하는 학습자가 여러 번의 시도에도 불구하고 만들 수 없다는 현실에 접하게 되면 그는 자신의 마름모꼴 제작자에 대한 정신 모델을 재평가하게 되고, 마름모꼴 변의 길이를 조작함으로써 모든 변은 합동이라는 규칙을 추론해내게 된다. 마름모꼴 제작자에 대한 정신 모형에 이 추상화를 투입함으로써 마름모꼴 제작자로는 네 변의 길이가 다른 평행사변형을 만들 수 없다는 추론을 가능하게 한다.

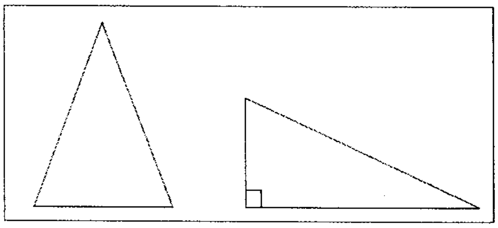
이와 같이 그 자신의 정신적 행위에 대한 반영과 추상화를 통한 정신 모델을 육성하기 위해서는 학습자 자신이 조작과 구성이라는 활동을 통하여 스스로 지식을 구성해나가야 한다. (우정호, 2000)

반영과 추상화를 촉발하고 정신모델을 육성할 수 있는 효과적인 방안은, 동적조작을 이용한 실험을 통한 탐구와 발견을 장려하고, 학습자들로 하여금 행동하기 전에 예측하도록 하는 것인데, 그럼으로써 자신의 이론이라는 맥락 속에서 자신의 행위를 반추하도록 학습자들을 장려하게 된다.

2. 원형현상(Prototype Phenomenon)

정적인 지필 기하학에서 행해진 연구에 따르면, 학습자들이 기하학적 도형을 파악해낼 때

어떤 경향이 있다. 종이 위에 여러 가지 삼각형을 제시했을 때, 학습자들은 이등변삼각형의 밑변이 수평으로 놓여 있을 때 이등변삼각형임을 쉽게 인식했고, 이와 유사하게 직각삼각형의 한 변이 종이의 밑변과 평행이고 직각을 낀 다른 한 변이 수직일 때 직각삼각형임을 가장 쉽게 인식한다는 것이다(Clements & Battista, 1992). ([그림 II-1])



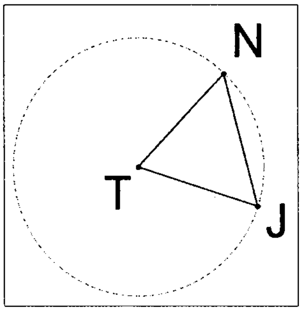
[그림 II-1]. 전형적인 위치에 놓인 두 삼각형

Hasegawa(1997)는 이러한 발견을 원형 현상(prototype phenomenon)이라 명명했다. 학습자들은 일상의 경험과 학습을 통하여 기하학적 도형의 전형적인 심적 영상을 발달시키는데, 종종 그것이 완벽한 것이 아닌 경우도 있다. 대부분의 교재에 있는 비슷한 유형의 정적인 이등변삼각형 그림이 학습자들로 하여금 이등변삼각형의 밑변은 항상 수평인 것으로 생각하게 하는 과도한 일반화 또는 가정의 원인이 된다.

본 논문에서 다루고 있는 동적조작 환경에서는 모든 도형이 연속적이고 유연한 방식으로 변화하므로 전형적 모양이나 위치는 존재하지 않는다. 직관적 수준에서, 동적조작의 행동 양식은 정적 영상의 한 개체에서 관찰된 성질을 과도하게 일반화시키는 위험을 줄여줄 수 있다.

3. Vygotsky의 근접발달영역 이론

우리나라에서 Vygotsky의 이론을 적용한 수학학습지도방안은 초등학생을 대상으로 이루어진 권성룡(2001)과 중학생을 대상으로 한 김성경 · 이동원(2005)의 연구를 들 수 있으나 고등학생을 대상으로 한 연구는 아직 찾기가 힘든 실정이다.



[그림 II-2]

이등변삼각형에 대한 정신모델을 육성하기 위하여 학습자들에게 [그림 II-2]에서 점선으로 표시된 원을 제거한 삼각형 TNJ을 제시했을 때, 동적조작이 이루어져도 항상 $TN=TJ$임을 시각적으로 인식하기는 쉽지 않다. 그러나 [그림 II-2]와 같이 숨겨진 원을 점선으로 표시해 주면 선분 TN과 TJ가 반지름임을 시각적으로 확인하게 되고 $TN=TJ$가 항상 성립함을 인식하게 되므로 주어진 삼각형 TNJ가 이등변삼각형의 동적모형임을 알게 된다. 여기에서 숨겨진 원은 일종의 비계(scaffolder)라고 말할 수 있는데 특히 동적조작이 융합된 수학과 교수-학습의 경우 적절한 비계설정(scaffolding)[2]은 대단히 중요하다. 교사는 학습자에게 새로운 과제가 주어졌을 때, 이 과제가 학습자의 근접발달영역(zone of proximal development)[3] 내에 속

2) 비계설정은 사전적 의미로는 건물의 지지대를 세우는 것이며 학습자의 이해를 돕기 위한 지지대를 세우는 것이다.

하는가를 판단하여 잠재적 발달수준에 가까울 때는 많은 비계를 설정하고, 실제적 발달 수준에 가까울 때는 비계를 줄여야 한다.

비계설정을 통한 학습은 중학생의 수학 성취도와 태도에 긍정적인 변화를 줄 수 있다는 연구 결과를(김성경 · 이동원, 2005) 보면, 동적조작이 융합된 수학 교수-학습에서도 비계설정을 통한 학습이 학습자의 수학 성취도와 태도에 긍정적인 변화를 줄 수 있을 것이다.

Ⅲ. 동적조작이 융합된 과제의 사례 분석

1. 동적조작 환경이 융합된 수학교과과정에 대하여

Finzer와 Jackiw(1998)에 따르면 "동적조작은 조작의 직접성, 동작의 연속성, 환경의 몰입성이라는 세 가지 특성을 가지고 있다(p.1)." 본 논문에서는 이런 특징을 가진 동적조작을 허용하는 소프트웨어 패키지류[4]와 이를 이용하여 만들어진 학습자를 위한 동적조작 도구들[5] 뿐 아니라 이들을 학습에 적용할 수 있도록 고안된 교수-학습적 과제[6]를 모두 포함하는 광의의 환경을 동적조작 환경이라고 정의한다.

이런 동적조작 환경이 융합된 수학교과과정은 지필 환경 속에서 일상적인 방식으로 이미 도입된 개념들에 대하여 동적조작 활동을 할 뿐 아니라 이 활동을 통하여 지필 환경에서는 나타날 수 없는 새로운 수학적 내용과 개념을 만들어낸다. 이러한 교육과정 속에서는 도입된 내용 뿐 아니라 컴퓨터 환경의 요소들을 참고하여 기억해야 할 개념들을 명문화해야 한다.

