대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 243-260. Jun. 2009

일반화된 피보나치수열의 탐구를 위한 예비중등교사용 교수단원의 설계[1)]

김 진 환[*] · 박 교 식[**]

이 연구에서는 예비중등교사들이 수학화를 실제적으로 경험하도록 일반화된 피보나치수열의 일반항을 구하는데 유용한 공식을 찾고, 연속하는 두 항의 비율에 대한 극한을 탐구하는 교수단원을 설계한다. 예비중등교사들은 이 교수단원을 통해 자연수 n의 Fm형 k-분할의 수 F(n, m; k)를 조합으로 표현하는 과정을 탐구함으로써 일반화된 피보나치수열의 각 항을 구하는 공식을 찾을 수 있다. 이러한 공식을 CAS형 그래핑 계산기에 직접 넣어 구체적인 피보나치수를 구할 수 있고, 일반화된 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비율로 얻어지는 수열이 수렴한다는 추측을 할 수 있게 해 준다. 이러한 사실을 바탕으로 일반형의 피보나치수열의 연속하는 항의 비율로 만든 수열의 극한에 대해 논한다. 이 교수단원을 통해 예비중등교사들은 중복조합, 조합, 포함과 배제의 원리, 연속함수의 중간값의 정리, 이차방정식 및 삼차방정식의 해법을 되새기고 이를 활용하여 수학을 발명하는 경험을 할 수 있다.

Ⅰ. 서 론

수학화는 간단히 말해 수학을 만드는 메커니즘이다(Freudenthal, 1973, 1983, 2008). 수학자들은 조직할 필요가 있는 현실 즉, '현상(phainomenon)'을 임의적으로 선택하고, 그리고 그것을 조직하기 위한 수단으로서의 새로운 수학 즉, '본질(nooumenon)'을 고안한다. 본질이 현상을 조직하고 나면, 그 본질을 새로운 현상으로 보고, 다시 그것을 조직하는 새로운 본질을 고안하는 새로운 수학화가 계속될 수 있다. 학교수학의 지도에서도 이러한 수학화를 추구한다(박교식, 1992; 정영옥, 1997; 우정호, 2000). 학교수학을 가르치고 배우는 것은 바로 수학화를 가르치고 배우는 것이다. 학생들은 수학화를 배워야 하고, 수학교사는 수학화를 가르쳐야 한다. 이 연구에서는 예비중등교사들이 장차 중등학교에서 학생들에게 수학화를 가르칠 수 있는 소양을 길러줄 수 있도록 탐구 과제로 이루어진 교수단원을 설계한다.

프로이덴탈(1973, 2008)은 수학화를 바탕으로 하는 교수·학습을 강조하고 여러 가지 예를 제시하기는 하였으나, 교수·학습의 차원에서 수학화의 실제에 관한 아이디어를 체계적으로 제시하지는 않았다. 그래서 이 연구에서는 비트만(Wittmann, 1984, 1995, 1999, 2001)의 교수단원에서 그러한 아이디어의 구현 방안을 찾고 있다. 그는 설계 과학의 관점에서 교수단원을 제시하고 있는 바, 그것은 적절한 수학적 소재를 위계적이고 순차적인 방식으로 제시한 프로그램이다. 이 연구에서는 예비중등교사들의 수

---

* 교신저자, 영남대학교(kimjh@ynu.ac.kr)
** 경인교육대학교(pkspark@gin.ac.kr)
1) 이 연구는 2008학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임.

학화 경험을 위한 교수단원을 설계하고자 하는 바, 이 설계에서 가장 중요한 것은 의미 있는 소재의 개발이다. 즉, 예비중등교사들의 입장에서 진정한 수학화를 경험할 수 있는 소재가 필요하다. 예를 들어 그러한 소재로 김진환과 박교식(2006)은 수 분할모델을 제시하였고, 김진환, 박교식, 이광호(2006)에서는 일정한 차를 갖는 수 분할모델을 제시하였으며, 김진환과 박교식(2008)은 m-단계의 피보나치수열이 Fm형 분할 모델의 해인 분할의 수로 모델화됨을 보였다.

이 연구에서는 첫째로, N형 분할과 무한형의 피보나치수열의 일반항을 조합을 이용하여 표현하는 공식을 구하고, 둘째로 Fm형 분할과 m-단계의 피보나치수열의 각 항을 조합을 이용하여 표현하는 공식을 구하고, 셋째로 일반화된 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비율의 극한을 구하는 교수단원을 설계한다. 이 과정에서 김진환과 박교식(2008)에서 사용한 용어와 기호를 그대로 사용한다. 여기서 찾은 공식을 이용하면 복잡한 알고리즘의 조작 없이 Texas Instruments의 Voyage 200과 같은 CAS형 그래핑 계산기 등을 사용하여 피보나치수를 쉽게 계산할 수 있다. 더 나아가 m-단계의 피보나치수열의 연속하는 비율의 극한을 단계적으로 추정하고 방정식의 해법으로 그 극한을 찾을 수 있다.

II. 분할모델과 일반화된 피보나치수열

피보나치수열은 "한 쌍의 새끼 토끼가 한 달이 되면 어미가 되고 어미가 되면 매월 한 쌍의 새끼를 낳는다고 하면 처음 한 쌍의 새끼 토끼로부터 1년 뒤에는 모두 몇 쌍의 토끼를 있게 되는가? (모두 377쌍의 토끼가 있게 된다)"에서 비롯되었다. 피보나치수열은 수학에서뿐만 아니라, 다양한 자연 현상과 생물체, 예술과 건축물, 음악과 시, 과학과 공학 등에서 자연스럽게 취급되고 있다. 1960년에 Verner Hoggatt를 중심으로 피보나치 협회가 창설되고, 1962년 이래로 <The Fibonacci Quarterly>라는 전문 계간지가 출판될 정도로 피보나치수열은 수학적 연구의 보고이다(Garland, 1987).

피보나치수열은 $a_0=1$, $a_1=1$로 하고 $a_2=a_0+a_1$, $a_3=a_1+a_2$, … 등을 나타내는 점화관계식

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1} \ (n \geq 2)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$이다. 이 수열은

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

로 주어진다. 이 통상적인 피보나치수열을 2-단계의 피보나치수열이라 하자. 이 이름은 m-단계의 피보나치수열로의 일반화에 대비하기 위한 것이다. m-단계의 피보나치수열은 통상적인 피보나치수열을 일반화한 것으로

$$a_0=1,\ \ a_1=1,\ a_2=2,\ \ a_3=4=2^2,\ \ a_4=8=2^3,\ \cdots,\ a_{m-1}=2^{m-2}$$

이고, 점화관계식

$$a_n = a_{n-m} + a_{n-m+1} + \cdots + a_{n-1} = \sum_{i=1}^{m} a_{n-i} \ (n \geq m)$$

을 만족하는 수열 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$이다. 특히 $a_0=1$, $a_1=1$, $a_2=1$, …, $a_n=1$, … 로 주어지는 수열 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$을 퇴화된 피보나치수열로 보고, 1-단계의 피보나치수열이라고 한다.

임의의 자연수 m에 대하여, 수열 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$이 m-단계의 피보나치수열이면 a_n은 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다:

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2^{n-1} & (1 \leq n < m) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{n-i} & (m \leq n) \end{cases}$$

이러한 형식에 맞추어 다음의 성질을 갖는 수열 $\{a_n\}(n=0, 1, 2, \cdots)$을 정의할 수 있다.

$$a_0=1,\ a_1=a_0,\ a_2=a_0+a_1,\ a_3=a_0+a_1+a_2,\ \cdots,$$

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i\ ,\ \cdots$$

이 수열 $\{a_n\}$을 무한형의 피보나치수열이라 하자. 즉, 무한형의 피보나치수열은

$$a_0 = 1,\ a_1 = 1 = 2^0,\ a_2 = 2^1,$$

$$a_3 = 1+1+2 = 2^2,\ a_4 = 1+1+2+2^2 = 2^3,\ \cdots,$$

$$a_n = 1+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-2} = 2^{n-1},\ \cdots$$

로 주어진다.

