대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 261-280. Jun. 2009

대학 신입생들의 명제에 대한 이해[1)]

김 영 옥*

본 연구는 현재 우리나라 고등학교 1학년 명제단원의 내용 체계가 수학적 논리 사고를 함양하기 위한 기초 준비로는 너무 약화되어 있어, 그러한 명제 교육을 받고 대학에 진학한 신입생들이 명제와 관련된 개념 이해에서 많은 어려움을 보일 것이라는 가정 하에서 진행되었다. 이에 본 연구는 제 7차 수학과 교육과정에 따른 명제 교육을 받고 지방 중위권 대학에 입학한 이공계 신입생들의 명제에 대한 이해 정도를 알아보기 위해, 대학 기초 수학 학습에서 요구되는 기본 명제 개념들로 이루어진 문제를 적용하고, 그 문제 해결과정에서 보이는 신입생들의 오류와 특징들을 조사, 분석하였다. 본 연구의 결과는 이공계 신입생들의 명제 관련 개념들에 대한 이해 실태를 보고함으로써, 대학 수학 교육에서 수학적 논리 기초 개념들에 대한 지도를 어느 수준까지 해야 할 것인가에 대한 시사점을 제공하는데 그 의의가 있다.

Ⅰ. 서 론

인류 문명의 발전과 더불어 진화 되어온 수학의 발전에 있어서 가장 핵심적 역할을 한 것이 바로 인간의 추론과 논증(argument) 활동이다. 수학의 본질을 인간 활동에 의한 대상의 추상화 과정이라 볼 때 (Dewey & McLellan, 1895 ; Piaget, 1965), 추상화 과정에서 끊임없이 반복되는 정신적 활동이 추론과 논증이며, 이 활동들을 통해 추상화된 수학적 대상은 다시 한 차원 더 높은 추상화 과정을 거쳐 새로운 수학적 대상으로 발전 혹은 창조된다. 한마디로, 우리가 가지고 있는 모든 수학적 지식들은 귀납이나 유추에 의해 추측된 주장들이 '논증적인 추론(argumental reasoning)' 혹은 '연역적 추론(deductive reasoning)'을 거쳐 참인 것으로 정당화된 것들이다(Polya, 1990).

인간의 추론과 논증 활동은 수학적 지식들을 형성하는데 핵심적 요소가 됨과 동시에, 그 자체가 수학교육의 중요한 목적이 된다. 수학교육의 일반적 목표를 흔히 '정신적 도야성', '실용성', 그리고 '문화적 가치 및 심미성'으로 볼 때, 가장 근본적이고 중요한 목표로 정신적 도야성을 뽑는다. 정신 도야성 함양은 수학을 학습함으로서 학생들이 논리적으로 추론하고 증명하는 정신적 능력을 배양한다는 의미로 (우정호, 1998), 이 능력은 모든 문제 상황에서 요구되는 비판적이고 반성적인 사고의 핵심이 된다.

학교수학에서 특히 강조되는 추론이 논증적 추론, 즉 연역적 추론이다. 그 이유는 학교수학에서 다루어지는 거의 모든 수학적 정리와 성질들이 '연역적 과학(추론)'에 의해 '완성된 수학'이기 때문이다 (Polya, 1990). Lakatos(1976)와 Polya(1990) 같은 수학 교육학자들은 수학교육에 있어서 지나친 연역적 추론 강조와 상대적

* 경남대학교(youokim@kyungnam.ac.kr)
1) 이 연구는 2009학년도 경남대학교 학술연구장려금의 지원으로 연구되었음

으로 소외되고 있는 귀납적 추론 혹은 개연적 추론(plausible reasoning)의 중요성을 강조하기도 하였다. 하지만 수학교육에 있어서 귀납적 추론은 완성된 수학이 발견되기까지 요구되는 과정적 사고로서 그 의미와 가치를 가지지만, 결국 완성된 수학으로 인정받기 위해서는 논증에 의한 증명이 되어야만 하므로 연역적 추론이 수학교육의 핵심이 될 수밖에 없다.

우리나라 수학과 교육과정에서, 순수하게 연역적 추론, 즉 증명을 위한 기초 논리 훈련과 이해를 목적으로 구성된 단원이 명제단원이다. 현재 명제 개념은 제 7차 수학과 교육과정의 적용을 받는 중학교 8-나 단계의 '도형' 영역에서 처음 소개되고 있으며, 7차 수학과 교육과정 개정안의 적용을 받는 고등학교 1학년 수학에서는 '수와 연산' 영역에서 다루어지고 있다. 중학교 8-나 단계에서는 명제의 뜻과 역, 참, 거짓, 가정, 결론 등을 간단한 수준에서 다루고 있으며 (교육부, 1997), 고등학교 1학년 수학에서는 명제의 뜻과 조건, 역, 이, 대우, 필요조건과 충분조건 등을 다루고 있다(교육인적자원부, 2007).

하지만 현재 우리나라 중·고등학교 명제단원 교육 내용은 제 4차 수학과 교육과정기 부터 개정의 기본 방향이 된 '학습 부담 경감을 위한 학습 내용 축소'로 인하여 그 내용이 단순 명제 위주로 급격히 축소, 단순화 되어 연역적 추론의 진정한 의미와 그 과정을 경험하기에는 내용이 충분하지 못한 문제를 안고 있다. 교수·학습 측면에서도 학생들이 평소 명제들 간의 관계(역, 이, 대우 명제 및 필요조건과 충분조건)를 논리적 동치 관계 측면에서 이해하는 것이 아니라, 도구적으로 이해하는 경우가 많아, 실제로 명제의 참과 거짓을 판단해야 하는 상황에서는 논리적으로 문제를 해결하지 못하고 직관에 기초해서 반응하는 오류를 보이곤 한다 (조정희, 1995; 임지혜, 2008; 이춘분, 2007). 더욱이 고등학교 1학년에서 명제를 학습 한 후, 수학을 전공하는 학과에 진학하는 대학 신입생들의 경우는 수학적 추론과 정당화 방법을 심도 있게 다루는 '집합과 논리' 혹은 '집합론'에서 다시 명제를 배우게 되는데, 이때 고등학교에서 명제 관련 기초 개념들에 대한 정확한 이해를 가지지 못했던 학생들은 그 과목에서도 어려워하고 순수 수학 내에 증명과 관련된 학습에서도 논증의 참과 거짓을 판단하는데 어려움을 보인다.

하지만 수학교육 연구에서는 이러한 명제 교육의 문제점 인식에도 불구하고 함수 혹은 비율과 같은 기본적인 수학적 구조에 대한 학생들의 이해를 조사하는 데는 충실했으나, 명제와 관련된 논리적 관계 구조나 어떤 특별한 논리적 동치 관계를 이해하는데 있어서 학생들이 보이는 어려움을 조사한 연구는 거의 찾아 볼 수 가 없다. 이에 본 연구에서는 명제 교육의 실태를 알아보기 위해 지방 중위권 대학 이공계 신입생들을 대상으로 명제 관련 개념들을 묻는 문제들을 적용하고, 그 문제해결 과정에서 학생들이 보이는 개념적 오류와 특징들을 조사하였다. 신입생들의 반응 분석 결과는 앞으로 중등 수학과 교육과정 개정에 있어서 명제 단원 내용 구성의 범위를 어디까지 해야 할 것인가에 대한 정보를 제공함과 동시에, 대학 수학 교육 측면에서는 이공계 신입생들의 명제 관련 개념들에 대한 이해 수준을 파악할 수 있는 계기를 마련할 것이다.