이런 동적조작 환경을 수학교과과정에 융합하기 위한 누구나 생각할 수 있는 일반적 원칙을 말하면, 첫째로 컴퓨터 사용 기술의 습득 그 자체가 아니라, 널리 알려진 컴퓨터의 여러 가지 가능성, 즉 수많은 경우의 탐구, 문제의 매개변수에 관한 가능한 변형, 컴퓨터로부터 얻을 수 있는 시각적, 수치적 피드백 등을 활용하여 수학학습을 지원, 발전, 변화 시키는데 초점을 맞추어야만 한다는 것이다.

동적조작 환경이 융합된 교과과정에서 주어질 수 있는 교수-학습적 과제의 성격을 3가지로 분류하면, 첫째, 지필로 효과적으로 해결할 수 있는 과제, 둘째, 지필로도 해결할 수 있으나 동적조작을 이용하면 보다 수월하게 해결할 수 있는 과제, 셋째 동적조작 환경이 아니라면 과제로 성립할 수 없는 과제로[7] 나누어 볼 수 있다. 첫째 종류의 과제는 전통적 교과과정을 수용하기 위해서, 둘째 종류의 과제는 문제해결을 위하여 사용할 도구를 선택하는 학습자의 능력을 개발하기 위해서, 셋째 과제는 동적조작을 통한 새로운 수학적 개념의 도입을 위해 필요하다. 동적조작 환경이 융합된 교과과정에서는 당연히 이 세 가지 성격의 과제가 수학교과 전 과정을 거쳐 고르게 제시되어야만 한다.

---

3) 근접발달영역은 아동이 독립적으로 문제를 해결하는 실제적 발달 수준과 성인의 안내나 더 유능한 동료와의 협동을 통해서 문제를 해결하는 잠재적 발달수준 사이의 간격을 말한다(Wertch, 1995).

4) 기하학적 동적조작을 위한 Geometer's Sketchpad, Cabri Geometry, MathView, 통계와 자료분석을 위한 *Fathom* , 그래픽과 기호조작을 위한 *NuCalc* 등이 있다.

5) 예를 들면 모양 제작자를 들 수 있으며 Battista(1998a,1998b)을 참고하기 바람.

6) http://www.mathlove.org/geo/jspgeo.html에 다수의 예가 실려 있음.

7) 예를 들면 블랙박스 과제를 들 수 있으며, Scher(2000, p.20)을 참조하기 바람.

2. 동적조작이 융합된 교수-학습 과제의 사례 분석

이 절에서는 특히 동적조작 환경 중 수학 학습에 적용할 수 있도록 고안된 교수-학습 과제가 어떻게 교과과정에 융합될 수 있는가를 사례로 제시하고 분석하기로 한다. 제시되는 사례들은 모두 Geometer's Sketchpad를 이용하여 만들어진 것이지만 다른 동적기하 소프트웨어들의 경우에도 마찬가지로 적용될 수 있다.

가. 정의 도입 방식의 변화

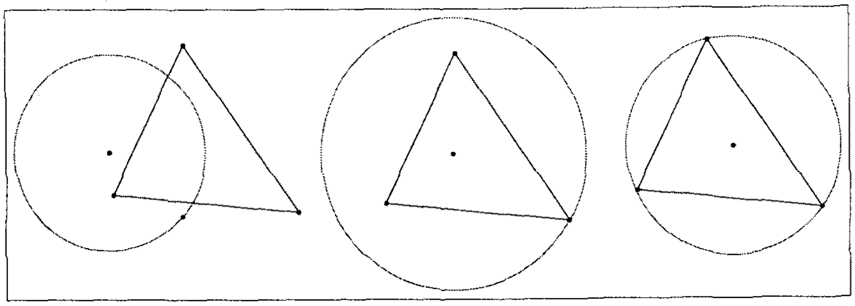
정삼각형에 대한 다음 두 정의를 비교해 보자.

1. 세 변의 길이가 같은 삼각형.
2. 도형의 일부분을 어떻게 변형하더라도, 항상 세 변의 길이가 같아지도록 조정되는 삼각형.

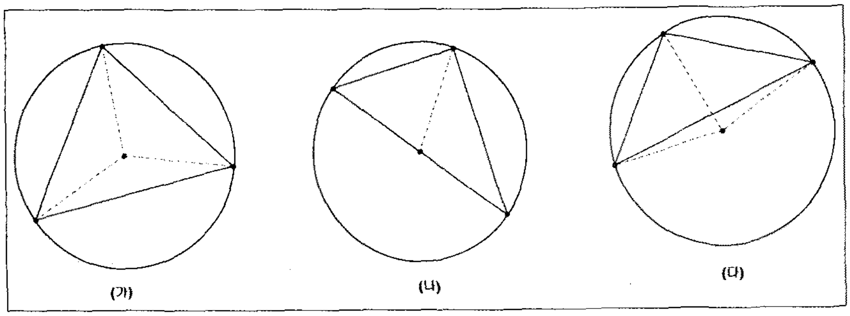
첫 번째 정의는 전통적 방식의 정의이고 두 번째 정의는 주어진 삼각형의 동적조작 실험을 통하여 귀납적으로 얻어진 정의이다. 처음의 정의는 용어의 습득에, 두 번째 정의는 행동양식의 인식에 초점을 맞춘다. 처음의 정의가 정적인 반면 나중의 정의는 명령적이고 동적이다. 성질들의 정적 목록은 발생 반복을 일으키나, 동적 행동의 모델은 예측과 탐구를 이끌어낸다는 점에서 창의력을 길러낼 잠재력이 더 풍부하다.

사례 1. 삼각형 외심 도입에 대한 전통적 방식과 동적조작을 이용한 실험적이고 귀납적 방식의 도입의 비교 및 분석.

전통적 방식에서는 삼각형 ABC의 두 변에 대한 수직이등분선의 교점 O를 구한 뒤 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$임을 증명하도록 하여 외심을



[그림 III-1]. 원이 삼각형의 세 꼭짓점을 지나도록 이동시키는 실험의 스냅 사진



[그림 III-2]. 외심의 필요조건 찾기 위한 실험

도입한다(김연식 외, 1998, pp.224-226; 김호우 외, 2000a, pp.205-208). 수직이등분선을 선택한 이유는 증명이 완료된 이후에야 분명해진다.