김진환과 박교식(2006)은 수의 유한 배열, 일정한 넓이의 가로와 세로의 길이, 자연수에 대한 통상적 분할 등을 수 분할의 관점에서 통합한 다음, 이를 일반화하여 수 S의 k-분할모델을 정의했다. 그 분할 모델의 유형은 분할원소로 허용하는 값의 범위와 분할원소에 대한 k-1개의 관계로 구성된 인접관계 R에 의해 결정된다. 이 연구에서는 분할모델의 특별한 상황으로 분할될 수 S가 자연수 n이고, n의 k-분할모델에서 분할원소가 정수의 부분집합 A에 속하면서 분할원소 사이의 인접관계 $R =(R_1, R_2, \cdots, R_{k-1})$의 A에서의 관계 R_i는 다음과 같이 주어진다.

$$p_i\ R_i\ p_{i+1} \Leftrightarrow p_i, p_{i+1} \in A \quad (i=1, 2, \cdots, k-1)$$

이러한 인접관계는 두 인접원소 사이의 제약조건을 최소화한다. 이 분할 모델의 해인 n의 k-분할은 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$로 나타내도록 한다.

이 연구에서 취급되는 정수 집합 Z의 부분집합 A는 다음과 같이 주어진다.

$$Z_m=\{1, 2, \cdots, m\}\ (m=1, 2, 3, \cdots)$$

$$Z^+=\{1, 2, 3, \cdots\}$$

$$Z^+ \cup \{0\}=\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

이처럼 원소에 부여되는 조건 및 인접한 두 원소의 관계에 따른 분할모델의 유형을 <표 Ⅱ-1>처럼 정하기로 한다.

김진환과 박교식(2008)은 m-단계의 피보나치 수열에 대한 하나의 모델을 구성하기 위해 자연수 n의 Fm형 k-분할모델을 사용하였고 이를 통해 예비중등교사들이 분할의 수와 피보나치 수열 사이의 관계를 찾게 하고 있다. 그 내용을 살펴보면 분할원소 p_i (i=1, 2, ⋯, k)는 Z_m (m=1, 2, 3, ⋯)에 속하도록 제한하여 Fm형 분할 모델을 제시한다. 예비중등교사들에게 탐구문제를 제시하고 이를 해결하는 과정에서 스스로 필요한 기호를 고안하도록 고무한다. 특히 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 k-분할의 수와 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수를 나타내는 기호가 필요하다. 예를 들어 기호 $F(n, m; k)$는 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 k-분할의 수, 즉 n의 Fm형 k-분할의 수를 나타내는 것으로 한다.

기호 $F(n, m)$은 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수를 나타내는 것으로 n

<표 Ⅱ-1> 원소 및 원소의 차의 조건에 따른 분할모델의 유형

분할모델의 유형	분할원소	인접관계
$N*$형	$Z^+ \cup \{0\}$	인접한 두 원소가 $Z^+ \cup \{0\}$에 포함
N형	Z^+	인접한 두 원소가 Z^+에 포함
Fm형	Z_m	인접한 두 원소가 Z_m에 포함

의 Fm형 분할의 총수이다.

특히, n < k이면 $F(n, m; k)=0$ 이므로

$$F(n, m) = \sum_{k=1}^{n} F(n, m; k)$$

이다. 예를 들어 $F(5, 3)$은 분할원소가 Z_3에 속하는 자연수 5의 전체 분할의 수 즉, 자연수 5의 $F3$형 1-분할, 2-분할, 3-분할, 4-분할, 5-분할의 수를 모두 더한 것이다.

특별히 이론적 편의를 위하여 $F(0, m)=1$로 두기로 한다. 김진환과 박교식(2008)에 따르면

$$F(1, m)=1=2^0,\ F(2, m)=2=2^1,\ F(3, m)=4=2^2,$$
$$F(4, m) = 8 = 2^3, \cdots, F(m-1, m) = 2^{m-2},$$
$$F(n, m) = F(n-m, m) + F(n-m+1, m) + \cdots + F(n-1, m)$$

이 성립하므로, n의 Fm형 분할의 총수를 나타내는 수열 $\{F(n, m)\}$이 m-단계의 피보나치수열임을 확인할 수 있다.

Fm형 분할에 대한 기호 형식에 따라 분할원소가 Z^+에 속하는 자연수 n의 k-분할의 수 즉, n의 N형 k-분할의 수를 $F(n, \infty; k)$로 나타내고, 기호 $F(n, \infty)$는 분할원소가 Z^+에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수 즉, n의 N형 분할의 총수를 나타내는 것으로 한다.

III. N 형 분할과 무한형의 피보나치수열

여기서는 N형 분할과 무한형의 피보나치수열의 일반항을 조합을 이용하여 구하는 교수단원을 설계한다. 이를 위해 특수한 경우로부터 일반적인 경우로의 확장을 요구하는 탐구문제를 설정하고, 그 해결과정을 위계적으로 제시한다. 예비중등교사들은 이 탐구 문제가 제공하는 현상을 조직하기 위해 일반적인 분할모델의 분할 수에 대한 패턴을 찾아 공식화해야 한다. 그들은 분할모델이 일반적인 피보나치수열을 탐구하는 수학적 모델임을 토대로, 분할모델의 분할의 수를 중복조합을 사용해서 조직화하고 또, 그것을 피보나치수와 관련지어야 한다. 그들은 이 탐구문제를 해결하는 과정에서 귀납 결과를 바탕으로 패턴을 찾아 공식을 만들게 된다.

[탐구 문제] **(1)** 각 분할 원소 p_i (i=1, 2. ⋯, k)는 $Z^+ \cup \{0\}$에 속하는 $N*$형 k-분할모델에 대해 다룬다. 분할될 수가 6일 때, $N*$형 2-분할이 몇 개 있는지, $N*$형 3-분할이 몇 개 있는지 각각 조사하여라. 이것을 일반화하여 자연수 n의 $N*$형 k-분할은 모두 몇 개 있는지를 공식화하여라. **(2)** 각 분할 원소 p_i (i=1, 2, ⋯, k)는 Z^+에 속하는 N형 k-분할모델에 대해 다룬다. 분할될 수 6일 때, N형 3-분할이 몇 개 있는지 찾아보아라. 이것을 일반화하여 분할될 수가 자연수 n일 때, N형 k-분할은 모두 몇 개 있는지 공식화하여라.

[탐구문제] (1)의 6의 $N*$형 2-분할의 수를 구하기 위하여 2-분할을 다음의 몇 개의 예처럼 우선 6개의 구별되지 않는 검정바둑돌 ●을 일렬로 늘어놓은 나열된 순서에 따라 바둑돌에 번호를 붙인다. 1개의 막대 | 로 사용하여 두 개의 부분(바둑돌이 배분되지 않는 부분도 허용)으로 나누는 방법에 대응시킨다.

[1] 나열하여 번호 매김: ❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻

[2] 1개의 | 을 가지고 두 부분으로 나눔: 예를 들면 다음과 같다.

❶ ❷ ❸ ❹ ❺ | ❻ ↔ (5,1)

❶ | ❷ ❸ ❹ ❺ ❻ ↔ (1,5)

❶ ❷ ❸ | ❹ ❺ ❻ ↔ (3,3)

| ❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻ ↔ (0,6)

⋯

그러면 6의 $N*$형 2-분할들과 6개의 ●과 1개의 ㅣ을 가지고 배열할 수 있는 방법과 일대대응 관계를 이룬다. 여기서 6개의 ●과 1개의 ㅣ을 가지고 배열할 수 있는 전체 방법의 수는

$$\frac{7!}{6!1!} = {}_7C_6$$

이다.[2] 따라서 6의 $N*$형 2-분할의 수는 ${}_7C_6=7$이다.

탐구문제 (1)의 6의 $N*$형 2-분할의 수는 다른 상황으로 전환 가능하다. 대표적 상황으로 6의 $N*$형 2-분할의 수는 방정식 $x_1+x_2=6$의 음이 아닌 정수해들의 개수이다. 또한 '2개의 서로 다른 상자 (각 상자에는 같은 종류의 검정바둑돌이 충분히 있음)에서 6개의 바둑돌을 뽑는 방법의 수'이기도 하고 6개의 검정 바둑돌을 서로 다른 2개의 상자에 분배하는 (빈 상자 허용) 방법의 수이기도 하다. 이것은 서로 다른 두 종류의 물건을 중복을 허락하여 6개를 뽑는 방법의 수로 ${}_2H_6$로 나타낸다.[3] 이것을 정리하여 <표 Ⅲ-1>로 요약할 수 있다.

6의 $N*$형 3-분할의 수를 구하기 위하여 3-분할을 다음의 몇 개의 예처럼 대응시켜 보자.