II. 이론적 배경

1. 인간의 지식 형성에서 논리의 역할

인간이 어떤 것에 대해 알 수 있는 방법은

여러 가지가 있다. 가장 손쉬운 방법은 인간의 감각 기관을 이용하여 세상으로부터 정보를 수집하여 어떤 것에 대해 알게 되는 것인데, 이 방법의 단점은 우리의 감각 기관이 감지한 것을 항상 신뢰하기가 어렵다는 것이다. 다음 방법은 내가 알고자 하는 것에 대해 다른 사람의 의견을 물어보는 것이며, 사람들의 합의에 의해 결정된 사실을 알게 되는 것이다. 하지만 이 방법도 불완전한 것은 마찬가지이다. 왜냐면 그 사람들이 항상 사실인 결론만을 내는 것이 아니기 때문이다. 세 번째 방법은 우리가 추측한 주장이 옳은지 판단하기 위하여 가능한 모든 예들을 수집하여 시험해 보는, 귀납에 기초한 방법이다. 예를 들면 인문·사회과학의 연구자가 자신이 생각한 가설이 참인지 아닌지를 알아보기 위해 가능한 모든 표본을 추출하고 통계적 방법을 이용하여 분석한 후 결론을 내릴 수 있다. 하지만 이 결론은 구체적 예들을 조사하는 귀납에 기초한 것이므로 반례가 발견되기 전까지만 잠정적으로 참일 뿐이다. 마지막으로 우리가 생각할 수 있는 앎의 방식이 바로 본 논문에서 주제로 삼고자 하는 '논리적으로 아는 것'이다.

논리적으로 어떤 것을 안다는 것은, 인간이 직접 경험을 통하지 않고 지능을 이용하여 이미 지각된 사실들로 부터 새로운 사실을 추론해 내는 것을 말한다(Jack & Norman, 2006). 구체적인 예를 통해 설명하기 위해 Ball(1988), Ma(1999), 그리고 Kim(2007)의 연구에서 학생의 잘못된 수학적 정당화에 대한 교사의 반응을 알아보기 위해 사용했던 인터뷰 질문지의 일부 내용을 인용하고자 한다. 그 인터뷰 질문지에는 학생이 교사에게 '어떤 닫힌 도형의 둘레 길이가 증가하면 그 면적도 증가한다.'라는 말을 하고 있는데, 이 문장을 아래와 같은 '긍정식(modus ponens)' 형태($p \Rightarrow q$, p so q)[2]를 가지는 논증에 사용하겠다.

[전제 1] 어떤 닫힌 도형의 둘레 길이가 증가하면 그 면적도 또한 증가한다.
[전제 2] 이 닫힌 도형의 둘레 길이는 증가한다.
[결　론] 이 닫힌 도형의 면적은 증가한다.

위 긍정식에서 세 번째 명제인 [결론]은 우리가 직접 경험하지 않아도 [전제 1]과 [전제 2]로부터 논리적으로 추론할 수 있으며, 이것은 연역적으로 타당(deductively valid)한 추론이다. 바로 이런 식으로 새로운 지식을 인간이 획득할 수 있지만 여기에도 한계는 있다. 앞의 긍정식에서 결론으로 도출된 명제(이 닫힌 도형의 면적은 증가한다)가 연역적으로 타당하게 추론되었다고는 하나, 결코 참은 될 수 없다. 왜냐면 이미 [전제 1]이 참이 아니기 때문에 아무리 연역적으로 타당한 추론이라고 해도 그 결론이 참이 될 수는 없기 때문이다 (Weston, 2000). 따라서 인간의 지식을 확장하기 위해서는 논리적으로 타당하고 참인 사실들을 찾는 것이 필요하고, 그것을 다루는 학문이 수학이다.

2. 연역적 추론과 수학적 증명

논증은 두 가지 형태로 요약될 수 있다. 한 가지는 앞의 긍정식 예처럼 타당한 연역적 추론이었지만 결론이 거짓인 경우와 타당한 연역적 추론임과 동시에 그 결론도 참인 경우이다. 여기서 연역적으로 타당하다는 의미가 무엇인지 알 필요가 있는데, 그것은 그 논증이 "if-then 원리"로 알려져 있는 '형식적 함의의 원리(the principle of formal implication)'를 따른

2) 긍정식 형태는 수학적 진리를 성립시키는 가장 기초적인 구조 중에 한 가지 이다 (Rodd, 2000).

다는 말이다 (Cooney, Davis & Henderson, 1975, p.296). "if-then 원리"에서는 어떤 명제(예: '공리'나 '무정의 용어')가 전제인 "if"로 받아들여지면, 형식적 함의의 원리에 의해 도출된 결론("then")도 받아들여져야 한다. 받아들여진 결론은 다시 전제로 이용되어 새로운 결론을 연역(추론)하는데 사용되어 계속해서 다양한 명제의 구조, 즉 새로운 논증들이 만들어지게 된다. 여기서 논증이 연역적으로 타당하다는 것은 논증의 내용과는 상관없이 논증 그 자체가 형식적 함의의 원리를 지키고 있다는 의미이다. 앞의 긍정식에서도 [전제 1]이 받아들여졌으므로 [전제 2]일 때 [결론]이 나오는 것은 타당하지만, 그 타당성은 긍정식이 나타내는 논증의 내용(진위성)과는 전혀 상관없다.

논증에서 형식적 함의의 원리에 의해 타당하게 추론된 결론이 참이 되기 위해서는 주어진 전제가 모두 참인 것들로 이루어져야 한다. 이것이 바로 수학에서 지지하는 연역적 추론이면서 '증명'이다. 즉, 수학에서 어떤 논증이 증명되었다고 말하기 위해서는 제시된 모든 전제가 참이고 타당하여야 하며, 이 두 조건 중에서 하나라도 만족시키지 못하면 그 논증은 수학에서 증명이 될 수 없다.

3. 수학적 증명에서 명제 개념 이해의 중요성

"수학의 핵심이 증명에 있다(Ross, 1998, p.254)"는 것에 동의했던 수학교육자들은 중등학교 증명 교육이 기하 내용 영역에 국한되어 있음을 비판하면서(Wu, 1996; Knuth, 2002), 증명 교육을 기하 내용뿐만 아닌, 새로운 수학적 추론에 대한 정당성을 밝히고, 의사소통하며, 기록하는데 필수적인 요소로서 증명 활동이 포함되도록 증명 교육을 실시해야 함을 주장해 왔다 (Schoenfeld, 1994; Wu, 1996). 이러한 수학적 추론과 증명 교육의 새로운 평가는 미국 수학 교육과정 개혁 운동에도 반영되어, 증명 교육에 대한 구체적인 안내를 명시적으로 제공하지 않았던 1989년 NCTM 학교수학 규준집(NCTM, 1989)에 비해 2000년도에 발간된 규준집에서는 다섯 가지 '과정규준(process standards)' 중에 한 영역으로 '추론과 증명'을 명시적으로 포함시켰다(NCTM, 2000).

학교 수학 교육과정에서 증명 활동의 강조는 수학교육 연구자들로 하여금 증명에 대한 학생 및 교사들의 이해도를 조사하는 연구로 관심을 가지게 했다. Ball(1988), Ma(1999), 그리고 Kim (2007) 연구에서는 미국, 중국, 한국의 예비 수학 교사 및 현장 수학교사들에게 가상의 시나리오 문제를 통해서 수학적 추론과 그 정당화 과정에 대한 잘못된 지식을 가진 학생에게 어떻게 반응하는지를 조사한 바 있다. 그 결과, 많은 수학교사들이 자신부터 수학적 증명에 대한 개념적 이해가 부족하여 그 학생에게 적절한 피드백을 제공하지 못하는 사례가 다수 발견되었다. 또한 Knuth(2002, p.381)는 16명의 중등학교 수학 교사들의 증명에 대한 관념을 분석하기 위한 개념적 틀을 구성하는 과정에서 기존 연구자들(Bell, 1976; de Villiers, 1999; Hanna, 1983)에 의해 제시된 수학 내 증명의 5가지 역할을 제시하였다. 그 첫 번째 역할은 수학에서 어떤 명제가 참인지 아닌지 판단하는 것이며(Hanna, 1983), 두 번째 역할은 왜 그 명제가 참인지 설명하는 것이다(Hersh, 1993). 세 번째 역할은 명제가 참인 이유를 설명하는 과정에서 더욱 증명 자체에 대한 깊은 생각과 이해를 가져올 수 있을 뿐만 아니라, 다른 사람에게 자신의 생각을 전달함으로써 수학적 의사소통 능력을 향상 시키는 것이다. 네 번째 역할은 새로운 수학을 발견하거나 창조하는 것으

로서, 역사적으로 볼 때 수학자들은 순순하게 연역적 추론 과정에서 수많은 수학적 정리들을 발견해 왔다는 것을 그 증거로 하고 있다. 마지막 증명의 역할은 새로 발견된 수학적 결과들을 정의, 공리, 정리와 같은 연역적 체계내로 통합 정리하는 역할이다.