그러나 위의 방식은 학습자가 외심의 개념을 수용하기에는 적합하지만 만들어낼 수는 없다. GSP의 선 도구를 사용하여 임의의 삼각형을 작도하고 원 도구를 사용하여 원을 그리고 마우스로 이 원의 중심과 조절점을 끌어 주어진 삼각형의 세 꼭짓점을 지나도록 할 수 있는지를 시험해보도록 하면 외접원이 항상 존재함을 시각적으로 확인할 수 있다([그림 III-1]). 이러한 시각적 증거가 외심의 존재성에 대한 확신을 주게 되고 그 다음 외심을 찾기 위한 노력으로 연결된다.

다음에는 원을 작도한 뒤 이 원에 내접하는 삼각형을 작도하게 한 후 외심의 필요조건을 찾아보게 한다. 이 때 보조선을 마음대로 그리고 지울 수 있도록 한다. [그림 III-2]와 같이 다양한 그림이 나올 수 있도록 자극을 가해야 외심은 항상 삼각형의 내부에 있는 것으로 생각하는 원형현상을 막을 수 있다. [그림 III-2]에서 반지름을 그리는 것은 자연스러운 일이나 삼각형 각 변의 수직이등분선과 분할된 이등변삼각형들을 연관시키는 것은 인도를 필요로 할 수 있다.

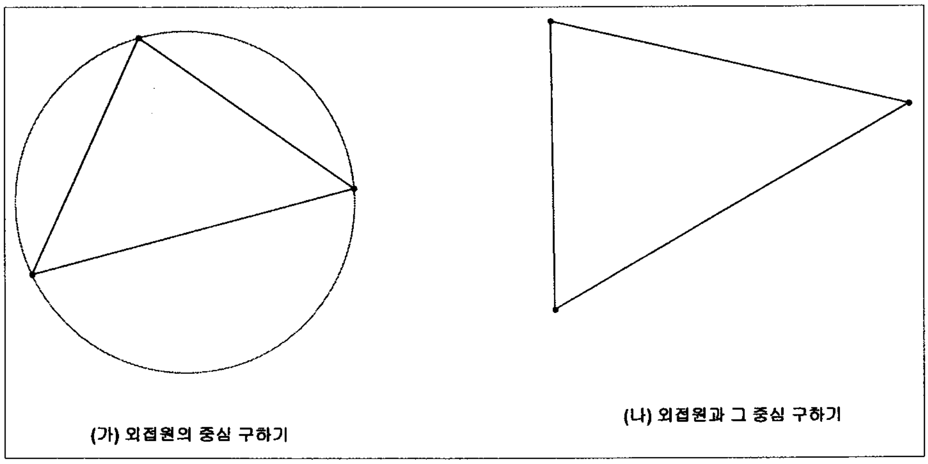
다음에는 외심이 숨겨져 있는 블랙박스 작도에서 외심을 찾아내도록 하는 실험적 과제 [그림 III-3 (가)]와 임의의 삼각형에서 외심을 찾아내도록 하는 과제 [그림 III-3(나)]를 해결하도록 하여 외심의 개념을 완성시키도록 한다.

이 과제에서 학습자는 조작을 통하여 외심의 정신모델을 스스로 구성하게 되는데 이는 구성주의적 교수-학습 이론에 부합되는 것이다.

나. 시각화를 통한 연속성 사고 능력을 강화하는 과제

동적조작 환경은 학습자들이 일반적인 사실이 뜻하는 바가 무엇인가를 실제로 보도록 도와줄 수 있는 시각화 도구를 제작할 수 있게 해준다. Brumbaugh(1996)는 동영상으로 만들어진 삼각형이 어떻게 중학생들의 관심을 끄는가, 또 그 삼각형이 삼각형의 면적이 밑변과 높이에 따라 결정된다는 것을 어떻게 보여줄 수 있는가에 대해 설명한다. Morrow(1996)의 몇 가지 예들은 어떻게 변수, 함수, 그리고 불변성과 같은 추상적인 개념들이 시각화를 통하여 의미를 갖게 되는가를 보여주고 있다.

학생들에게 연속적인 변화를 직접적으로 (매개체적인 대수 계산 없이) 조사하도록 허용함



[그림 III-3] 외심의 개념을 확립하기 위한 두 가지 과제

으로써, 동적조작 환경은 학생들이 해석적 사고에 유용한 (심지어는 필수적인) 기술들인 심적 복합개념을 만들어 내도록 도와주는데 이용될 수 있다(Cuoco & Goldenberg(1996), p. 34).

위의 논문들에서 살펴본 바와 같이 시각화는 연속적 변화의 고찰에 특히 유용하다. 연속적 변화를 고찰해야 하는 학습자에게 이산적 도구만을 제공한다면 이산과 연속이라는 이분법적 대립 개념 사이의 간격을 극복하기는 대단히 어려워진다. 그러나 동적조작 환경 하에서는 시각화를 통하여 이러한 괴리가 최소화될 수 있다. 학습자가 직접 변수를 조작함에 따라 거의 무한개의 연속적인 각각의 실례를 보게 되고, 더 나아가 창조하게 된다.

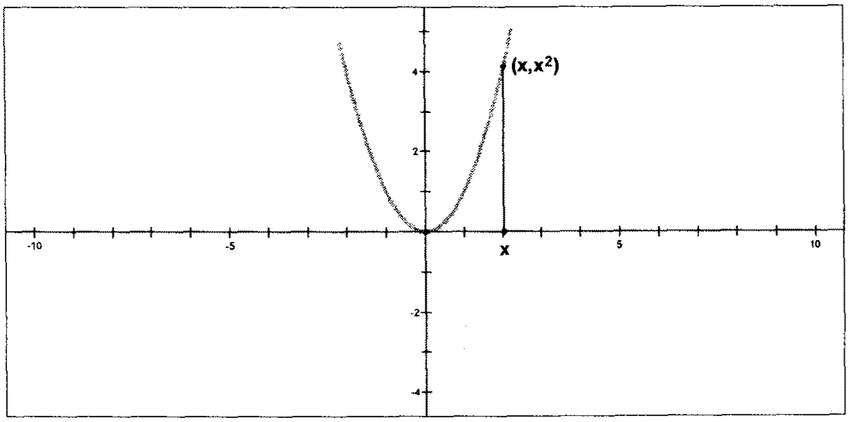
사례 2. 전통적 방식에 의한 이차함수 $y=x^2$의 그래프 도입과 동적조작을 이용한 이차함수 $y=x^2$의 그래프 도입의 비교, 분석

중학교 교과서에서 이차함수를 도입할 때 독립변수 x의 이산적 변화에 대응하는 종속변수 y의 값을 계산한 뒤 좌표평면 위에 점 (x, y)를 표시하여 그래프를 그리도록 한다(김호우 외(2000b), pp. 104-106; 최용준 · 이현구(1998), pp.112-113) 아무리 촘촘하게 점을 찍어도 본질적으로 이산적이다.