[1] 일렬로 나열하고 번호 매김:

❶ ❷ ❸ ❹ ❺ ❻

[2] 2개의 ㅣ를 사용하여 세 부분으로 나누기: 몇 개의 예를 들면 다음과 같다.

(2, 3, 1) ↔ ●●ㅣ●●●ㅣ●

(3, 0, 3) ↔ ●●●ㅣㅣ●●●

(0, 1, 5) ↔ ㅣ●ㅣ●●●●●

(0, 0, 6) ↔ ㅣㅣ●●●●●●

이것은 6의 모든 $N*$형 3-분할들은 6개의 ●과 2개의 ㅣ을 가지고 배열하는 모든 방법들 사이에 일대일대응 관계를 이룸을 보여 준다. 따라서 6의 $N*$형 3-분할의 수는 6개의 ●과 2개의 ㅣ을 가지고 배열할 수 있는 방법을 찾는 문제이다. 여기서 6개의 ●과 2개의 ㅣ을 가지고 배열할 수 있는 모든 방법의 수는

$$\frac{8!}{6!2!} = {}_8C_6$$

로 주어진다.

<표 Ⅲ-1> 6의 $N*$형 2-분할과 다양한 표현법

6의 $N*$형 2-분할	6개의 검정바둑돌을 서로 다른 2개의 상자에 넣는 방법 (빈상자허용)		2개의 서로 다른 상자 (각 상자에는 검정바둑돌이 충분히 있음)에서 6개의 바둑돌을 뽑는 방법	
(6,0)	●●●●●●ㅣ	6개의 ●과 1개의 ㅣ을 가지고 배열할 수 있는 방법의 수 $\frac{7!}{6!1!}={}_7C_6$	$x_1+x_2=6$의 음이 아닌 정수해	2의 6-중복조합 ${}_2H_6$
(5,1)	●●●●●ㅣ●			
(4,2)	●●●●ㅣ●●			
(3,3)	●●●ㅣ●●●			
(2,4)	●●ㅣ●●●●			
(1,5)	●ㅣ●●●●●			
(0,6)	ㅣ●●●●●●			

2) k개의 a와 m개의 b를 배열하는 방법의 수는 $\frac{(k+m)!}{k!m!} = {}_{k+m}C_k$ 이다.

3) 2의 6-중복조합이라 한다. 제7차 교육과정에서는 중복조합을 학교수학에서 배제하고 있지만, 중등학생들도 충분히 다룰 수 있는 개념이다.

그러므로 6의 $N*$형 3-분할의 수는 $_8C_6$이다.

한편, 6의 $N*$형 3-분할의 수는 방정식 $x_1+x_2+x_3=6$의 음이 아닌 정수해들의 개수이다. 더 나아가 '3개의 서로 다른 상자 (각 상자에는 같은 종류의 검정바둑돌이 충분히 있음)에서 6개의 바둑돌을 뽑는 방법의 수'이기도 하다. 이것을 $_3H_6$ 으로 나타낸다. 지금까지의 두 예를 바탕으로 자연스럽게 일반화를 할 수 있다. 즉, 이 예는 일반화를 위한 충분한 자료가 될 수 있다.[4)]

일반적으로 자연수 n의 $N*$형 k-분할의 수는 n개의 ●과 k-1개의 ㅣ을 배열하는 방법의 수이고 n의 $N*$형 k-분할의 수는 다음의 방정식

$$x_1+x_2+\cdots+x_k = n$$

의 음이 아닌 정수해들의 개수이다. 이는 k의 n-중복조합으로 $_kH_n$ 으로 나타낸다. 중복조합은 조합으로 다음과 같이 관계된다:

$$_kH_n = \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} = {}_{k+n-1}C_n$$

[탐구 문제]의 (2)에서의 6의 N형 3-분할의 수 $F(6, \infty; 3)$을 구해 보자. 6의 N형 3-분할의 수는 6중 3을 취해 각 분할 원소에 각각 1씩 먼저 배정해 두고, 나머지 6-3(=3)을 세 분할 원소에 0을 허용하여 배정하는 경우의 수로 바꿀 수 있다. 따라서 6의 N형 3-분할의 수 $F(6, \infty; 3)$는 6-3(=3)의 $N*$형 3-분할의 수를 찾는 것이다. 또한 $F(6, \infty; 3)$은 방정식 $x_1+x_2+x_3=6$의 양의 정수해들의 개수와 같고, 이것은 방정식 $x_1+x_2+x_3=3$의 음이 아닌 정수해들의 개수와도 같다. 그 수는 3의 3-중복조합으로 $_3H_{6-3} = {}_5C_3$ 으로 주어진다. 따라서 다음을 알 수 있다.

$$F(6, \infty; 3) = {}_3H_{6-3} = {}_5C_3$$

이것은 n의 N형 k-분할의 수 $F(n, \infty; k)$를 구하는 문제로 자연스러운 일반화로 연결될 수 있는 핵심적인 Criterion task가 될 수 있다. n의 N형 분할모델의 각 분할 원소들이 모두 양의 정수이어야 하므로 만약 n 〈 k이면 n의 N형 k-분할은 없으므로 $F(n, \infty; k)=0$이다. n=k이면 각 분할원소가 1인 하나의 분할만이 있으므로 $F(n, \infty; k)=1$이다. n >k이면 각 원소에 1을 배정한다. 그런 다음 남은 n-k에 대한 $N*$형 k-분할의 수를 찾는 방법의 수이다. 따라서 n의 N형 k-분할의 수 $F(n, \infty; k)$는

$$x_1+x_2+\cdots+x_k = n-k$$

의 음이 아닌 정수해들의 개수와도 같다. 이것은

$$F(n, \infty; k) = {}_kH_{n-k} = {}_{n-1}C_{n-k}$$

로 주어진다.

학교수학에서는 조합의 기호 $_nC_r$ 에서 n을 양의 정수, r을 음이 아닌 정수로 한정시키고 있으나, 고등수학에서는 그 범위를 정수까지 (더 나아가 n은 실수까지) 확대하여, 정수 p, q (q > 0)에 대해 다음과 같이 정의한다. 편의적으로 p는 실수로 확대시켜서 정의한다.

$$_pC_q = \frac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-q+1)}{q!},$$

$$_pC_0 = 1, \quad {}_pC_{-q} = 0$$

CAS형 그래핑 계산기는 모든 정수 p, q에 대하여 조합 $_pC_q$ 을 이러한 정의에 맞게 계산해 준다.

이 정의에 준하면 임의의 자연수 n, k에 대하여 이들 사이의 대소여부에 관계없이

$$F(n, \infty; k) = {}_{n-1}C_{n-k}$$

라 할 수 있다. 따라서 $F(n, \infty)$는 n의 N형 분할의 총수를 나타내고 n <k이면 $F(n, \infty; k)=0$이므로

4) 이와 같이 학생들이 일반화에 충분한 자료가 될 수 있는 과제를 Criterion task(Wills, 1970)라 한다.

$$F(n, \infty) = \sum_{k=1}^{n} F(n, \infty; k)$$

로 주어진다. 이들은 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$F(1, \infty) = F(1, \infty; 1) = {}_0C_0 = 1 = 2^0,$$
$$F(2, \infty) = F(2, \infty; 1) + F(2, \infty; 2)$$
$$= {}_1C_1 + {}_1C_0 = 1+1 = 2^1,$$
$$F(3, \infty) = F(3, \infty; 1) + F(3, \infty; 2) + F(3, \infty; 3)$$
$$= {}_2C_2 + {}_2C_1 + {}_2C_0 = 2^2$$

일반적으로 다음과 같다.

$$F(n, \infty) = \sum_{k=1}^{n} F(n, \infty; k)$$
$$= {}_{n-1}C_{n-1} + {}_{n-1}C_{n-2} + \cdots + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-1}C_0$$
$$= 2^{n-1}.$$

기호적 편의를 위해 $F(0, m)=1$로 두고 있다. 그러므로

$$F(n,\infty) = 2^{n-1} = 1+2^0+2^1+2^2+\ldots+2^{n-2}$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(i, \infty)$$

로 주어진다. 수열 $\{F(n, \infty)\}$은 앞 절에서 정의한 무한형의 피보나치수열로 공비가 2인 기하급수로 밀접한 관계를 이룸을 알 수 있다.

*N*형 분할과 무한형의 피보나치수열에 관계한 지금까지의 논의 결과는 다음과 같은 공식으로 요약된다.