이처럼 수학적 증명 자체에 대한 연구와 증명을 가르치는 수학 교사들에 대한 연구는 활발히 진행되어 온 반면에, 정작 증명을 위한 가장 기초적 개념인 '명제' 그 자체에 대한 독립적 이론 연구와 실험연구는 거의 이루어 지지 않은 것이 사실이다. 간혹 연구자들이 증명 활동 과정에서 보이는 학생들의 오류를 언급하는 가운데 부분적으로 명제와 관련된 학습자들의 오류를 보고한 적은 있었는데, 예를 들면 Galbraith(1981)는 아동들이 증명과 설명을 구성하고, 그것을 평가하는 데 필요한 기능이나 개념에 대해 연구하는 과정에서 아동들이 명제와 조건의 문자적인 해석에서 어려움을 보인다는 사실을 보고한 바 있다. Galbraith는 아동들이 명제 문장을 해석할 때 진술의 어느 한 부분에만 집중하는 경향을 보이거나 제한된 근거로 완전히 진술을 평가하는 오류를 보이는가 하면, 명제 문장 내의 조건문에서 조건 그 자체에 따라 명제가 판단되어야 하는데, 아동들은 심정적이고 주관적인 관찰자의 관점에서 그 명제의 참과 거짓을 판단하는 경향이 있음을 보고하였다.

수학적 증명을 수행하기 위해서는 논증의 타당성(validity)과 진리성(truth)을 구분할 수 있어야 하며, 논증의 진리성은 논증 그 자체의 성질이 아니라 논증을 이루는 명제의 진리성으로부터 결정된다. 따라서 수학에서 진리성 있는 논증, 즉 증명을 확실히 이해하기 위해서는 논증에 사용되는 명제의 의미, 서로 다른 명제들과의 관계, 명제의 참과 거짓을 판단하기 위한 효과적인 방법 등을 개념적으로 충분히 이해하는 것이 요구된다. 이러한 명제 개념 이해의 중요성은 앞에서 Knuth(2002)가 언급한 수학적 증명의 역할에서도 엿 볼 수 있는데, 그가 증명의 역할로서 제일 먼저 언급한 것이 '어떤 주어진 명제가 참인지 거짓인지를 판단하고, 참인 명제가 왜 참인지를 설명하는 하는 것'이다. 이것은 증명 과정에서 가장 기본이 되는 능력이 명제의 참과 거짓을 말하고 그 이유를 논리적으로 설명할 수 있는 것이다. 이러한 관점에서 볼 때, 수학적 증명을 배우기에 앞서 학생들이 가장 먼저 그리고 가장 충실하게 학습해야 하는 내용이 명제의 속성과 명제들과의 관계라고 볼 수 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구는 경상남도에 소재한 중위권 대학 이공계 계열에 입학한 신입생 33명을 연구대상으로 선정하였다. 연구 대상자들은 우리나라 제 7차 수학과 교육과정 적용을 받은 학생들로, 33명 중 25명은 고등학교 때 선택과목으로 '수 I', '수 II', '미분과 적분'을 모두 이수하였지만 나머지 8명은 '수 I'을 이수한 후 '수 II'를 선택하지 않고 '미분과 적분', '이산수학', 혹은 '확률과 통계'를 이수한 학생들이다. 이들은 대학 입학 후 한 학기 동안 선형대수와 미분적분학을 이수하였고 '집합과 논리'는 이수하지 않았다. 본 연구의 목적이 고등학교 명제단원 학습 내용과 관계된 대학 신입생들의 이해를 조사하는 것으로, 연구 대상자들이 대학에서 미적분학과 선형대수를 한 학기 동안 배운 것이 본 연구 결과에 두 가지 경우로 작용할

수 있다고 연구 초기에 추측하였다. 한 가지 경우는 대학에서 미적분학과 선형대수를 학습한 것이 연구 대상자들의 명제에 대한 이해도를 향상시키는 역할을 한 경우이며, 다른 경우는 그 과목들을 배웠다고는 하나, 명제 단원 학습과 직접적으로 관련이 없으므로 영향을 미치지 않는다는 것이다. 전자의 경우라면 본 연구의 제한점으로 간주되며, 후자의 경우라면 본 연구의 대상자들은 연구 목적에 부합되도록 선택 되었다고 판단 할 수 있다.

2. 자료 수집

본 연구에서는 연구 대상자들에게 명제와 관련된 22문항을 2008년 2학기 초에 적용하였다. 평가 문항들이 담고 있는 내용 요소들은 연구자가 대학 기초 수학에서 다루는 수학적 추론과 증명을 이해하기 위해서 신입생들이 반드시 알아야 한다고 판단한 명제 개념들로 이루어졌으며, 그 구체적인 문제들은 고등학교 수준의 수학용 교재나 다른 논리학 관련 서적들로부터 발췌하여 수정·보완한 것이다. 하지만 본 연구에 사용된 대부분의 문제가 Susanna (2006)의 책으로부터 발췌되었음을 밝혀두고자 한다. 평가 문항들의 주제 영역별 분류표는 <표 III-1>과 같다.

3. 자료 분석

Knuth(2002)는 수학에서 증명의 역할을 (1) 어떤 명제가 참임을 보이는 것, (2) 왜 그 명제가 참인지 설명하는 것, (3) 수학적 지식을 의사소통하는 것, (4) 새로운 수학을 발견하거나 창조하는 것, (5) 어떤 공리론적 체계(axiomatic system)로 명제들을 조직화(systematize) 하는 것으로 설명 한 바 있다. 이 다섯 가지 수학적 증명의 역할은 다른 말로 수학적 증명을 할 수 있기 위해 요구되는 수행 능력으로 해석 될 수 있다. 본 연구에서는 고등학교 학생들이 수학적 증명을 성공적으로 수행하고 이해하기 위해

<표 III-1> 주제 영역별 평가 문항 분류표

주제	요구 능력	문항 번호	문항 수
① 명제의 정의	주어진 문장을 명제인 것과 아닌 것으로 판별하고 그 이유를 설명하기	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	9
② 명제의 부정	주어진 명제의 부정을 말하고, 그 이유를 설명하기	10, 11, 12, 13, 20	5
③ 명제의 역, 이 ,대우	주어진 명제의 역, 이, 대우를 인식할 수 있으며, 그것의 참과 거짓을 판단한 후, 이유 제시하기	14, 15, 16, 21	4
④ 필요조건 충분조건	주어진 명제의 필요조건과 충분조건을 인식하며, 그것의 참과 거짓을 판단하고 이유 설명하기	17, 18	2
⑤ 논리적 추론문제	추리 능력을 요구하는 일반 문제 상황에서 논리적으로 추론하고 결론을 내리며, 이유 설명하기	19, 22	2
총 문항 수			22

요구되는 능력으로 앞에서 제시한 다섯 가지 능력과 더불어 더 기초적인 능력으로 (6) 어떤 문장이 명제인지 아닌지 판별하는 것 (7) 왜 그 문장이 명제인지 설명하는 것 (8) 명제 사이의 관계를 이해하는 것을 추가하였다. 명제 사이의 관계를 이해하는 능력은 어떤 주어진 명제와 그 명제의 부정, 역, 이, 대우, 충분조건, 필요조건 등의 개념을 이해하고 그 관계를 파악하는 것을 의미한다. 본 연구에서는 연구 대상자들의 명제 관련 이해 정도를 분석하기 위하여 앞에서 언급한 (3), (4), (5)번을 제외한 나머지 5가지 요인들에 기초해서 <표 III-2>와 같은 개념적 분석 틀을 개발하였다. (3)번에 해당되는 '수학적 지식을 의사소통 하는 능력'은 본 연구에서 구체적인 검사 문항을 이용하여 측정한 요소가 아니므로 제외 시켰으며, (4)번과 (5)번은 대학 신입생들에게 요구할 수 있는 능력으로 보기에는 그 수준이 너무 높다고 판단하여 개념적 분석 틀에서 제외 시켰다.

Ⅳ. 연구결과

1. 명제관련 문제들에 대한 대학 신입생들의 반응

아래 <표 IV-1>은 신입생들에게 적용된 명제 문제들에 대한 각 주제 영역별 평균 정답률을 제시한 것이다. 전체적으로 볼 때, 명제의 정의에 관한 문항들에서 정답률이 가장 높았으며, 명제의 부정과 관련된 문항에서 가장 낮은 평균 정답률을 나타냈다.