그러나 [그림 III-4]와 같이 수평선을 따라 연속적으로 변하는 유향선분에 (시점이 원점이고 종점의 좌표가 x인 선분) 대응하는 유향선분을 (시점이 원점이고 종점의 좌표가 x^2인 선분) 닮음을 이용하여 작도한 다음, 수평 유향선분의 종점이 연속적으로 변할 때 대응하는 수직 유향선분의 종점의 흔적을 추적함으로써 그래프를 얻어낼 수 있다. 이 때 x이 연속적으로 변하므로 x^2도 연속적으로 변한다. 따라서 학습자들은 시각적 관찰과 동시에 연속적 사고가 형성된다.

다. 발견과 탐구 능력 강화 과제

전통적인 기하 수업에서는 학습자들에게 정의와 정리를 제시한 다음 문제와 증명을 하도록 한다. 학생들은 기하학적 관계의 발견을 경험하기 어려울 뿐 아니라 새로운 수학을 만들어 내기도 어렵다. 수학 교수 · 학습의 목표는 추상적인 구조와 공리를 이용하여 연역적 방식으로 제시된 수학적 지식의 피동적 습득보다는 학습자의 능동적인 수학적 활동을 통하여 스스로 수학적 발견을 할 수 있는 능력을 배양하는 것이 되어야 할 것이다. 이는 학습자 개개인이



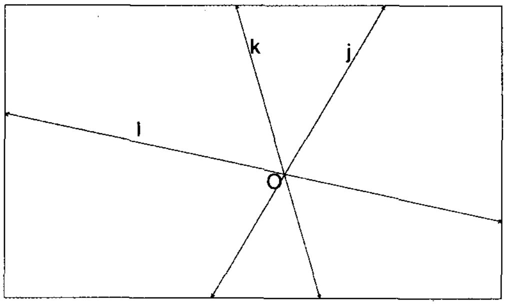
[그림 III-4] 동적조작의 연속성을 이용한 이차함수의 그래프

지식 구조를 가능한 한 외부적 강화가 아닌 학습자의 내적 세계에서 자주적으로 구성할 수 있게 해야 한다는 구성주의 수학 교수·학습 이론의 중심 사상이기도 하지만 본 저자의 신념이기도 하다.

1장에서 언급했듯이 동적조작 환경은 이러한 탐구와 발견을 고양하는 좋은 도구인데, Garry(1996)는 동적조작 환경은 학습자들에게 그들 자신의 수학적 발상과 추측을 시각적이며 효율적이고 또 동적인 방식으로 탐구하도록, 또 그 과정에서 학습자들이 그 자신의 학습에 완전히 몰입하도록 허용한다고 평하고 있다.

사례 1에서 동적조작 환경에서 외심이 도입되는 방식이 어떻게 달라져야 하는지에 대해서 논하였다. 외심이라는 개념과 연관된 발견과 탐구를 촉발하는 과제의 사례를 다음에 제시하자.

사례 3. [그림 III-5]에서 직선 j, k, l이 한 점 O에서 만난다. 이 세 직선이 각 변의 수직이등분선이 되도록 하는 삼각형 ABC가 존재할 수 있는가(King(1996), p.31)? (만약 존재한다면 O는 당연히 외심이 된다.)



[그림 III-5]

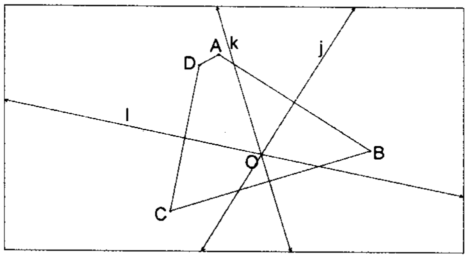
학습자들이 어떤 방식으로 접근할지 예상하기는 어렵지만 처음은 누구나 점 O를 중심으로 하는 원을 그린 뒤 각 직선에 수직인 직선을 적당히 조정하여 주어진 조건을 만족하도록 시도할 것이라는 점은 예측할 수 있다. 그러나 GSP의 설계 특성 상 조정 과정에서 주어진 직선들이나 점 O의 위치가 변하므로 이런 방식으로는 불가능하다는 것을 알게 될 것이다.

수학자는 이 경우 존재의 필요조건에 대해 우선 탐구한 뒤 그것이 존재의 충분조건이 되는가를 탐구한다. 학습자들도 마찬가지 방식으로 탐구하고 발견해나가는 경험을 가져야만 한다. 다시 말해, 그런 삼각형이 존재한다면, 어떤 성질이 성립하는가를 찾아보고 다음에는 그 성질이 성립하면 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 항상 존재하는가를 밝혀야한다는 것이다.

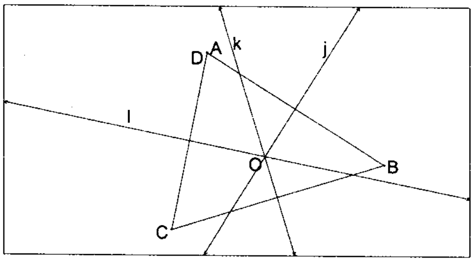
풀이의 예) 주어진 조건을 만족하는 삼각형 ABC가 있다고 하자. 그러면 변 AB의 수직이등분선이 j, 변 BC의 수직이등분선이 k, 변 CA의 수직이등분선이 l이 된다. 그러면 A의 j에 대한 대칭점이 B, B의 k에 대한 대칭점이 C, C의 l에 대한 대칭점이 A가 되어야 한다.

역으로 A의 j에 대한 대칭점이 B, B의 k에 대한 대칭점이 C, C의 l에 대한 대칭점이 A가 되는 삼각형 ABC는 주어진 조건을 만족함을 알 수 있는데 과연 이런 삼각형은 항상 존재하는가? 아무데나 A점을 잡고 대칭점을 구해나가면 [그림 III-6]과 같이 C의 대칭점이 D가 되어 A가 되지 않을 수 있다. 이 A를 마우스로 끌어 [그림 III-7]과 같이 A와 D가 겹치도록 하면 이 삼각형은 주어진 조건을 만족하는 삼각형이 됨을 알 수 있다. [그림 III-6]과 같은 상황에서 A와 D를 잇는 선분을 따라 A를 끌어보면 그 중점에서 서로 겹쳐진다. 보기 메뉴에서 중점의 흔적 남기기를 선택한 뒤 A를 화면상에서 이리저리 움직여보면 [그림 III-8]과 같이 중점의 흔적이 원점을 지나는 직선이 됨을 알 수 있다. 따라서 이 직선 위의 임의의 점을 잡아 A로 놓고 그 점의 j에 대한 대칭점을 B, B의 k에 대한 대칭점을 C라고

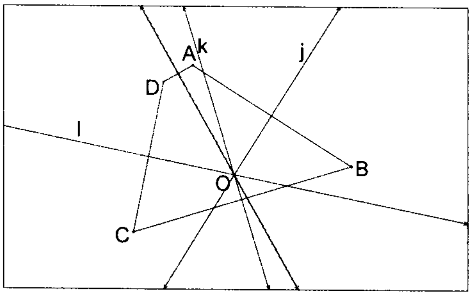
하면 위에서 관찰한 바와 같이 C의 l에 대한 대칭점은 A가 되므로 이 삼각형은 주어진 조건을 만족하게 된다.