[성질 1] 임의의 자연수 n, k에 대하여

(a) $F(n, \infty; k) = {}_{n-1}C_{n-k}$

(b) $F(n, \infty) = 2^{n-1}$

본 절을 통하여 자연수 n의 *N*형 k-분할의 개수 $F(n, \infty; k)$와 n의 *N*형 분할의 개수 $F(n, \infty)$에 대한 공식의 유도는 조합과 중복조합의 원리에 연결된다. 예비중등교사들은 6의 *N*형 분할의 수를 찾는 방법에서 알 수 있는 사실을 바탕으로, 분할될 수가 n인 일반적 패턴을 추측해 낼 수 있고 기술할 수 있는 Criterion Task의 사용방법에 익숙해져야 한다.

Ⅳ. *Fm*형 분할과 m-단계의 피보나치수열에 대한 표현

여기서는 *Fm*형 분할과 m-단계의 피보나치수열의 각 항을 조합을 이용하여 표현하는 교수단원을 설계한다. 이를 위해 특수한 경우로부터 일반적인 경우로의 확장을 요구하는 탐구문제를 설정하고, 그 해결과정을 위계적으로 제시한다. 통상적으로는 $m=1, 2, 3, \ldots$ 에서 무한으로의 접근을 생각하지만, 여기서는 무한형인 *N*형의 방법을 바탕으로 유한형인 *Fm*형을 다룬다.

각 분할원소 $p_i\,(i=1, 2. \cdots, k)$가 Z_m에 속하는 자연수 n의 *Fm*형 k-분할의 수를 $F(n, m; k)$로 나타낸다. $F(n, m)$은 분할원소가 Z_m에 속하는 자연수 n의 전체 분할의 수이다. 이 경우

$$F(n, m) = \sum_{k=1}^{n} F(n, m; k)$$

이다. $a_n = F(n, m)$이라 하면 수열 $\{a_n\}$은 m-단계의 피보나치수열이다(김진환, 박교식, 2008). 이제 $F(n, m; k)$를 구하는 하나의 공식을 구하여 보자. 이것은 m-단계의 피보나치수열에 대한 새로운 표상 방법을 제공할 수 있다. 우선 구체적인 상황을 제공한다. 이 문제의 해결 방안은 일반화된 문제로 연결되는 실마리를 제공한다. 이것은 Criterion task의 역할을 할 수 있고, $F(n, m; k)$에 대한 공식을 제공한다. 이러한 공식을 활용하여 CAS형 그래핑 계산기로 구체적 수에 대한 답을 얻을 수 있다.

[탐구 문제] 분할될 수가 16일 때 *F5*형 4-분할들을 관찰하고 이를 토대로 m-단계 형의 피

보나치수열의 일반항들을 어떻게 나타낼 수 있는 지를 탐구하여라.

[탐구 문제]에서 분할될 수가 16일 때 $F5$형 4-분할의 수 $F(16,\ 5;\ 4)$를 구해 보자. 그것의 값은 방정식

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$$
$$(1 \le x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \le 5)$$

의 정수해의 수를 구하는 것이다. 이 수를 구하기 위하여 다음의 몇 단계로 나누고 포함과 배제의 원리를 적용한다.[5)]

[단계1] 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$의 양의 정수해의 수를 구한다. 이것은 15의 N형 4-분할의 수 $F(16,\ \infty;\ 4)$와 같다. 이것은 [성질 1]로부터 다음을 알 수 있다.

$$F(16,\ \infty;\ 4)\ =\ {}_{15}C_{12}\ =\ 455$$

이 값은 ${}_4C_0 \times {}_{15}C_{12}$로 나타내기로 하자, 이것은 $F(16,\ 5;\ 4)$의 공식의 표현에 유용하다.

[단계2] 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$의 양의 정수해들 중

(i) $x_1 \ge 6$이고 $x_2,\ x_3,\ x_4\ \ge 1$인 정수해의 개수를 구한다.

(ii) $x_2 \ge 6$이고 $x_1,\ x_3,\ x_4\ \ge 1$인 정수해의 개수를 구한다.

(iii) $x_3 \ge 6$이고 $x_1,\ x_2,\ x_4\ \ge 1$인 정수해의 개수를 구한다.

(iv) $x_4 \ge 6$이고 $x_1,\ x_2,\ x_3\ \ge 1$인 정수해의 개수를 구한다.

이 네 가지 경우에 대해 정수해의 수는 서로 같음을 쉽게 알 수 있다. (i)의 경우에 대한 해의 개수를 구하기 위하여 우선 x_1에 5를 먼저 배정한 다음 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16\text{-}5$의 양의 정수해의 개수를 구한다. 그러면 (i)의 경우에 대한 양의 정수해의 개수는 11의 N형 4-분할의 수 $F(11,\ \infty;\ 4)$와 같다. [성질 1]로부터 $F(11,\ \infty;\ 4)\ =\ {}_{10}C_7$이다. 따라서 네 가지 경우에 대한 해의 개수의 합은 다음과 같다.

$${}_4C_1 \times F(11,\ \infty;\ 4) = {}_4C_1 \times\ {}_{10}C_7$$
$$= 4 \cdot 120 = 480$$

[단계3] 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$의 양의 정수해들 중 x_i (i=1, 2, 3, 4)의 두 값이 6이상인 경우의 해의 수를 구한다. 이러한 경우의 선택은 ${}_4C_2$가지가 있고, 각 경우에 대한 정수해의 개수는 서로 같다. ${}_4C_2$ 경우의 하나로 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$ 을 만족하는 양의 정수해들 중 $x_1 \ge 6,\ \ x_2 \ge 6$인 해의 수를 구하여 보자. 이것은 우선 x_1 및 x_2에 5를 먼저 배정한 다음 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4\ =\ 16\text{-}10$ 을 만족하는 양의 정수해의 수와 같다. 이것은 6의 N형 4-분할의 수와 같고, [성질 1]로부터 $F(6,\ \infty;\ 4)\ =\ {}_5C_2$이다. 따라서 이들 경우들에 대한 해의 개수의 총합은 다음과 같다.

$${}_4C_2\ \times F(6,\ \infty;\ 4)\ =\ {}_4C_2\ \times {}_5C_2$$
$$=\ 6\ \cdot\ 10\ =\ 60$$

[단계4] 방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16$의 양의

---

5) 포함과 배제의 원리는 원소의 개수를 구하는 원리로 U를 전체집합으로 유한집합이고, A_i (i=1, 2, ⋯, k)를 부분집합이라 하면 다음이 성립한다. $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수를 나타낸다.

$$n(U) - n(\cup_{i=1}^{k} A_i) = n(U) - \sum_{i=1}^{k} n(A_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} n(A_i \cap A_j) - \sum_{1 \le i < j < l \le k} n(A_i \cap A_j \cap A_l) + \cdots$$
$$+ (-1)^k\, n(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$$

(k=2인 경우) $n(U) - n(A_1 \cup A_2) = n(U) - \mathrm{n}(A_1) - \mathrm{n}(A_2) + n(A_1 \cap A_2)$

정수해들 중 x_i (i=1, 2, 3, 4)의 세 개의 값이 모두 6이상인 경우의 해의 수를 구한다. 이러한 경우의 선택은 ${}_4C_3$가지가 있고 각 경우에 대한 해의 개수는 서로 같다. 이들 중 한 경우로 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$을 만족하는 양의 정수해의 수들 중 $x_1 \geq 6$, $x_2 \geq 6$, $x_3 \geq 6$인 양의 정수해의 수를 구하여 보자. 이것은 우선 x_1, x_2, x_3에 각각 5를 먼저 배정하고 나서 $x_1+x_2+x_3+x_4=16-15$ 를 만족하는 양의 정수해의 개수를 구하는 것과 같다. 이것은 1의 N형 4-분할의 수 $F(1, \infty; 4)$로 나타낼 수 있고 그 값은 $F(1, \infty; 4) = {}_0C_{-3} = 0$이다. 따라서 이들 경우들에 대한 해의 개수의 총합은 다음과 같다.

$${}_4C_3 \times F(1, \infty; 4) = {}_4C_3 \times {}_0C_{-3} = 4 \cdot 0 = 0$$

[단계5] 방정식 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$의 양의 정수해들 중 x_i (i=1, 2, 3, 4)의 모든 값이 6이상인 경우의 해의 수를 구한다. 이러한 경우의 선택은 ${}_4C_4$ (=1)가지가 있다. $x_1+x_2+x_3+x_4=16$을 만족하는 양의 정수해들 중 $x_i \geq 6$ (i=1, 2, 3, 4)인 해의 수는 방정식 $x_1+x_2+x_3+x_4=16-20$ 을 만족하는 양의 정수해의 수와 같다. 이 경우의 해는 없다. 따라서 그 수는 0이다. 이때의 0을 ${}_{-5}C_{-8}$로 나타낼 수 있다. 따라서 구하고자 하는 해의 개수는 다음과 같다.