가. 명제의 정의에 대한 신입생들의 반응

신입생들에게 적용된 총 23 문항 중에서 9문항이 명제인 것과 명제가 아닌 것을 판별하는 '명제의 정의'에 관한 문항이었으며, 이 주제 영역에 대한 신입생들의 평균 정답률(79.1%)은 5개 영역 중에서 가장 높았다. 이 결과는 대학 신입생들 대부분이 고등학교 명제단원 학습을

<표 III-2> 신입생들의 명제 관련 이해 정도 분석 틀

주 제	문항 번호	명제 판별(%)	명제 판별에 대한 이유제시(%)	명제의 참, 거짓 판정 (%)	명제의 참, 거짓에 대한 이유 제시(%)	명제 사이의 관계 이해(%)
① 명제의 정의	1,2,3,4,5,6,7,8,9					
② 명제의 부정	10, 11, 12, 13, 20					
③ 명제의 역, 이, 대우	14, 15, 16, 21					
④ 필요조건 충분조건	17, 18					
⑤ 논리적 추론문제	19					
	22					

<표 IV-1> 전체 평균 정답률 및 오답률 분석

주제 영역	정답률(%)	오답률(%)	무응답 (%)
명제의 정의	79.1	16.2	4.7
명제의 부정	9.1	62.4	29.1
명제의 역, 이, 대우	42.4	24.8	32.8
필요조건, 충분조건	28.8	38.2	33.0
논리적 추론 문제	57.6	21.2	21.2

통해 명제란 무엇인지에 대한 개념적 이해가 어느 정도 확립되었음을 보여준다. 명제의 정의와 관련된 문제에서 오답을 제시한 학생들의 반응지를 살펴보면, 다른 문항들에 비해 9번(54.5%), 5번(63.6%), 1번(66.6%) 순으로 정답률이 가장 낮게 나왔다. 이들 문항들에 대한 오답들의 대표적인 사례를 살펴보면 크게 두 가지 경우로 살펴 볼 수 있다. 첫 번째 경우는 명제의 의미를 이론적으로 정확히 알고는 있지만 문제 해결 상황에서는 자신의 주관적인 생각이나 기준을 적용하여 명제 인지 아닌지를 판단하는 경우이다. 두 번째 경우는 명제가 항상 '~이면 ~이다'라는 형식으로 표현되어 있다고 생각하는 경우이다. 이것은 평소에 명제 개념과 관련된 학습에서 여러 형태를 가지는 명제 문장을 경험하지 못하고 '~이면 ~이다' 라는 식의 문장만을 주로 경험한 것에서 오는 형식적 고착 현상으로 해석할 수 있을 것이다.

나. 명제의 부정에 대한 신입생들의 반응

명제의 부정 영역은 10번 문제에서만 42.4%의 정답률을 나타내고 나머지 11번, 12번, 13번, 20번 문항들에 대한 정답률은 모두 0%로 전체 평균 정답률이 9.1%로 나타났다. 우선 문제 10번에 대한 신입생들의 반응을 분석해 보면 아래 <표 IV-2>가 보여주는 바와 같이 전체 응답자 33명 중 14명이 정답을 제시하였고, 무응답자 7명을 제외한 오답자 12명 중에서 10명이 명제 '$a=b=c$'의 부정을 단순히 등호를 부정한 형태인 '$a\neq b\neq c$'로 제시하였다. 이것은 신입생들이 대수식으로 제시된 명제의 의미를 논리적으로 해석하고 추론하기보다는, 대수 기호로 연결된 명제의 의미를 직관적으로 단순하게 해석하고 조작하는 경향이 있음을 보여준다.

<표 IV-2> 문제 10번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	오답 유형	
				$a\neq b\neq c$	그 외
10	14	12	7	10	2

연구대상자들이 적용받은 7차 고등학교 수학과 교육과정에서는 단순 명제 형태(~이다)를 가지는 명제의 부정은 다루지만 11번, 12번, 13번, 20번 문제와 같이 조건명제의 형태(~이면 ~ 이다)를 가지는 명제들에 대한 부정은 다루지 않기 때문에 이 문항들에 대한 정답률이 낮을 것이라는 것은 연구 초부터 예상했던 바이다. 하지만 한 명도 이 문제들에 대한 정답을 제시하지 못한 것은 뜻밖의 결과로, 이 문항들에 대한 학생들의 오답 분석 결과는 <표 IV-3>에서 보여주고 있다. <표 IV- 3>이 나타내는 바와 같이 오답자들의 오답 유형은 공통적으로 세 가지로 나타났다.

첫 번째 오답 유형은 주어진 명제의 부정으로 그 명제의 '이'를 제시한 경우로, 4문항 모두에 걸쳐 전체 오답자 중 가장 많은 수의 응답자들이 이 오류에 속했다. 이것은 많은 학생들이 명제 '이'와 '부정'을 혼동하고 있음을 말해준다. 두 번째 유형의 오답은 주어진 명제의 '대우'를 그 명제의 부정으로 제시하는 경우로, 이 경우는 세가지 경우 중에서 가장 낮은 빈도를 나타낸다. 마지막 세 번째 오답 유형은 주어진 명제를 '$p\rightarrow q$'라 했을 때, 이 명제의 부정을 단순히 결론 부분만을 부정한 '$p\rightarrow \sim q$' 형태의 명제로 제시한 경우이다. 이 형태의 오류는 일상생활에서 사용하는 부정의 의미와 혼동된 경우로 볼 수 있다. 예를 들면, '나는 오늘 학교에 갔다'의 부정을 일상생활에서는 단순히 서술어를 부정하여 '나는 오늘 학교에 가지 않았다'고 말하듯이 학생들은 조건명제 형태의 문장도 단순히 서술어 부분(결론)을 부정

함으로써 그 명제의 부정을 얻을 수 있다고 생각하는 오류인 것이다.

다. 명제의 역, 이, 대우에 대한 신입생들의 반응

명제의 역, 이, 대우 영역에 속한 4 문항 중 3 문항은 주어진 참인 조건명제($p \to q$)에 역을 취한 명제($q \to p$), 대우명제($\sim q \to \sim p$), 그리고 '이' 명제($\sim p \to \sim q$)의 참과 거짓을 말하고 그 이유를 기술하는 문제들로 구성되어 있다. 나머지 한 문항은 주어진 참인 명제의 대우 명제를 찾는 객관식 문제였다. 이와 같은 문항들은 신입생들이 문제로 주어진 문장들이 주어진 명제의 역, 이, 대우 명제로 인식할 수 있는지, 또한 그 명제들의 참과 거짓을 논리적으로 판단할 수 있는지를 조사하기 위한 문제들이었다.

문제 14번에서 제시된 명제 ' x의 온도가 적어도 150° 이면 x는 끓는다'는 주어진 참인 명제 ' x가 끓고 있으면 온도는 적어도 150° 이어야 한다'의 역인 명제로서 원래 명제가 참이라고 해서 역을 취한 명제가 항상 참이라고 말할 수는 없다. 즉, x물질의 끓는점이 몇도인지에 따라서 14번의 명제는 참일 수도 있고 거짓일 수도 있는 것이다. <표 IV-4>가 보여주는 바와 같이 이 문항에 대한 정답자 수는 전체 33명 중 1명뿐이었으며, 오답자 23명 중 20명이 14번 문항에서 제시된 명제가 주어진 명제의 역 명제임을 인식하였음에도 불구하고 명제의 역과 부정을 혼동하여 결론을 거짓으로 판정하였다. 나머지 오답자 3명은 참인 명제의 역이 항상 참이 아니라는 사실을 알면서도 결론은 거짓으로 판별하는 오류를 범하였다.