[그림 III-6] A와 D가 겹치지 않음



[그림 III-7] A와 D가 겹쳐진 경우



[그림 III-8] 선분 AD의 중점의 흔적

직선 j, k, l을 이리저리 움직이며 위의 과정을 여러 번 반복해보면, 중점의 흔적 남기기를 통해서 얻어진 직선과 l 사이의 각과 두 직선 j와 k 사이의 각이 동일할 지도 모른다는 시각적 가설을 세울 수 있고, 점 O를 중심으로 j와 k를 회전시켜 그 사실을 확인해 볼 수 있다. 이 과정은 시각적 관찰력이 예민하지 못한 학습자는 파악해내지 못할 수도 있어 의도된 인도, 즉 비계설정을 필요로 할 수도 있다.

라. 문제를 제기하고 일반화하는 능력 강화 과제

수학적 사고의 중요한 부분은 초기에 부과된 조건의 특별한 상황을 고려하는 것에서 출발하여 초기에 부과된 조건을 극복하여 확장된 영역으로 일반화하는 것을 포함하고 있다. 학습자들에게는, "만약 이러면 어떻게 될까?" 식의 문제를 제기하고 그 문제의 탐구에 열중하는 가운데 수학적 발견을 하고 더 나가 일반화를 추구하게 하도록 하는 기회가 충분히 주어져야만 한다. 동적조작 환경은 우연한 발견과 예기치 않은 것들이 풍부한 환경을 제공해 주기 때문에, 위에 언급한 방식으로 수학을 만들어나가는 그런 탐구 행위를 권장하기 위해 수학교과 전 과정에 걸쳐 사용되어야만 한다.

다음의 사례는 그 자체로도 의미가 있으나 보다 동일한 방법으로 더 일반적인 상황으로 그 결과를 확장할 수 있는 일반화의 가능성을 내포하고 있다. 즉 추상화된 지식을 융합하여 보다 복잡한 (현상에 대한) 정신 양식을 가능하게 하는 학습자의 자주적 내적 세계를 만들도록 도와줄 수 있다.

사례 4. 주어진 삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 생기는 중점삼각형은 원래 삼각형을 $\frac{1}{2}$ 축소한 것이므로 원 삼각형의 둘레의 길이와 중점삼각형의 둘레의 비는 0.5, 면적의 비는 0.25가 된다. 그 다음 [그림 III-9]와 같이 각 변을 반시계 방향으로 2:1로 내분하는 점을 연결하여 삼각형을 만들었을 때의 상황은 어떻게 되는가? 더 나아가 각 변을 반시계 방향으로 (혹은 시계방향으로) $m:n$으로 내분하는 점을 연결하여 삼각형으로 만들었을 때의 상황은 어떻게 되는가의 문제로 일반화해보라.

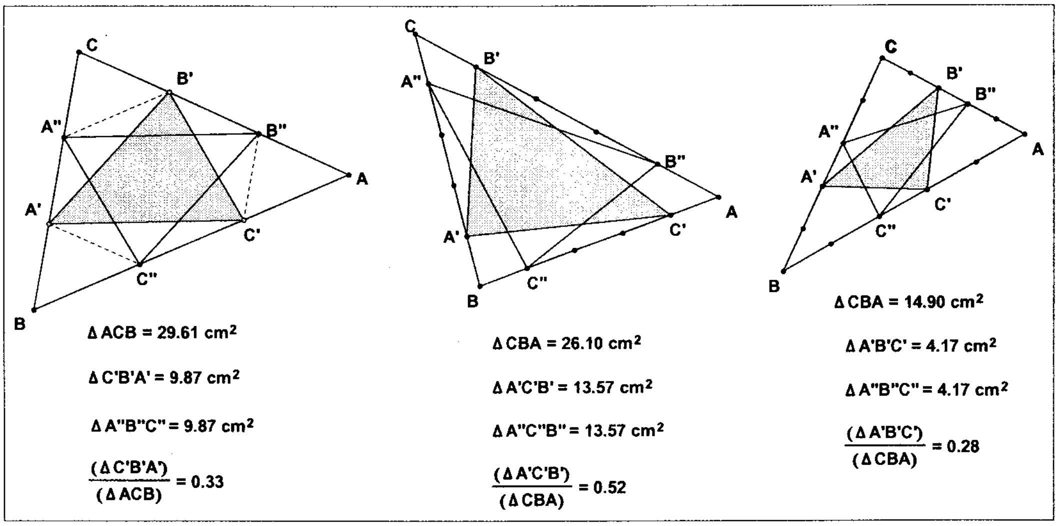
[그림 III-9]는 2:1, 4:1, 3:2 (혹은 1:2, 1:4, 2:3)인 경우에 대한 GSP 작도의 무수한 예 중 하나인데, 이 정적인 그림에서는 확인할 길이 없지만, GSP 문서에서는 각 삼각형의 꼭짓점들을 마우스로 끌어 삼각형을 변화시킬 때 둘레의 비는 변하나 면적의 비는 불변임을 확인할 수 있다. 이러한 확신은 증명을 하고자 하는 의욕으로 유도된다.

삼각형에 관한 이 문제는 보다 일반적인 상황, 즉 k각형을 반시계 방향으로 $m:n$으로 내분하는 점을 이어 만들어진 k각형에 대해서도 비슷한 현상이 나타나는가를 묻는 문제로 일반화될 수 있다는 것을 알게 된다.

3. 동적조작이 융합된 교수-학습 과제 적용 시의 문제점과 교사의 역할

1980년대 미국의 학교 현장에서는 그래프 계산기를 수업에 도입했을 때의 효과나 문제점에 관한 철저한 연구 없이 무분별하게 도입되었다. 이러한 교육 현장의 유행에 대한 우려 때문에 Goldenberg(1988, 1991)는 그래프 계산기의 도구와 시각적 표현이 학생의 함수와 그래프의 개념에 어떤 영향을 미치는가를 조사하였다. 놀랍게도 계산기 창의 규격의 변화조차도 평행선을 서로에 대한 수평이동으로 보느냐 아니면 수직이동으로 보느냐의 사고의 차이를 발생시킨다는 것을 면담 조사를 통하여 밝혔는데, 이것은 교육에 종사하는 모든 사람에게 새로운 교육공학 도구를 도입할 때 얼마나 신중하게 이루어져야 하는가를 보여주는 하나의 교훈이라고 할 수 있다.