$${}_4C_4 \times {}_{-5}C_{-8} = 1 \cdot 0 = 0$$

[포함과 배제의 원리 적용] $F(16, 5; 4)$는 방정식 $x_1+x_2+x_3+x_4=16$ $(1 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 5)$를 만족하는 정수해의 수로 포함과 배제의 원리를 적용하면 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} F(16, 5; 4) &= {}_4C_0 \times {}_{15}C_{12} - {}_4C_{14} \times {}_{10}C_7 \\ &\quad + {}_4C_2 \times {}_5C_2 - {}_4C_3 \times {}_0C_{-3} + {}_4C_4 \times {}_{-5}C_{-8} \\ &= 455-480+60-0+0 = 35 \end{aligned}$$

이제 임의의 자연수 n, m, k에 대하여 $F(n, m; k)$는 위의 예시처럼 k단계를 수행하고 포함과 배제의 원리를 적용한다면 다음의 일반화된 성질을 유도할 수 있다.

[성질 2] n, m, k는 임의의 자연수이고, 다음이 성립한다.

(a) $F(n, m; k)$

$$= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, {}_kC_i \times {}_{n-1-im}C_{n-k-im}$$

(b) $F(n, m)$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \, {}_kC_i \times {}_{n-1-im}C_{n-k-im}$$

이제 다음과 같은 특별한 경우에 대한 $F(n, m; k)$의 값을 살펴보기로 한다:

(1) $F(11, 5; 2)$, (2) $F(5, 5; 6)$, (3) $F(4, 5; 3)$

(1)의 경우에 11의 $F5$형 2-분할 (p_1, p_2) ⋯, 는 $p_1+p_2=11$을 만족하고, p_1, p_2의 값은 5를 넘지 못하므로 p_1+p_2는 10을 넘지 못한다. 이런 분할은 존재하지 않으므로 11의 $F5$형 2-분할의 수 $F(11, 5; 2)=0$이다.

(2)의 경우에 5의 $F5$형 6-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_6)$은 $p_1+p_2+\cdots+p_k=5$를 만족하고 각 p_i (i=1, 2, ⋯, 6)의 값은 1이상의 수이다. 이런 분할은 존재하지 않으므로 5의 $F5$형 6-분할의 수 $F(5, 5; 6)=0$이다.

(3)의 경우에 4의 $F5$형 3-분할 (p_1, p_2, p_3)은 $p_1+p_2+p_3=4$를 만족하고 각 p_1, p_2, p_3의 값은 4를 넘지 못한다. 따라서 p_1, p_2, p_3의 범위 Z_5를 Z^+로 넓혀 해를 구하여도 무관하고 그 해의 수 또한 불변이다. 따라서 4의 $F5$형 3-분할의 수 $F(4, 5; 3)$은 4의 N형 3-분할의 수 $F(4, \infty; 3)$과 같다. [성질 1]에 의하여 $F(4, 5; 3) = F(4, \infty; 3) = {}_3H_1 = {}_3C_2 = 3$이다.

이러한 사실들은 다음과 같은 일반화로 연결되어 $F(n, m; k)$의 값이 결정된다.

(1) $mk < n$이면 $F(n, m; k)=0$이다. 이것은 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_i=n$ $(1\le x_1, x_2, \cdots, x_i \le m)$에서 각 x_i $(i=1, 2, \cdots, k)$의 값은 m을 넘지 못하여 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ $(1\le x_1, x_2, \cdots, x_k\le m)$의 값은 mk를 넘지 못하므로 n보다 항상 작기 때문이다.

(2) $n < k$이면 $F(n, m; k)=0$이다. 이것은 방정식 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$ $(1\le x_1, x_2, \cdots, x_k\le m)$의 각 x_i $(i=1, 2, \cdots, k)$의 값은 자연수로 1 이상이므로, 이들 값의 합은 k이상으로 n보다 항상 크기 때문이다.

(3) $k\le n\le m$인 경우, $F(n, m; k)= F(n, \infty; k) = {}_kH_{n-k} = {}_{n-1}C_{n-k}$이다. 자연수 n의 Fm형 k-분할 $(p_1, p_2, \cdots, p_k)$은 $p_1+p_2+\cdots+p_k=n$을 만족하고 각 p_i $(i=1, 2, \cdots, k)$의 값은 n을 넘지 못한다. 따라서 p_i $(i=1, 2, \cdots, k)$의 범위 Z_m을 Z^+로 넓혀 해를 구하여도 무관하고, 그 해의 개수 또한 불변이다. 따라서 n의 Fm형 k-분할의 수 $F(n, m; k)$는 n의 N형 k-분할의 수 $F(n, \infty; k)$와 같다. $F(n, m; k)$는 앞장에서 다룬 바와 같이 ${}_kH_{n-k} = {}_{n-1}C_{n-k}$로 주어진다. 따라서 $F(n, m; k)$는 k의 (n-k)-중복조합으로서

$$F(n, m; k) = F(n, \infty; k)= {}_kH_{n-k} = {}_{n-1}C_{n-k}$$

로 나타낼 수 있다. 특히 n=k이면 $F(n, m; k)= {}_{n-1}C_0=1$이다. 실제로 $p_i=1$ $(i=1, 2, \cdots, k)$로 분할이 하나뿐이다.

(1), (2), (3)의 사실은 다음과 같이 요약된다.

$$F(n, m; k) = \begin{cases} 0 & (mk < n) \\ 0 & (n < k) \\ {}_{n-1}C_{n-k} & (n \le m) \end{cases}$$

특히, $mk < n$ 이면 $F(n, m; k)=0$ 란 사실과 [성질 2]의 (1)로부터 k+1개의 합

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i\, {}_kC_i \times {}_{n-1-im}C_{n-k-im}$$

에서 0이 아닌 항의 수가 k개 이상이면 그 합이 0임을 알 수 있다.

공식화한 [성질 2]를 활용하여 $F(n, m; k)$ 및 $F(n, m)$의 값을 계산하여 보자. $F(11, 3; 7)$의 값을 위의 공식으로 전개하면 다음과 같다.

$$F(11, 3; 7) = {}_7C_0\times {}_{10}C_4 - {}_7C_1\times {}_7C_1 + {}_7C_2 \times {}_4C_{-2} - \cdots$$
$$=210-49+0- \cdots =161$$

계산 편의를 위해 TI의 CAS형 그래핑 계산기 Voyage 200을 활용한다. Home 모드에서 입력창에 다음과 같이 넣는다.

```
∑((-1)^i*nCr(k,i)*nCr(n-1-i*m,n-k-i*m),i,0,k)
  → f(n,m,k)
∑(∑((-1)^i*nCr(k,i)*nCr(n-1-i*m,n-k-i*m),i,0,k),k,1,n)
  → f(n,m)
```

[그림 IV-1]와 같이 f(n,m,k) 및 f(n,m)에 n, m(=3), k에 여러 자연수를 대입하여 값을 구할 수 있고 <표 IV-1>를 만들 수 있다.

이러한 표는 새로운 성질을 찾는 동기를 줄 수 있다.

V. m-단계의 피보나치수열에서 연속하는 두 항의 비율의 극한

통상적인 피보나치수열에서 연속하는 두 항의 비율로 구성된 수열은 하나의 상수값이고, 이 극한이 유명한 황금비라는 사실은 매우 흥미롭게 다루어지는 피보나치수열의 특성이다. 이와 유사한 성질이 일반화된 피보나치수열에서도 성립하는지 알아보기로 한다. 예비중등교

사들은 중간값의 정리를 이용하여 이러한 성질을 발명할 수 있다. 실제로 이 성질이 성립하지만, 그것을 수학적으로 엄밀하게 증명하는 것은 예비중등교사들의 수준을 넘는다. 따라서 여기서는 그것을 엄밀하게 증명하는 것을 요구하는 대신, 그러한 성질이 성립할 것이라는 추측을 할 수 있게 하는 것에 초점을 맞춘다.

m-단계의 피보나치수열 $F(n, m)$ (n=0, 1, 2, ⋯)에 대한 연속하는 두 항의 비율을

$$G(n, m)=\frac{F(n+1,\ m)}{F(n,\ m)}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

으로 나타내기로 하자.