문제 15번은 주어진 참인 조건명제의 대우명제를 인식하고 그것의 참과 거짓을 판별하는 문제로서 <표 IV-5>가 보여주는 바와 같이 전체 33명 중 23명이 정답을 제시하였으며, 오답자 한 명은 대우 명제임을 인식은 하였으나 거짓이라고 판정한 경우이다. 대우명제와 관련된 높은 정답률은 신입생들이 다른 명제 관계보다도 주어진 명제의 대우명제에 대해서는 대체적으로 분명하게 인식하고 있으며, 또한 주어진 명제와 그 대우명제의 진리 값이 같다는 사실

<표 IV-3> 문제 11, 12, 13, 20번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	오답유형		
				명제의 '이' 제시	명제의 '대우' 제시	$p \to \sim q$ 형태의 명제 제시
11	0	23	10	17	1	5
12	0	24	9	16	3	5
13	0	24	9	17	2	5
20	0	20	13	13	1	6

<표 IV-4> 문제 14번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	오류 유형	
				참인 명제의 역은 "거짓"	참인 명제의 역은 참인지 거짓인지 알 수 없으므로 "거짓"
14	1	23	9	20	3

을 잘 인식하고 있음을 알 수 있다. 이 추측은 대우명제를 찾는 21번 문제에서도 그대로 적용되어 전체 응답자 33명 중 31명이 21번 문제에서 정답을 제시하였다.

<표 IV-5> 문제 15번과 21번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	계
15	23	1	9	33
21	31	1	0	33

문제 16번은 주어진 참인 조건명제의 '이' 명제로서 x물질의 끓는점이 몇 도냐에 따라서 참이 될 수도 있고 거짓이 될 수 도 있다. 이 문제에 대한 전체 정답자 수는 33명 중 1명으로 문제 14번과 마찬가지로 아주 낮은 정답률을 나타내었다. 이것은 신입생들이 주어진 명제와 그 명제의 '이' 명제와의 관계를 개념적으로 이해하고 있지 못함을 보여준다. 아래 <표 IV-6>은 신입생들이 어떤 개념적 오류들을 범하고 있는지를 보여주고 있다.

문제 16번에서 발견한 첫 번째 오류 유형은 주어진 명제가 참이므로 그 명제의 조건과 결론을 각각 부정한 명제를 직관적으로 참이라고 판단한 경우로, 전체 오답자 21명 중 8명이 이 유형의 오류를 범하였다. 이 오류는 제시된 명제의 참과 거짓을 주어진 명제를 이용하여 엄격하게 논리적으로 추리하려고 하지 않고, 단순히 직관에 의해 판별하는 태도를 보였다. 두 번째로 많은 오답 유형은 주어진 조건명제와 그 명제의 '이' 명제를 논리적 동치 관계로 생각하는 경우로 전체 오답자 응답자 22명 중 7명이 이러한 오류를 범하였다. 그 외 다른 두 가지 오답 유형으로는 아무런 이유 제시 없이 거짓으로 판단하였거나, '이' 명제가 아닌 부정 명제, 역 명제, 혹은 대우 명제로 잘못 인식하여 범하는 오류들이었다.

라. 명제의 필요조건, 충분조건에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

명제의 '필요조건, 충분조건'과 관련된 문항들에 대한 전체 평균 정답률은 28.8%로 나타났으며, 이 영역에서의 무응답 비율은 전체 5개 영역 중에서 가장 높은 33.0%였다(<표 IV-1> 참조). 이 영역에 속한 17번과 18번 문항은 주어진 참인 명제 'x가 끓고 있으면 온도는 적어도 150° 이어야 한다'를 'P 이면 Q 이다' 형태의 문장으로 나타냈을 때, 명제 P와 Q의 관계를 'P는 Q이기 위한 충분조건'이냐 혹은 'Q는 P이기 위한 필요조건'이냐 식으로 물어보는 것이 아니라, 'P이기 위한 필요조건은 Q'이며, 'P이기 위한 충분조건은 Q'라는 식으로 물어보는 문제로 구성되었다. 이 두 문항들에 대한 신생들의 반응 분석 결과는 아래 <표 IV-7>에 제시되어 있다.

문제 17번에서 정답을 제시한 13명 중 5명만이 왜 'x가 끓기 위한 필요조건은 온도가 적어

<표 IV-6> 문제 16번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	오류 유형			
				직관적으로 '참'으로 판정한 경우	참인 명제의 '이' 명제는 '거짓'	이유 없이 '거짓'으로 판정한 경우	주어진 명제의 부정, 역, 대우로 잘못 인식한 경우
16	1	22	10	8	7	3	4

도 150° 인 것이다'라는 명제가 참인 이유를 '$p \;\substack{\text{충분조건} \\ \text{필요조건}}\; q$' 와 같은 논리 기호를 사용하여 설명하였으며, 나머지 8명은 아무런 설명 없이 참이라는 결론만을 제시하였다. 한편 이 문항에 대하여 오답인 '거짓'이다를 제시한 10명 중 6명이 공통적으로 '가정과 결론이 바뀌었다'라는 식의 이유를 제시하고 있는데, 이것은 충분조건과 필요조건의 의미를 조건명제 'P 이면 Q 이다' 형태에서 'P는 Q이기 위한 충분조건'이며, 'Q는 P이기 위한 필요조건'이다 라는 형식에 학생들의 사고가 고착되어 있음을 보여주는 것이다. 이러한 형식적고착 현상은 문제 18번에서도 다시 한번 더 확인되었다.

문제 18번에서 제시된 명제 'x가 끓기 위한 충분조건은 온도가 적어도 150° 인 것이다'는 주어진 참인 명제에 기초할 때 거짓인 명제이다. 총 응답자 33명 중 6명만이 정답인 '거짓'으로 판정하였고, 15명이 오답을, 그리고 나머지 12명은 무응답으로 반응했다. 여기서 주목할 점은 오답을 제시한 15명 중 11명이나 제시된 명제가 왜 참인지에 대한 이유로 $p \;\substack{\text{충분조건} \\ \text{필요조건}}\; q$ 와 같은 논리 기호를 이용하여 설명하였는데, 이들은 평소에 조건명제의 충분조건과 필요조건을 개념적으로 이해한 것이 아니라 'P 이면 Q 이다'라는 형식적 틀에 맞추어 충분조건과 필요조건을 암기 해 온 것으로 추측된다.

마. 논리적 추론을 요구하는 비형식 화된 문제들에 대한 신입생들의 반응 분석

신입생들에게 적용된 19 번과 22 번 문제는 고등학교 명제 단원 교과서나 교재에서 탐구활동 정도로 제시 될 수 있는 문제들로, 학생들의 통합적 논리 사고와 추리력을 요구하는 문제이다. 고등학교 1학년 교과서에서 가끔 볼 수 있는 22번 문제에서는 신입생들이 대체로 높은 정답률을 보여 전체 33명 중 25명이 정답을 제시하였으나, 비정형화된 논리 문제인 19번 문제에서는 33명 중 13명만이 정답을 제시하여 낮은 정답률을 보였다.

<표 IV-8> 19번 22번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	계
19	14	10	9	33
22	25	3	5	33

2. 명제 관련 개념들에 대한 대학 신입생들의 이해 수준 분석

아래 <표 IV-9>는 각 영역에서 정답을 제시한 학생들의 반응만을 <표 III-2>에서 언급한 개념적 분석 틀에 맞추어 분석한 것이다. 따라서 <표 IV-9>에 제시된 수치는 각 영역 내 정답자들을 대상으로 각 문제들이 요구했던 명제

<표 IV-7> 문제 17번, 18번에 대한 신입생들의 반응 분석 결과

문항	정답자 수	오답자 수	무응답자 수	오답 유형	
				'P 이면 Q 이다'라는 형식적 틀에 맞추어 충분조건과 필요조건을 판단하는 경우	그 외
17	13	10	10	6	4
18	6	15	12	11	4

관련 지식 능력을 성공적으로 수행한 학생들의 평균 비율을 나타낸 것이다. 예를 들면, 명제의 정의에 관한 문항은 1번부터 9번까지 해당되며, 이 문항들이 요구하는 명제 관련 이해 능력은 명제인지 아닌지를 판단하는 '명제 판별' 능력과 그 판단에 대한 이유를 제시하는 '명제 판별 이유제시' 능력 두 가지로 볼 수 있다. '명제판별'에 관한 평균 정답률(79.1%)은 이 영역내에서 정답을 제시한 반응자 수의 평균을 구하고, 그 수치를 총 인원수인 33명으로 나눈 후, 100을 곱한 값이다. '명제 판별 이유 제시' 항목에 대한 평균 성공률(31.6%)은 앞에서 명제 판별을 성공적으로 한 응답자 중에서 그 판단에 대한 적절한 이유를 제시한 응답자들의 평균 비율이다.