1990년대 등장한 새로운 교육공학 도구인 동적조작을 허용하는 소프트웨어들은 기본적으로 점, 직선, 그리고 원을 이용하여 여러 기하학적 표현을 쉽고 명확히 구현할 수 있으며, 기존의 정적이고 고정된 도형에서 동적이고 변화하는 도형을 관찰함으로써 여러 가지 기하학적 관계를 쉽게 이해할 수 있게 해 준다. 즉, 이 소프트웨어에 의한 정확한 도형의 작도는 도형의 각 부분을 끌었을 때에도 그들 사이의 기본적인 속성은 변하지 않기 때문에 도형을 움직여 보면서 변하는 것과 변하지 않는 것을 관찰할 수 있고, 이것에서 도형의 일반적인 성질을 탐



[그림 III-9] 삼각형의 변화에도 불구하고 면적의 비는 불변이다.

구할 수 있다. 기능상으로는 Euclid 기하의 도형을 완벽하게 구현할 수 있으며, 거기에서 더 나아가 Animation 기능, Trace 등을 통하여 실제 우리가 머릿속에서 상상하기 힘든 여러 가지 도형을 직접 시각적으로 보여줌으로써 기하의 여러 가지 성질을 발견하는데 아주 좋은 아이디어를 제공해 줄 수 있다. 뿐만 아니라 평행이동, 회전, 대칭이동, 벡터 등을 이용하면 기존의 Euclid 기하의 정적인 도형에서 다양한 움직이는 그림을 그릴 수 있다.

이러한 기능은 좋은 교육적 도구인 것처럼 보이므로, 미국에서 그래프 계산기가 무분별하게 도입되었던 것처럼, 학습자에게 미치는 영향에 대한 철저한 연구 없이 한국의 학교 현장에도 무분별하게 도입될 가능성이 있다. 그러므로 동적조작이 융합된 교수-학습에서 일어날 수 있는 문제점에 대하여 파악해야만 할 것이다.

첫째 문제점은 동적조작이 주는 피드백을 학습자 스스로 해석해 낼 가능성에 대하여 교사가 과대평가하게 된다는 것이다. Scher(2000)의 면담실험에 따르면, 이등변 삼각형에 대한 [그림 II-2]의 블랙박스 작도를 제시했을 때(즉, 그림에서의 점선은 숨겨진 채 제시된다.) (중학생인) 실험 대상자들은 $\overline{TN}=\overline{TJ}$에 주목하기 보다는 N을 (혹은 J) 움직였을 때 T는 움직이지 않는다거나, T를 움직였을 때 N과 J은 움직인다는 식의 개체 상호 간의 관계에 더 주목한다는 것이다. 또 N (혹은 J)가 숨겨진 원을 따라 움직이고 이 N이 (혹은 J) 움직이는 동안 숨겨진 원의 크기가 불변임을 파악해냈음에도 불구하고 그 원의 반지름이 되는 선분 TN, TJ에는 주목하지 않는다는 것이다. 실험자는 주목하는데 왜 실험 대상자인 학생들은 주목하지 못하는가? 실험자는 이미 이등변삼각형의 정신적 모델이 완성되어 있는데 반해 실험 대상자들은 정신 속에 그 모델이 완성되어 있지 않기 때문인데 이런 경우 교사는 코치의 역할을 하듯 문제점을 분석하고 사고의 방향을 제시해 주어야 할 것이다.

둘째 문제점은 교사가 전혀 예기치 못한 방식으로 주어진 문제를 탐구하고 해결하는 경우가 많이 발생한다는 것이다. 예기치 못한 방식의 탐구 방법으로 인해 교사는 학습자의 의도와 추구하는 방식을 이해하지 못할 가망이 크다. 이것을 Boehm(1996)은

> 동적 기하 소프트웨어를 사용하는 교사는 누구나 학생들이 예기치 않은 질문을 던지는 것에 대비를 해야 한다. 나는 '모르겠는데? 뒤에 알려줄게' 라는 답변을 아주 여러 번 하지 않을 수 없었다(p.72).

라고 표현하고 있다. 이 경우 교사는 학습자에게 동료 연구자로 접근하여 편견 없이 문제를 탐구하고 해결하는 방식을 토론하여야 한다.

셋째 문제점은 학습자가 자신의 의도와 방식을 설명할 때 정련되고 공식화된 수학적 용어를 사용하는 것이 아니라 일상적이고 비공식적 언어를 사용한다는 것이다. 모양제작자를 이용한 실험을 통한 학생들의 기하 개념화에 관한 Battista(1998)의 연구에서도 알 수 있듯이, "이 변을 한쪽으로 밀면 대변도 같은 쪽으로 움직여."라든가 "이 한 끝을 밖으로 당기면 다른 끝도 밖으로 움직인다."와 같은 식의 표현이 주로 사용된다. 또한 Scher(2000)의 연구에서도 이와 같은 비형식적 언어의 사용과 함께 현실 속의 비슷한 현상에서 연유한 비유의 사용도 빈번하다는 사실을 면담 테이프의 분석을 통해 밝히고 있다. 학습자가 사용하는 비형식적 언어에 대한 교사 나름의 데이터베이스를 만들어내야 하는데, 동료와 같은 마음으로 접근하지 않으면 그러한 언어에 접근하기가 쉽지 않다. 다시 말해 교사는 동료이자 밀착 청취자로써 학생에

게 접근하지 않으면 이러한 문제를 해결할 수 없다.

넷째 문제점은 주어진 과제의 해결에 어려움을 겪을 때 그 어려움이 수학적 개념의 이해 부족에서 오는지 아니면 동적조작 환경에 미숙하기 때문인지 파악하기 어렵다는 것이다. 학생과의 면담을 통해서도 그 어려움의 원인을 정확히 파악하기는 대단히 어렵다. 이 어려움을 Scher(2000)은

> 피면담자들이 어떤 문제를 해결하려고 애쓸 때 그 어려움은 개념적인 것인가, GSP의 사용 기술과 관련된 것인가 아니면 기하학적 어휘력의 부족인가? 인터뷰 테이프를 분석할 때 항상 그 차이점을 알아낼 수 있는 것은 아니었다(p.21).