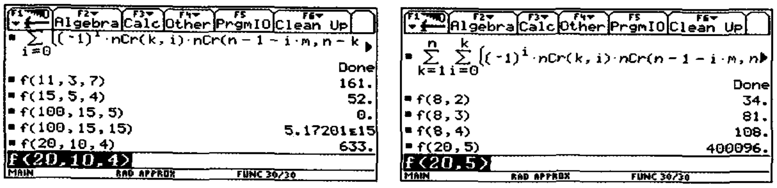
[탐구 문제] (1) CAS형 그래핑 계산기를 사용하여 m= 2, 3, 4, 7일 때 -단계의 피보나치수열에서 연속하는 두 항의 비율 $G(n, m)$로 주어진 수열의 값을 조사하여라. 그 결과로부터 수열 $\{G(n, m)\}$이 수렴한다고 추측할 수 있는가? 더 나아가 그 극한을 방정식 $x^m - x^{m-1} - \cdots - x - 1 = 0$의 실근과 관계지울 수 있는 가?

(2) CAS형 그래핑 계산기로 m= 2, 3, 4, 5, 6, 7일 때 방정식 $f_m(x) = x^m - x^{m-1} - \cdots - x - 1 = 0$의 실근에 대한 근삿값을 조사하여라. 그 결과로부터 수열 $\{G(n, m)\}$의 각 항은 2를 넘지 못하는 증가수열일 것이라고 추측할 수 있는가?

[탐구 문제] (1)을 해결하기 위해 먼저 m=1인 경우를 생각해 보자. m=1인 경우; $\{F(n, 1)=1\}$ 이므로 $\frac{F(n+1,1)}{F(n,1)}=1$에서 그 극한값은 $\lambda_1=1$ 이다. 무한형의 피보나치수열에 대하여, 다음이 성립한다.

$\{F(n, \infty)\}$(n=0, 1, 2, ⋯)

$=\{1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$



[그림 IV-1] CAS형 계산기를 사용한 $F(n, m; k)$ 및 $F(n, m)$ 의 값의 계산

<표 IV-1> $F(n, 3; k)$ 및 $F(n, 3)$

nRSL	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	⋯	$F(n,3)$
4	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	7
5	2	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	⋯	13
6	1	7	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	⋯	24
7	0	6	12	19	6	1	0	0	0	0	0	0	⋯	44
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯		⋯	⋯
11	0	0	4	45	126	161	112	45	10	1	0	0	⋯	504
12	0	0	1	30	141	266	266	156	55	11	1	0	⋯	927
13	0	0	0	15	126	357	504	414	210	66	12	1	⋯	1705
14	0	0	0	5	90	393	784	882	615	275	78	13	⋯	3136
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

이에 따라 $\frac{F(n+1,\ \infty)}{F(n,\ \infty)}=2$ $(n\geq 1)$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F(n+1,\ \infty)}{F(n,\ \infty)}=2$이다.

m-단계의 피보나치수열 $F(n,\ m)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$에 대한 연속하는 두 항의 비율을 먼저 알아보자. 우선 $1\leq n<m$이면 다음이 성립한다.

$$F(n+1,\ m) = 2^{n} = 2\cdot 2^{n-1} = 2\,F(n,\ m)$$

또, $m\leq n$이면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} F(n+1,\ m) &= F(n,\ m)+F(n-1,\ m)+\\ &\quad\cdots+F(n-m+1,\ m)\\ &\leq F(n,\ m)+F(n-1,\ m)+\\ &\quad\cdots+F(n-m+1,\ m)+F(n-m,\ m)\\ &= 2\,F(n,\ m) \end{aligned}$$

그러므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$\frac{F(n+1,1)}{F(n,1)}=1\leq\frac{F(n+1,m)}{F(n,m)}\leq 2=\frac{F(n+1,\infty)}{F(n,\infty)},$$

즉, $1\leq G(n,\ m)\leq 2$.

<표 V-1>은 CAS형 그래핑 계산기로 $G(n,\ m)$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ 7)$의 값을 조사한 것이다. 이 표로부터 연속하는 두 항의 비율로 주어진 수열이 수렴한다는 것을 강하게 추측할 수 있다. 그러나 여기서는 높은 수준을 요하는 수렴의 존재에 대한 증명을 하지는 않는다.

2-단계의 피보나치수열 즉, 통상의 피보나치 수열의 경우 연속하는 두 피보나치수의 비율은 다음과 같이 연분수로 표현해서 수렴함을 보일 수도 있다.

$G(1,\ 2)=1=[1],\quad G(2,\ 2)=2=1+\frac{1}{1}=[1,\ 1],$

$G(3,\ 2)=\frac{3}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}=[1,\ 1,\ 1]$

$G(4,\ 2)=[1,\ 1,\ 1,\ 1],\cdots,$

$G(n,\ 2)=[1,\ 1,\ \cdots,\ 1],$

$\lim\limits_{n\to\infty}G(n,\ m)=[1,\ 1,\ \cdots]=[\bar{1}]=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

<표 V-1> CAS형 그래핑 계산기를 활용한 $G(n,\ m)$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ 7)$의 값

n \ m	2	3	4	7
0	1	1	1	1
1	2	2	2	2
2	1.5	2	2	2
3	1.666666667	1.75	2	2
4	1.6	1.857242857	1.875	2
5	1.625	1.846153846	1.933333333	2
6	1.615384615	1.833333333	1.931034483	2
7	1.619047619	1.840909091	1.928571429	1.98375
8	1.617647059	1.839506173	1.925925926	1.992125984
9	1.618181818	1.838926174	1,927884615	1.992094862
10	1.617977528	1.849416058	1.927680798	1.992063492
11	1.618055556	1.839285714	1.927554981	1.992031873
12	1.618025751	1,839266451	1.927516779	1.992
…	…	…	…	…
29	1.618033989	1.839286755	1.927561976	1.991964197
30	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.991964197
31	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.991964197
32	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.991964197
…	…	…	…	…
40	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.991964197
41	1.618033989	1.839286755	1.927561975	1.991964197
…	…	…	…	…

여기서는 일반적인 m-단계의 피보나치수열 $\{F(n, m)\}$의 연속하는 두 항의 비율에 의해 얻어진 수열 $\{G(n, m)\}$이 수렴한다는 사실을 바탕으로 하여 그 극한값에 에 대해 알아본다.

m=2인 경우(통상적인 피보나치수열의 경우), $\{G(n, 2)\}$의 극한을 λ_2라 하자.

$$\lambda_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1,2)}{F(n,2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{F(n,2)+F(n-1,2)}{F(n,2)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{F(n-1,2)}{F(n,2)}\right) = 1+\frac{1}{\lambda_2}$$

이므로, λ_2는 이차방정식 $x^2-x^1-1=0$의 근 중 1이상이고 2이하인 실수이다.

m=3인 경우(3-단계의 피보나치수열의 경우, $\{G(n, 3)\}$의 극한 λ_3을 구하면 다음과 같다.

$$\lambda_3 = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1,3)}{F(n,3)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n,3)+F(n-1,3)+F(n-2,3)}{F(n,3)}$$

$$= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F(n-1,3)}{F(n,3)}$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{F(n-2,3)}{F(n-1,3)} \frac{F(n-1,3)}{F(n,3)}$$

$$= 1+\frac{1}{\lambda_3}+\frac{1}{\lambda_3^2}$$

따라서 λ_3은 삼차방정식 $x^3-x^2-x-1=0$을 만족하는 1이상이고 2이하인 실근이다.