한편, 조건 명제의 부정 명제를 제시하고 그 이유를 설명하는 능력은 '명제사이의 관계 이해' 할 수 있는 능력으로 묶었으며, 이 능력을 소유한 응답자의 비율은 9.1% 였다. 명제의 역, 이, 대우에 관한 문항들은 명제의 참과 거짓을 판정하고(25.2%) 그 이유를 제시하는 것(18.1%)과 더불어 주어진 문장이 원래 참인 명제의 역, 이, 혹은 대우 명제인지를 인식하였는지가 중요하므로 '명제 사이의 관계 이해' 능력(27.2%)을 이 주제 영역의 분석틀에 포함시켰다. 단, 21번 문항은 대우 명제와 관련된 문항이었으나 객관식으로 출제되어 아래 분석에서는 제외 시켰다.

필요조건, 충분조건에 관한 영역에서는 기본적으로 주어진 명제의 참과 거짓을 말하고(28.7%) 그 이유를 제시하는 것(3.03%)이었지만 그보다는 조건명제 형태로 주어진 명제 내에서 충분조건과 필요조건의 의미를 개념적으로 파악하는 것이 중요했으므로 이러한 개념적 이해를 가지고 있는지를 분석하기 위해 '명제 사이의 관계 이해' 능력(28.7%)을 포함시켰다. 마지막으로 논리적 추론 영역 분석을 위해서는 여러 명제가 복잡하게 연결되어 있었던 문제 19번에 대해 명제의 참, 거짓 판정(42.4%)과 그 이유를 제시하는 능력(36.3%)을 분석하였고, 문제 21번은 객관식으로 제시된 문제로서 명제의 참과 거짓을 판단하는 능력(75.8%)만을 분석했다.

<표 IV-9> 신입생들의 명제 관련 개념 이해 정도 분석표

주 제	문항 번호	명제 판별(%)	명제 판별 이유 제시(%)	명제의 참, 거짓 판정 (%)	명제의 참, 거짓에 대한 이유 제시(%)	명제 사이의 관계 이해(%)
① 명제의 정의	1,2,3,4,5,6,7,8,9	79.1	31.6	-	-	-
② 명제의 부정	10, 11, 12, 13, 20	-	-	-	-	9.1
③명제의 역, 이 ,대우	14, 15, 16	-	-	25.2	18.1	27.2
④ 필요조건 충분조건	17, 18	-	-	28.7	3.03	28.7
⑤ 논리적 추론문제	19	-	-	42.4	36.3	-
	22			75.8	-	-

Ⅴ. 결론 및 제언

1. 연구결과 요약 및 해석

우리나라 제7차 수학과 교육과정에 따른 고등학교 10-가 단계의 명제 단원을 학습한 후, 대학에 입학한 신입생들의 명제 관련 개념들에 대한 이해 정도를 조사한 이번 연구에서는 다음과 같은 주요 사실들을 발견할 수 있었다.

첫째, 대부분의 연구대상 신입생들이 명제가 무엇인지에 대한 이론적 정의는 잘 숙지하고 있었으나, 막상 어떤 주어진 문장이 명제인지 아닌지를 판단하는 상황에서는 Galbraith(1981)가 지적한 것처럼 문장 진술의 어느 한 부분에만 집중하는 경향을 보이거나 자신의 심정적이고 주관적인 관점에서 판단하여 오답을 제시하는 경우가 많았다. 또한, 명제 판별을 정확하게 한 학생 중에서 그 판단의 근거를 명확하게 설명할 수 있었던 학생은 31.6%에 지나지 않아(<표 IV-9> 참조) 평소에 학생들이 명제 판별 상황에서 자신의 판단 근거를 다른 사람에게 설명하는 훈련이 거의 이루어지지 않고 있음을 보여준다. 명제의 정의와 관련된 문제 중에서 '$x=2^6$' 이 명제인지 아닌지를 묻는 질문에 대해 오답을 제시한 학생들이 예상외로 많았다는 것이 큰 특징이었다. 오답을 제시한 학생들 중에는 "참, 거짓의 구별이 명확하다", "계산할 수 있으므로"와 같은 이유를 제시하기도 했는데, 이것은 학생들이 '$x=2^6$' 에 들어있는 문자 x를 '임의의 수" 혹은 '임의의 양'을 나타내는 다가이름으로서의 변수로 인식하지 못하고 자리지기(place holder)로서의 미지수(unknown)로 착각하였기 때문이다. 즉, 문자 x에 대해 '문제해결 과정 학습에서 사용되는 자리지기로서의 미지수'로 보는 관념이 지배적인 학생들이 보일 수 있는 오류 중에 하나로 판단된다(Usiskin, 1988).

둘째, 제 7차 수학과 교육과정을 적용받은 신입생들은 고등학교 명제단원에서 주로 단순명제의 부정만 다룬 관계로, 복합 명제의 부정을 묻는 5문항 중에서 대수식으로 표현된 명제 '$a=b=c$' 를 제외한 나머지 4문제에서는 정답자가 아무도 없었다. 비록 고등학교 교육과정에서 다루지 않았다고 하지만 이공계 계열에 입학한 신입생들이므로 '~ 이면 ~이다' 형태를 가지는 간단한 명제의 부정은 일반적인 논리적 사유에 의해 도출해 낼 수 있을 것이라고 기대했으나, 예상외로 한명도 성공하지 못했다. 이것은 수학과 교육과정 내용 편성이 학생들의 수학적 능력에 어떤 영향을 미치는지를 보여주는 단적인 예가 될 수 있는데, 우연이든 원인으로 작용하였던 간에 결과적으로 교육과정에서 다루지 않은 수학적 주제에 대해서는 학생들도 낮은 이해도를 가지고 있다는 것을 보여준다. 한편, 명제 '$a=b=c$' 를 부정하는 문제에서는 오답을 제시한 12명 중 10명이 똑같은 답을 제시하였는데, 바로 등호를 단순히 부정한 "$a \neq b \neq c$"를 정답으로 제시하였다. 이런 유형의 학생들은 대수식으로 표현된 명제 '$a=b=c$' 의 의미를 해석하여 논리적으로 부정을 하지 못하고 단순히 직관적으로 등호를 부정하는 경우이다.

셋째, 원래 참으로 주어진 명제의 역, 이, 대우 명제를 인식할 수 있는가와 그 명제들과 원래 참인 명제간의 진위 관계를 묻는 문제에서 신입생들은 대조를 이루는 반응을 보였다. 원래 주어진 명제가 참일 때 그 명제의 역과 이 명제의 진위를 묻는 문제에서는 총 33명 중 단 한 명만이 두 문제에 대한 정답을 제시하였으나, 대우 명제의 진위를 묻는 15번, 21번 문제에서는 평균 81.8%의 높은 정답률을 보였다. 이런 결과는 주어진 조건명제의 역 혹은 '이' 명제가 부정 명제와 같이 반대 진리 값을 갖는

다고 착각한데서 기인한 것으로 보인다. 그에 비해 신입생들은 어떤 주어진 명제의 대우 명제가 원래 명제와 논리적으로 동치인 관계에 있다는 사실은 비교적 잘 알고 있었다.

넷째, '...이면...이다' 형태를 가지는 참인 명제에서 필요조건과 충분조건의 개념을 묻는 문항들에 대한 신입생들의 반응은 필요조건과 충분조건의 관계를 개념적으로 이해하고 있는 것이 아니라, '...이면...이다' 형식에 맞추어서 기계적으로 암기하는 경향이 있었다. 즉, 참인 명제 'p이면q이다' 형태에서 앞에 'p는 q가 되기 위한 충분조건이며, q는 p가 되기 위한 필요조건이다'라는 식으로 기계적으로 외우고 있어서 문제 18번과 같이 'p가 되기 위한 충분조건은 q이다'라고 제시된 경우에도 참이라고 응답한 학생이 많았다. 다시 말해 형식적으로 고착된 이해는 조건이 바뀐 문제 상황에서는 논리적으로 추론할 여지를 주지 않고 직관적으로 그 형식적 틀에 맞추어 답을 말하는 오류를 범하게 하는 것이다.