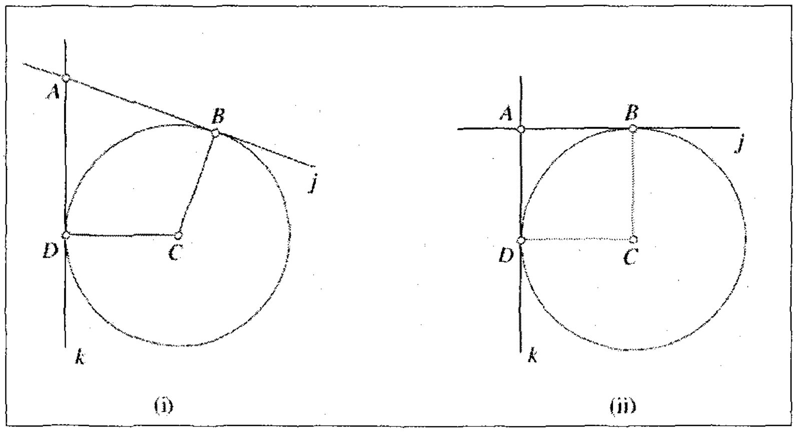
고 토로하고 있다. 이러한 도구와 내용 사이의 긴장 관계를 완벽히는 아니어도 어느 정도 파악할 수 있는 방법은 학습 전반을 모니터링하고 학생과의 면담을 통한 밀착청취 밖에 없다.

다섯째 문제점은 학생의 탐구 결과에 대해 옳다 그르다와 같은 이분법적인 접근이 불가능하다는 것이다. Scher(2000)의 면담 연구에서의 한 사례를 살펴보자. 서로 수직인 원의 두 반지름을 이용하여 작도된 정사각형을 재작도하는 과제를 수행하는 두 학생이 다음과 같은 방식으로 해결하였다.

[그림 III-10 (i)]처럼 두 반지름을 택한 뒤 B와 D에서의 접선들의 교점을 A라고 했다. 수선 그리기 메뉴를 사용하지 않고 선분 CD와 선분 BC가 시각적으로 꺾인 부분이 없는 수평선, 수직선이 되도록 적당히 조정하여 $\angle BCD$가 직각이 되도록 하였다. 이 때 사각형 $ABCD$는 정사각형처럼 보이지만 점을 움직이면 일반적인 사각형이 되므로 진정한 의미의 동적 정사각형이 아니다.

다음에는 원 위에 또 다른 점 E, F를 잡고 [그림 III-11 (i)]과 같이 되도록 한 뒤 점 E와 F를 움직여 선분 CE가 선분 CD처럼 되도록, 선분 CF가 선분 CB처럼 수직선이 되도록 하여 [그림 III-11 (ii)]와 같이 되도록 하였다.

다음에는 점 C를 움직이면 정사각형 상태를 유지하며 축소, 확대가 되지만 다른 점을 움직이면 일반적인 사각형으로 바뀜을 알게 된 두 학생은 자신들이 보기에 나쁜 성질을 가진 점들을 모두 숨겨버리고 [그림 III-12]와 같이 좋은 성질을 가진 점 C만을 남겨 두어 동적 정사각형을 작도하였다. 이 작도를 어떻게 평가해야 하는가? 분명 점 C를 움직이면 정사각형



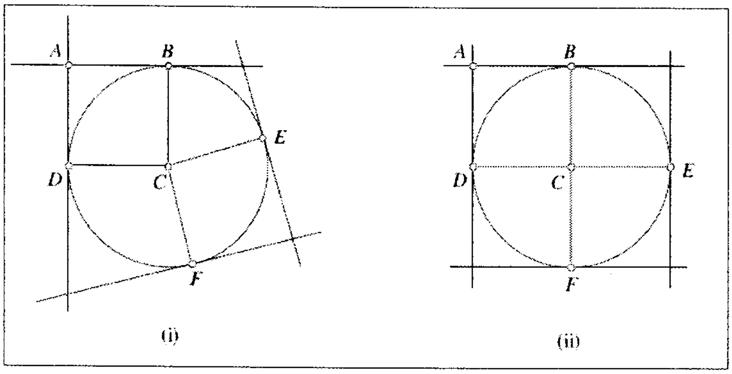
[그림 III-10] (i)인 상태에서 선분 BC가 시각적 수직선이 되도록 만든다.

인 상태를 유지하며 크기가 변하는데 과연 이것을 구성성분의 변화에도 불구하고 항상 정사각형의 모양을 유지한다고 말할 수 있는가? 이 방법이 그르다고 말할 수 없는 것은 다른 GSP 작도에서도 작도의 목적에 부합되지 않는 구성성분들은 숨기고 목적에 부합되는 구성성분만 나타나도록 하는 방법은 흔히 쓰이는 기교이다. 이 학생들의 방법이 틀렸다고 말할 수 없는 이유이다. 그러나 이 학생들의 방법이 정당한 것으로 받아들이기도 힘들다. 이러한 문제점에서 알 수 있듯이 동적조작 환경이 융합된 교수-학습에서는 집단적인 평가가 불가능한 경우가 자주 발생하므로 교사는 학생과 일대일 방식의 면담을 통해서 학생의 사고를 파악해야 하는 경우가 자주 발생한다. 이 때 교사는 상대의 말을 긴밀하게 청취하고 조언하는 상담자의 역할을 수행하지 않을 수 없다.

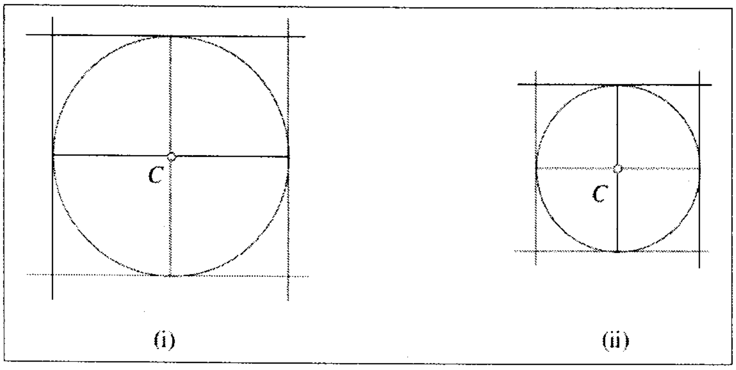
IV. 결 론

현재의 교육과정은 체계적이고 연역적인 방식으로 제시되는 이미 완성된 수학을 수용하는 방식으로 이루어져 있어 실험적이고 귀납적인, 즉 발명되고 있는 과정으로서의 수학은 학생들이 접할 기회가 거의 없다.

본 논문에서는 동적조작 환경 속에서 이루어지는 물리적 실험을 도구로 선택하여 발명되고



[그림 III-11] CE를 시각적 수평선으로, CF를 시각적 수평선으로 만든다.



[그림 III-12] C를 조절하면 시각적 정사각형의 크기가 변한다.

있는 과정으로서의 수학을 학생들이 접할 수 있는 사례들을 제시함으로써 수학 교수-학습에 어떻게 동적조작 환경을 융합시킬 수 있는가를 보였다. III장에서 1) 정의 도입 방식을 변화시켜 의미 있는 수학적 정의를 만들어내는 2) 시각화를 통한 연속성 사고 능력을 강화하는 3) 발견과 탐구를 통하여 수학을 만들어내는 4) 문제를 제기하고 일반화하는 능력을 강화하는 사례들을 제시하였는데 이들은 모두 동적조작 환경이 지필 환경에 비해 우위를 가지고 있는 사고 영역을 토대로 이루어진 것이다.