일반적인 경우로, m-단계의 피보나치수열 $\{F(n, m)\}$에 대해, 연속하는 두 항의 비율로 구성된 수열 $\{G(n, m)\}$의 극한을 λ_m이라 하자.

$$\lambda_m = \lim_{n\to\infty} \frac{F(n+1,m)}{F(n,m)} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n,m)+F(n-1,m)+\cdots+F(n-m+1,m)}{F(n,m)}$$

$$= 1+ \lim_{n\to\infty} \frac{F(n-1,m)}{F(n,m)} + \dots +$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F(n-m+1,m)}{F(n-m+2,m)} \frac{F(n-m+2,m)}{F(n-m+3,m)} \cdots \frac{F(n-1,m)}{F(n,m)}$$

$$= 1+\frac{1}{\lambda_m}+\cdots+\frac{1}{\lambda_m^{m-1}}$$

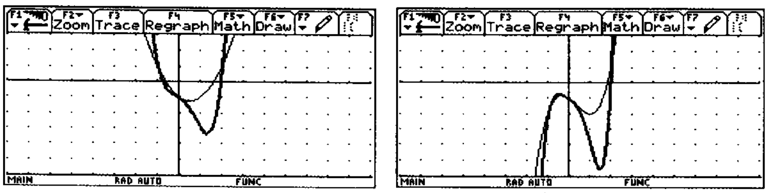
따라서 λ_m은 방정식 $x^m-x^{m-1}-\cdots-x-1=0$을 만족하는 1이상이고 2이하인 실근이다. 위의 형태의 방정식의 근을 찾기 위하여

$$f_m(x) = x^m-x^{m-1}-\cdots-x-1$$

라 두자. 여기서 $m \geq 2$라 가정한다.

[탐구 문제] (2)를 해결하기 위하여 CAS형 그래핑 계산기로 m=2, 3, 4, 5일 때의 $y=f_m(x)$의 그래프를 살펴보자([그림 V-1]).

$f_m(x) = x^m-x^{m-1}-\cdots-x-1$에 대해 m이 짝수이면 방정식 $f_m(x)=0$은 두 개의 실근을 가지고 한 실근은 음수이고, 다른 한 실근은 양수로 1보다 크고 2보다 크지 않는 근으로, 그것이 λ_m일 것이라는 추측을 할 수 있다.



$y2=x^2-x-1$
$y4=x^4-x^3-x^2-x-1$

$y3=x^3-x^2-x-1$
$y5=x^5-x^4-x^3-x^2-1$

[그림 V-1] m= 2, 3, 4, 5일 때 $y=f_m(x)$의 그래프와 x축과의 교점

m이 홀수이면 $f_m(x)=0$은 하나의 실근을 가지고 1이상으로 2보다 크지 않는 실근으로 λ_m임이라는 일 것이라는 추측을 할 수 있다.

함수 f_m는 실수집합 **R**에서 연속함수이다. 특히 f_m은 [1, 2]에서 연속이고 다음이 성립한다.

$$f_m(1) = 1^m - 1^{m-1} - \cdots - 1 - 1 \le -1 < 0$$

$$f_m(2) = 2^m - 2^{m-1} - \cdots - 2 - 1 = 2^m - (2^m - 1) = 1 > 0$$

중간값의 정리[6]에 의하여 방정식 $f_m(x)=0$은 1과 2사이에 실근을 가진다. 이러한 실근이 하나뿐임을 보이자. 만약 $t > 1$이라 할 때,

$$f_m(t) = t^m - 2^{m-1} - \cdots - t - 1 = t^m - (t^m-1)/(t-1)$$

$$= \frac{(t-2)t^m + 1}{t-1}$$

λ를 1과 2사이에 있는 실근 중 하나라 하자. 그러면

$$f_m(\lambda) = \frac{(\lambda-2)\lambda^m+1}{\lambda-1} = 0$$

따라서

$$(\lambda-2)\lambda^m + 1 = 0$$

만약 $1 < t < \lambda$이면

$$(t-2)t^m + 1 - 0 = [(t-2)t^m+1] - [(\lambda-2)\lambda^m+1] < 0$$

따라서 $1 < t < \lambda$인 경우 $f_m(t) < 0$이다.

한편 $\lambda < t$이면

$$(t-2)t^m + 1 - 0 = [(t-2)t^m+1] - [(\lambda-2)\lambda^m+1] > 0$$

따라서 $\lambda < t$인 경우 $f_m(t) > 0$이다. 이러한 사실은 1과 2사이에 방정식 $f_m(x)=0$ 의 실근이 하나만 (즉, λ_m)이 존재함을 보여준다.

이제 m=2, 3인 경우에 대해 λ_2, λ_3을 방정식의 대수적 해법으로 구하여 보자.

먼저 m=2인 경우 즉, 피보나치수열 $\{F(n, 2)\}$에 대하여 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$을 풀면

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887\cdots$$

로 주어진다. 이 2-단계의 피보나치상수 λ_2는 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비율의 극한으로 황금비로 알려져 있다.

m=3인 경우, 3-단계의 피보나치수열 $\{F(n, 3)\}$에 대하여 $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$을 만족하는 1이상의 2이하의 실근 λ_3을 구하기 위해 Cardano의 해법을 사용한다. 먼저 $x = y + \frac{1}{3}$이라 두면,

$$\left(y+\frac{1}{3}\right)^3 - \left(y+\frac{1}{3}\right)^2 - \left(y+\frac{1}{3}\right) - 1 = 0$$

이고, 이것은

$$y^3 - \frac{4}{3}y - \frac{38}{27} = 0$$

으로 변환된다. $y = u + v$ 라 놓고 위 식에 대입하면

$$(u+v)^3 - \frac{4}{3}(u+v) - \frac{38}{27} = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3\left(uv - \frac{4}{9}\right)(u+v) - \frac{38}{27} = 0$$

로 바뀐다. 이제 $u^3 + v^3 - \frac{38}{27} = 0$,

$uv - \frac{4}{9} = 0$가 되도록 u, v를 정하자.

$$u^3 + v^3 = \frac{38}{27}, \quad u^3v^3 = \left(\frac{4}{9}\right)^3 \text{이므로}$$

u^3, v^3은 이차방정식 $z^2 - \frac{38}{27}z + \left(\frac{4}{9}\right)^3 = 0$의 근이다. 따라서 u^3, v^3는 다음과 같이 주어짐을 알 수 있다.

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{38}{27} + \sqrt{\left(\frac{38}{27}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3}\right\}$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{38}{27} - \sqrt{\left(\frac{38}{27}\right)^2 - 4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^3}\right\}$$

이것으로부터 다음을 얻을 수 있다.

---

6) 함수 f가 구간 [a, b]에서 연속이고 f(a)f(b) < 0 이면 f(p)0를 만족하는 p가 a와 b사이에 존재한다 (p는 방정식 f(x)=0의 실근).

$$u=\left\{\frac{19}{27}+\sqrt{\left(\frac{19}{27}\right)^{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3}}\right\}^{1/3},$$

$$v=\left\{\frac{19}{27}-\sqrt{\left(\frac{19}{27}\right)^{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

이 삼차방정식에서 실근 y와 x는 다음과 같이 주어진다.

$$y=\left\{\frac{19}{27}+\sqrt{\left(\frac{19}{27}\right)^{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}+\left\{\frac{19}{27}-\sqrt{\left(\frac{19}{27}\right)^{2}-\left(\frac{4}{9}\right)^{3}}\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$x=y+\frac{1}{3}=\frac{(3\sqrt{33}+19)^{\frac{1}{3}}-(3\sqrt{33}-19)^{\frac{1}{3}}+1}{3}$$

따라서 3-단계의 피보나치상수 λ_3은 다음과 같다.

$$\lambda_3=\frac{(3\sqrt{33}+19)^{\frac{1}{3}}-(3\sqrt{33}-19)^{\frac{1}{3}}+1}{3}=1.839286755\cdots$$

[그림 V-2]는 CAS형 그래핑 계산기로 m= 2, 3, 4, 5, 6, 7일 때 방정식 $f_m(x)=0$의 실근에 대한 근삿값을 조사한 것이다.

이 결과는 m-단계의 피보나치수로 이루어진 수열 $\{\lambda_m\}$ (m=1, 2, 3, …)의 각 항은 2를 넘지 못하며 증가수열일 것이라는 추측을 하게 한다. 이 추측이 옳다는 것을 연속함수의 중간값의 정리를 사용하여 보일 수 있다.

m(=1, 2, 3)-단계의 피보나치수 λ_m은 방정식 $f_m(x)=x^m-x^{m-1}-\cdots-x-1=0$ 의 양의 실근으로

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180339887\cdots$$

$$\lambda_3=\frac{(3\sqrt{33}+19)^{\frac{1}{3}}-(3\sqrt{33}-19)^{\frac{1}{3}}+1}{3}=1.839286755\cdots$$

이며, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$이다.

```
■x^2 - x - 1 → f2(x)                                  Done
■solve(f2(x) = 0, x)
        x = -.6180339887 or x = 1.618033989
■x^3 - x^2 - x - 1 → f3(x)                            Done
■solve(f3(x) = 0, x)                   x = 1.839286755
■x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 → f4(x)                      Done
■solve(f4(x) = 0, x)
        x = -.7748041132 or x = 1.927561975
■x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 → f5(x)                Done
■solve(f5(x) = 0, x)                   x = 1.965948237
■x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 → f6(x)          Done
■solve(f6(x) = 0, x)
        x = -.8403090983 or x = 1.983582843
■x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1 → f7(x)
                                                      Done
■solve(f7(x) = 0, x)                   x = 1.991964197
```

[그림 V-2] m= 2, 3, 4, 5, 6, 7일 때의 $f_m(x)=0$의 실근에 대한 근삿값

모든 양의 정수 m에 대하여 $p\geq 2$이면 $f_m(p)>0$ 임을 쉽게 알 수 있다.