다섯째, 고등학교 수학 교과서에서 흔히 다루어지는 형태의 명제 문제가 아닌, 논리적 추론을 통해 종합적으로 결론을 내려야 했던 19번 문제에서는 총 33명 중 14명이 정답을 제시하여 비교적 낮은 정답률(42.4%)을 보였다(<표 IV-9> 참조). 하지만 특이한 점은 낮은 정답률에 비해 정답을 제시한 학생들 중에서 자신이 도출한 답이 어떻게 논리적으로 추론되었는지를 설명한 학생들의 비율이 36.3%로, 본 연구에서 이유를 제시하도록 요구 받았던 문항들 중에서 가장 높은 비율을 나타내었다. 이것은 통합적 논리 추론을 요구하는 정형화 되지 않은 논리 문제 상황을 잘 해결하는 학생들은 자신이 그 문제를 어떻게 해결 했는지에 대한 근거도 비교적 분명하게 설명할 수 있는 의사소통 능력을 가지고 있음을 보여준다.

2. 대학 신입생들의 명제에 대한 이해 실태

본 연구의 결과를 종합해 볼 때, 대학 신입생들에게 나타날 수 있는 명제 관련 개념들에 대한 이해의 어려움은 다음과 같은 유형들로 요약할 수 있다.

첫 째, 학생들은 명제는 ' ~이면 ~이다'라는 형식으로 표현되어 있다고 생각하는 선입관을 가지고 있다. 이로 인해 ' ~이면 ~이다'의 형태로 제시되지 않은 명제 문장을 명제로 받아들이는 데 어려움이 생긴다. 그 이유는 학생들이 명제인지 아닌지에 대한 판단을 명제의 정의에 기초하지 않고 명제는 ' ~이면 ~이다'와 같은 형식을 가진다는 개념 이미지에 의해 많은 영향을 받기 때문이다. 이러한 개념 이미지에 대한 고착 현상의 원인으로는 여러 측면을 살펴 볼 수 있겠지만, 무엇보다 교사나 수학 교재들이 명제를 처음 도입할 때 무의식적으로 ' ~이면 ~이다' 형태를 가지는 명제 문장들만을 빈번히 제시하는데 기인한다고 볼 수 있다. 이로 인해 학생들도 그런 특수한 경험에만 집착하는 경향이 나타나기 때문이다. 이러한 잘못된 개념 이미지에서 벗어나기 위해서는 교사나 교재들이 명제 개념을 도입하는데 있어서 ' ~이면 ~이다' 형태의 문장 외에도 다양한 형태를 가지는 명제들을 학생들이 경험할 수 있도록 해야 할 것이다.

둘째, 주어진 조건 명제의 부정 명제를 제시하는데 있어서 단순히 결론 부분을 부정하는 경향이 빈번히 일어난다. 본 연구에서도 많은 대학 신입생들이 명제 'P가 정사각형이면 P는사각형이다'의 부정을 결론 부분인 'P는사각형이다'를 부정함으로써 제시한 바 있다. 이러한 오류는 학생들이 논리적 엄밀성에 기초한 명제의 부정과 일상생활 용어에서 직관적으로 행하는 문장의

부정을 혼동하는데서 기인한다. 이러한 혼동을 피하기 위해서는 조건 명제의 부정을 논리적 기호를 사용하여 기계적으로 찾아내거나, 단순히 직관에 기초하여 부정하는 학습 활동을 지양하고, 주어진 명제와 그 명제의 부정 명제가 왜 논리적으로 반대의 진리 값을 가지는지에 대해 따져보고 토론하는 기회를 학생들이 가질 필요가 있다. 이런 활동을 통해서 학생들은 성급하게 직관에 기초해서 주어진 명제의 부정을 제시하기 보다는 여러 경우를 두고 논리적으로 따져보는 사고의 태도를 점차 가지게 될 것이다.

셋째, 학생들은 p에 의한 q의 조건명제(conditional statement) 형태를 가지고서 배우게 되는 조건명제의 역, 이, 대우 명제를 논리적 동치 관계 측면에서 이해하기 보다는 단순히 형식적 조작에 근거해서 이해하고 있는 경우가 많다. 실제로 본 연구에서도 신입생들이 주어진 조건명제의 역, 이, 대우 명제를 제시하는 것에 대해서는 별 어려움이 없었으나, 원래 주어진 조건 명제와 제시한 역, 이, 대우 명제들 간의 논리적 동치 관계를 파악하는데 있어서는 어려움을 보였다. 특히, 주어진 조건명제의 역 명제와 이 명제를 논리적으로 동치인 관계로 혼동하는 경우가 빈번하였다. 이것은 학생들이 주어진 조건 명제의 가정과 결론이 무엇인지, 또 그 명제가 나타내는 의미가 무엇인지를 고려하지 않고, 거의 반사적으로 주어진 명제의 역, 이, 대우를 피상적인 알고리즘 수준에서 제시하는 잘못된 학습 경험에 기인한다고 볼 수 있다. 따라서 학생들은 조건명제의 역, 이, 대우 명제들을 논할 때, 주어진 명제의 조건과 결론들을 다양하게 변화 시켜 봄으로써 원래 명제와는 논리적으로 어떤 관계를 갖게 되는지 비교하고 탐색하는 경험을 할 필요가 있다.

넷째, 학생들은 논리적 동치 관계에 있는 명제들을 아는 것에 대한 유용성을 거의 경험하지 못한 채, 주어진 명제의 역, 이, 대우 명제를 논리적 기호나 법칙에 의거하여 제시하는 활동 그 자체에만 집중하는 경향이 있다. 논리적 동치 관계에 있는 명제를 아는 것의 유용성을 보여주는 예로 부정논법(modus tollens)이나 대우에 의한 증명법(contraposition method of proof)을 말할 수 있다. 명제 "자연수 n에 대하여 n^2이 짝수이면 n도 짝수임을 밝혀라' 라는 증명 문제가 있다고 했을 때, 이 명제가 참임을 증명하기 위해서는 논리적 동치관계에 있는 '자연수 n에 대하여 n이 홀수이면 n^2도 홀수 이다'를 이용하는 것이 훨씬 사고과정이 덜 복잡하고 쉽다. 바로 이러한 유용성을 학생들이 직접 경험하게 될 때, 학생들 스스로 명제 학습에 대한 중요성을 인식할 수 있을 것이다.

이상과 같이 대학 신입생들의 명제에 대한 이해 실태 보고를 마치며, 마지막으로 명제 관련 개념 지도의 방향성에 대해 간략히 언급하고자 한다. 명제 교육은 무의미한 논리적 기호 조작이나 논리 법칙의 암기에 그 목적이 있는 것이 아니라, 타당하며 무모순적인 수학적 증명 과정을 배우기 위한 기초 태도를 다지는 과정으로 인식되어야 할 필요가 있다. 본문에서 언급되었던 예로서, 조건명제의 부정 명제를 단순히 결과를 부정함으로서 얻으려 한다거나, 필요조건과 충분조건의 관계를 논리적 관계로서 파악하려 하지 않고, 논리 기호를 이용한 표현 형식에만 집착하여 판단하는 것과 같은 부주의한 태도는 수학을 하는데 있어서 가장 주의해야하는 태도이다. 교사들은 학생들이 명제를 조작하고 명제들 간의 논리적 동치 관계를 따져 볼 때, Skemp(1987)가 말한 '반영적 지능'을 최대한 사용하여 가능한 모순을 제거하고 논리적으로 타당하고 정당한 결론을 내릴 수 있도록 적절한 발문과 토론 분위기를 제공해야 한다. 또한 단순히 '직관적 지능'에 의존

하여 명제 문제를 해결했을 때, 어떤 논리적 모순과 오류들이 발생할 수 있는지에 대한 구체적 경험들을 학생들이 할 수 있도록 학습 활동을 구성해야 한다. 이러한 명제 학습 활동을 통해서 학생들이 얻을 수 있는 태도는 어떤 주어진 현상에 대한 진위를 판단함에 있어서 협소적인 몇 개의 사례에 기초한다거나 직관에 기초하여 경솔하게 결론을 내리기 보다는, 여러 상황과 조건들을 따져보고 신중하게 결론을 내리려는 태도이다. 이런 태도는 비단 수학 학습에서만 요구되는 태도가 아니라, 일반 사회생활에서 어떤 의사결정을 내릴 때 최대한 합리적이고 여러 상황을 고려한 판단을 내리려는 태도로 이어지게 될 것이다.