이러한 방식의 교육 환경 하에서 발생할 수 있는 첫째 문제점은 동적조작이 주는 피드백을 학습자 스스로 해석해 낼 가능성에 대하여 교사가 과대평가하게 된다는 것이고, 둘째 문제점은 교사가 전혀 예기치 못한 방식으로 주어진 문제를 탐구하고 해결하는 경우가 많이 발생하고, 셋째 문제점은 학습자가 자신의 의도와 방식을 설명할 때 정련되고 공식화된 수학적 용어를 사용하는 것이 아니라 일상적이고 비형식적 언어를 사용함으로써 교사와의 사고 교류와 언어 소통이 어려워진다는 것이다. 넷째 문제점은 주어진 과제의 해결에 어려움을 겪을 때 그 어려움이 수학적 개념의 이해 부족에서 오는지 아니면 동적조작 환경에 미숙하기 때문인지 파악하기 어렵다는 것이다. 이것은 학생과의 면담을 통해서도 그 어려움의 원인을 정확히 파악하기 어려운데 이것을 파악할 수 있는 방법은 학생과의 면담을 통한 밀착청취 밖에는 없다. 마지막으로 학생의 탐구 결과는 어떤 면에서는 합당하지만 어떤 면에서는 불합리한 다중성을 지니고 있으므로 학생의 사고 과정을 결과만으로는 추적할 수 없다는 것이다. 탐구의 과정을 처음부터 면담과 비디오 녹화 등을 통해 추적해 나가지 않는 한 학생의 인지 과정을 파악할 수 없다는 점에서 평가의 어려움이 드러난다.

이런 학습 환경에 있어서의 교사는, 지필 환경에서 주로 이루어지는 절대적인 권위를 지닌 지식의 전달자나 전수자의 역할에서, 때로는 인도자(scaffolder), 코치, 혹은 상담자로, 때로는 함께 탐구하고 함께 배우는 동료학습자(co-learner)로 그 역할이 변해야만 할 것이다.

참고문헌

권석일(2006). **중학교 기하 교재의 '원론' 교육적 고찰.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

권성룡(2001). **탐구형 기하 소프트웨어 학습 환경에서의 지식의 내면화에 관한 연구.** 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

김성경 · 이동원(2005). 근접발달영역을 고려한 중학교 수학의 학습지도방안 연구, **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 44**(1), 41-65

김연식 · 김홍기(1998). **중학교 수학 2** . 서울: (주) 두산동아.

김호우 · 박교식 · 신준국 · 정은실(2000a). **중학교 수학 2** . 서울: (주) 지학사.

____________(2000b). **중학교 수학 3** . 서울: (주) 지학사.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교출판부.

최용준 · 이현구(1998). **중학교 수학 3** . 서울: (주) 천재교육.

Battista, M. T.(1998). Computer environments that engender student's construction of mathematical ideas and reasoning: a constructivist perspective. http://mathforum.org/technology/papers/papers/battista/battista.html

Bennett, D.(1998). *Exploring geometry with The Geometer's Sketchpad.* Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Boehm, K. W.(1996), Experiences with the Geometer's Sketchpad in the Classroom, In James R. King& Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 71-73). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Brumbaugh, D. K. (1996). Moving triangles, In James R. King & Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning, teaching, and research.* (pp. 69-70). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematical teaching and learning* (pp. 420-464). New York, NY: Simon & Schuster Macmillan.

Cuoco, A. & Goldenberg, E. P. (1996). Dynamic geometry as a bridge from euclidean geometry to analysis, In James R. King& Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 33-44). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Finzer, W. & Jackiw, N. (1998). Dynamic manipulation of mathematical objects. http://www.dynamicgeometry.com/

Garry, T. (1996). Geometer's Sketchpad in the Classroom, In James R. King& Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 55-62). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Glasersfeld, E. von (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning. Washington,* DC: Falmer Press.

Goldenberg, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: mathematical, technical, and pedagogical challenges in the graphical representation of functions, *Journal of Mathematical Behaviour,* 7, 135-174.

____________(1991). The difference between graphing software and educational graphing software, In W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp.77-86). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Halmos, P. (1984). Mathematics as a creative art. In D. Campbell & J. Higgens (Eds.), *Mathematics : people, problems, results, Vol. II* (pp. 19-29). Belmont : Wadsworth.

Hasegawa, J. (1997). Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade. *Educational Studies in Mathematics,* 32(2), 157-179.

Jennings, G. A. (1994). Modern Geometry with Applications, Springer

King, J. (1996). Quadrilaterals formed by perpendicular bisectors, In James R. King & Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning,* *teaching, and research* (pp. 47-54). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Morrow, J. (1996). Dynamic visualization from middle school through college, In James R. King & Doris Schattschneider (Eds.) *Geometry turned on: dynamic software in learning, teaching, and research* (pp. 29-32). MAA Notes 41. Washington, DC: Mathematics Association of America.

Polya, G. (1986). **어떻게 문제를 풀 것인가?** (우정호, 역) 서울: 천재교육. (영어 원작은 1957년 출판)

Scher, D. (2000). *Student's conception of geometry in a dynamic geometry software environment.* doctoral dissertation, New York University, New York, NY.

Wertch, (1995). **비고츠키, 마음의 사회적 형성.** (한양대 사회인지발달연구모임, 역) 서울: 정민사. (영어 원작은 1985년 출판).

A Case Study on Pedagogical Tasks in Mathematics Curriculum Integrating Dynamic Manipulation Environments and the Role of a Teacher

Hong, Seong Kowan (Busan National University)

In this paper, we show how dynamic manipulation environments can be integrated in the mathematics curriculum by presenting some pedagogical tasks manufactured by dynamic manipulation. These examples are composed to produce meaningful definitions through inductive experiments, to strengthen the thinking ability on continuity through the visualization, to make mathematics through investigation and finding, and to strengthen the ability of posing and generalizing problems. Through these examples students can observe the process of how mathematics is being invented, and they can experience how to solve mathematical problems using physical experiments in dynamic manipulation environments.

When integration of dynamic manipulation into the teaching and learning of mathematics is applied, some difficulties can come out. To resolve such difficulties, a teacher must play the role of a co-worker of students in addition to the role of a scaffolder, coach, or close listener.

* key words : dynamic manipulation(동적조작), integration(융합), mathematics curriculum(수학교과과정), pedagogical task(교수-학습 과제)

논문접수 : 2009. 4. 30
논문수정 : 2009. 6. 3
심사완료 : 2009. 6. 12