3-단계의 피보나치수 λ_3과 4-단계의 피보나치수 λ_4의 대소관계를 비교하여 보자.

$$\begin{aligned}f_4(\lambda_3)&=\lambda_3^4-\lambda_3^3-\lambda_3^2-\lambda_3-1\\&=\lambda_3^4-2\lambda_3^3+\lambda_3^3-\lambda_3^2-\lambda_3-1\\&=\lambda_3^4-2\lambda_3^3\\&=\lambda_3^3(\lambda_3-2)<0\end{aligned}$$

따라서 연속함수 f_4에 중간값의 정리를 적용시키면 λ_4는 방정식 $f_4(x)=0$의 하나뿐인 양의 실근으로 λ_3보다는 크고 2보다 작은 수이다.

일반적으로 m-단계의 피보나치수 λ_m과 (m+1)-단계의 피보나치수 λ_{m+1}의 대소관계를 비교하여보자.

$$\begin{aligned}f_m(\lambda_m)&=\lambda_m^{m+1}-\lambda_m^{m}-\lambda_m^{m-1}-\cdots-\lambda_m-1\\&=\lambda_m^{m+1}-2\lambda_m^{m}+(\lambda_m^{m}-\lambda_m^{m-1}-\cdots-\lambda_m-1)\\&=\lambda_m^{m+1}-2\lambda_m^{m}\\&=\lambda_m^{m}(\lambda_m-2)<0\end{aligned}$$

따라서 연속함수 f_{m+1} 에 중간값의 정리를 적용시키면 λ_{m+1}은 방정식 $f_{m+1}(x)=0$의 하나뿐인 양의 실근으로 λ_m보다는 크고 2보다 작은 수이다. 따라서 수열 $\{\lambda_m\}$ (m=1, 2, 3, …)은 2를

넘지 못하는 증가수열로 2에 수렴한다는 것을 암시한다.

VI. 결 론

이 연구에서는 예비중등교사들이 장차 중등학교에서 학생들에게 수학화를 가르칠 수 있는 소양을 길러줄 수 있도록 수학적 현상을 조직하는 수학적 본질을 실제로 고안해 보는 경험을 할 수 있게 하는 교수단원을 설계하고 있다. 이를 위해 일반화된 피보나치수의 일반항을 구하는데 유용한 공식을 찾고, 일반화된 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비율에 대한 극한을 탐구하는 탐구문제를 제시한다. 피보나치수열은 수학사적으로 의미 있고 매우 유용한 수열로 다양한 수학적 문제의 보고이다. 피보나치수열은 수학의 미적 추구의 견본이 되는 것으로 수학적으로 중요한 많은 성질을 갖고 있다.

탐구문제를 해결하기 위해서는 먼저 분할모델과 피보나치수열에 대한 선수 지식이 필요하다. 더 나아가 일반화된 피보나치수열의 조합적 표현을 이해하기 위해서는 조합과 포함배제의 원리에 대한 이해가 있어야 하고, 연속하는 두 항의 비율의 극한과 관련해서는 이차방정식과 삼차 방정식의 해법 및 연속함수의 중간값의 정리에 대한 이해가 필요하다. 예비중등교사들은 이 교수단원을 통해 학교수학의 수준에서 다룰 수 있는 다양한 수학적 지식을 바탕으로 새로운 수학적 지식을 발명할 수 있다. 이 연구에서 제시하고 있는 교수단원은 학문적 수학과 학교수학을 연결하는 역할을 할 수 있다. 다음으로는 일련의 수학화 과정을 통해 수학을 발명하는 과정에서 귀납적 추론과 연역적 추론 활동을 경험하게 한다. 본 연구의 내용은 예비중등교사교육에서 이산수학 특히 조합론 분야에서, 피보나치수열을 취급하는 정수론 분야에서, 그리고 수학화와 문제제기 및 문제해결을 실습할 수 있는 분야의 과목에서 좋은 소재가 될 수 있다.

이 교수단원에서는 이미 알려진 내용을 학습하는 활동을 넘어 이전에 학습한 수학 지식을 바탕으로 새로운 수학 지식을 발명해 가는 활동에 초점을 맞추고 있다. 예비중등교사들이 실제로 새로운 수학 지식을 발명하기 위해서는 발명해야 할 내용이 이미 알려진 것이 아니어야 한다. 일반화된 피보나치수열의 일반항을 구하는데 유용한 공식과 일반화된 피보나치수열의 연속하는 두 항의 비율에 대한 성질은 분할 모델로 접근하는 것과 CAS형 그래핑 계산기의 활용은 이전에 알려지지 않은 내용인 만큼, 그것은 예비중등교사들이 수학화를 실질적으로 경험할 수 있게 한다. 이 경험을 통해 예비중등교사들은 수학적 지식의 발명 과정을 잘 이해할 수 있고, 그런 경험은 장차 그들의 학생들의 수학화를 안내하는데 도움이 될 것이다.

참고문헌

김진환 · 박교식(2006). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할모델의 탐구. **한국학교수학회논문집** **9**(1). 57-76.

김진환 · 박교식(2008). 예비중등교사의 수학화 학습을 위한 교수단원의 설계: 분할모델과 일반화된 피보나치수열 사이의 관계 탐구. **수학교육학연구** **18**(3). 373-389.

김진환 · 박교식 · 이광호(2006). 일정한 차를 갖는 수 분할모델의 탐구를 위한 예비중등교사

용 수학화 교수단원의 설계. **학교수학** 8(2). 161-176.

박교식(1992). **함수 개념 지도의 교수현상학적 접근.** 서울대학교 박사학위 논문.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

정영옥(1997). **Freudenthal의 수학화 학습-지도론.** 서울대학교 대학원 박사학위논문.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1983). D*idactical phenomenology of mathematical structures.* Kluwer Academic Publishers.

Freudenthal, H. (2008). **프로이덴탈의 수학교육론**, 우정호, 정은실, 박교식, 유현주, 정영옥, 이경화(공역). 서울: 경문사. (영어 원작은 1991년 출판).

Garland, T. H. (1987). *Fascinating Fibonaccis: Mystery and Magic in Numbers.* Dale Seymour.

Wills, H. (1970). *Generalzations. The Teaching of Secondary School Mathematics.* NCTM Thirty-third Yearbook. Washington, D.C.: NCTM.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education, *Educational Studies in Mathematics 15*(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics, 29*(4), 355-374.

Wittmann, E. (1999). Designing teaching: The pythagorean theorem. In T. J. Cooney, et. al., *Mathematics, pedagogy, and secondary teacher education.* 97-165. Portsmouth, NH: Heinemann.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 1-20.

A Design of Teaching Unit for Secondary Pre-service Teachers to Explore Generalized Fobonacci Sequences

Kim, Jin Hwan (Yeungnam Univ.)
Park, Kyo Sik (Gyeongin Nat'l Univ. of Edu.)

In this paper, we have designed a teaching unit for the learning mathematising of secondary pre-service teachers by exploring generalized fibonacci sequences. First, we have found useful formulas for general terms of generalized fibonacci sequences which are expressed as combinatoric notations. Second, by using these formulas and CAS graphing calculator, we can help secondary pre-service teachers to conjecture and discuss the limit of the sequence given by the rations of two adjacent terms of an m-step fibonacci sequence. These processes can remind secondary pre-service teachers of a series of some mathematical principles.

* key words : mathematising(수학화), teaching unit(교수단원), partition model(분할모델), generalized (or m-step) fibonacci sequence(일반화된(혹은 m-단계의) 피보나치 수열), CAS graphing calculator(CAS형 그래핑 계산기).

논문접수 : 2009. 4. 29
논문수정 : 2009. 6. 1
심사완료 : 2009. 6. 10