참고문헌

교육부(1997). **중학교 수학과 교육 과정 해설서.** (교육부 고시 제 1997-15호). 서울: 대한교과서주식회사.

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정.** (교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8]). 서울: 대한교과서주식회사.

이춘분(2007). **증명에서의 명제에 대한 오류 분석 : 중학교 8-나 도형 중심으로,** 단국대학교 석사학위논문.

임지혜(2008). **"명제"단원 문제해결 과정에서 발생하는 오류원인 분석 및 오류 교정후의 효과,** 한국교원대학교 석사학위논문.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

조정희(1995). **고등학교에서의 명제와 논리지도에 관한 연구,** 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

Ball, D. L. (1988). *Knowledge and reasoning in mathematical pedagogy: Examining what prospective teachers bring to teacher education.* Unpublished doctoral dissertation. Michigan State University, East Lansing.

Bell, A. W.(1976). A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.

Cooney, T. J., Davis, E. J., & Henderson, K. B.(1975). Dynamics of teaching secondary school mathematics. Boston: Houghton Mifflin.

de Villers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24.

Dewey, J. & McLellan, J. A. (1895). *The psychology of number: And its applications to methods of teaching Arithmetic.* New York: D, Appleton & Company.

Galbraith, P. L.(1981). Aspects of proving: A clinical investigation of process. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 1, 1-28

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education.* Toronto: Oise Press.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399.

Jack R. F. & Norman, E. W. (2006). *How to design and evaluate research in education* (6th ed.). NY: McGraw-Hill Companies.

Kim, Y. O. (2007). Middle school mathematics teachers' subject matter knowledge for teaching in China and Korea. Unpublished doctoral dissertation. Indiana University Bloomington.

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33, 5, 379-405.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations-The logic of mathematical discovery*. Cambridge Univ. Press.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation Standards for school mathematics*. Reston, VA: The Author.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Piaget, J.(1965). *The child's conception of number*. W. W. Norton & Company, Inc.

Polya, G.(1990). *Mathematics and plausible reasoning (Volume I)*. Princeton University Press.

Rodd, M.(2000). On mathematical warrants'. *Mathematical Thinking and Learning, 3*, 22-224.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical monthly, 3*, 252-255.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 55-80.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers Hillsdale,

Susanna S. E (2006). *Discrete mathematics with application.*(3rd ed.). Thomson Learning, Inc.

Usiskin, Z.(1988). Conceptions of school algebra and uses of variables, *In the Ideas of Algebra K-12*, NCTM 1988 Yearbook. 8-19.

Weston, A. (2000). *A rulebook for arguments.* Hackett Publishing Company, Inc. Indianapolis/Cambridge(3rd ed.).

Wu, H. (1996). The role of Euclidean geometry in high school. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 221-237.

First-year Undergraduate Students' Understanding about Statements

Kim Young Ok (Kyungnam University)

This study was motivated by recognizing the weakness of teaching and learning about the concepts of statements in high school mathematics curriculum. To report the reality of students' understanding about statements, this study investigated the 33 first-year undergraduate students' understanding about the concepts of statements by giving them 22 statement problems. The problems were selected based on the conceptual framework including five types of statement concepts which are considered as the key ideas for understanding mathematical reasoning and proof in college level mathematics. The analysis of the participants' responses to the statement problems found that their understanding about the concepts of prepositions are very limited and extremely based on the instrumental understanding applying an appropriate remembered rule to the solution of a preposition problem without knowing why the rule works. The results from this study will give the information for effective teaching and learning of statements in college level mathematics, and give the direction for the future reforming the unite of statements in high school mathematics curriculum as well.

* key words : statements(명제), concepts related to prepositions(명제 관련 개념), the curriculum of high school mathematics(고등학교 수학 교육과정), students' understanding of prepositions(명제에 대한 학생들의 이해)

논문접수 : 2009. 4. 30
논문수정 : 2009. 6. 3
심사완료 : 2009. 6. 12

<부록> 명제 평가 문항

학번 : 이름 :

※다음 문장에서 참과 거짓을 판별할 수 있는 문장과 그렇지 않은 문장을 구별해 보시오. 그리고 간단한 이유를 말하시오.(1~9)

1. 세계에서 9번째로 긴 다리인 서해 대교가 완공되었다.

2. 첨단과 예술이 만난 A아파트는 주거와 투자의 완벽한 조화를 보장합니다.

3. B 식품에는 유산균이 발효유 법정 기준치의 300배가 들어 있다. (B는 어느 특정 상품을 지칭한다고 가정하자)

4. C 피자는 맛과 가격을 동시에 만족시켜 드립니다.
(C는 어느 특정 회사명을 지칭한다고 가정하자)

5. 수학 중간고사 결과, D 학습지로 공부한 E 고등학교 학생 중 30%가 만점을 획득하였다. (D는 어느 특정 학습지 이름이며, E도 어느 특정 고등학교 이름이라고 가정하자)

6. 1,024는 어떤 수의 제곱이 되는 네 자리 수 중 가장 작은 수이다.

7. 2+1 은 5이다

8. $\sqrt{3}$의 십진법 확장에 있는 제 105 소수 자리에 있는 숫자는 7이다.

9. $x=2^6$

※ 다음 문장의 부정을 말하고, 그 이유를 간단히 설명하시오.(10~13)

10. $a=b=c$

11. P가 정사각형이면 P는 사각형이다.

12. n이 소수이면 n은 홀수이거나 2이다.

13. n이 6으로 나누어 떨어지면 n은 2로 나누어 떨어지고 n은 3으로 나누어 떨어진다.

※ "x가 끓고 있으면 온도는 적어도 150°이어야 한다."라는 명제가 참이라고 가정하면, 아래 문장 중 어느 것이 참인지 거짓인지 말하고 그 이유을 간단히 말하시오.(14~19)

14. x의 온도가 적어도 150°이면 x는 끓고 있다.

15. x는 온도가 150°보다 낮으면 x는 끓고 있지 않다.

16. x가 끓고 있지 않으면, 온도가 150°미만이다.

17. x가 끓기 위한 필요조건은 온도가 적어도 150°인 것이다.

18. x가 끓기 위한 충분조건은 온도가 적어도 150°인 것이다.

19. 누가 진실을 말하는가?

P섬에 사는 사람들은 모두 진실만을 말하고, Q섬에 사는 사람들은 모두 거짓만을 말한다. 이 두 섬으로부터 온 세 사람 A, B, C가 있다. A에게 어디서 왔는냐고 물었더니 잘 알아들을 수 없도록 말을 했다. B에게 A가 뭐라고 말했는냐고 물었더니 B는 "A는 Q섬에서 왔다고 말했다."고 했고, 이 말을 들은 C는 "B는 거짓을 말하고 있소."라고 말했다.

a. 누가 진실을 말하고 있는가?

b. 이유를 설명하시오.

20. a, b, c가 실수일 때,

명제 「$a^2+c^2=2b(a+c-b)$이면 $a=b=c$이다.」를 부정하시오.

21. 명제「국가간 축구 시합에서 한·일전은 항상 한국이 승리한다.」가 참일 때, 다음 중 항상 참인 것은?

① 국가간 축구시합에서 한국이 승리하면 한·일전이다.

② 국가간 축구시합에서 한·일전이 아니면 한국은 승리한다.

③ 국가간 축구시합에서 한·일전이 아니면 한국은 승리하지 않는다.

④ 국가간 축구시합에서 한국이 승리하지 않으면 한·일전이 아니다.

⑤ 국가간 축구시합에서 한·일전에서만 한국이 승리한다.

22. A, B, C, D, E의 5가지 상품을 파는 가게가 있다. 가계주인은 다음과 같은 5가지 조건을 내걸고 이를 지키는 손님에게만 상품을 판다. 어느 손님이 물건을 사 가지고 왔다면 이 손님이 산 물건은?

Ⅰ. A를 사려면 B도 사야한다.

Ⅱ. D와 E중에서 적어도 한 가지를 사야 한다.

Ⅲ. B와 C중에서 한 가지 밖에 살 수 없다.

Ⅳ. C와 D를 사려면 둘 다 사야한다.

Ⅴ. E를 사려면 A와 D도 꼭 사야 한다.

① A, B ② B, D

③ C, D ④ B, C, D

⑤ A, B, C, D, E

<수고하셨습니다.>