대한수학교육학회지 <학교수학> 제 11 권 제 2 호
Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol.11, No.2, 227-241. Jun. 2009

초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰 -게슈탈트 관점을 중심으로-

최 근 배*

이 논문에서는 평면에서의 등주문제 지도 방법을 게슈탈트 심리학적 관점에서 분석하여 초등 영재수업에 적용가능 한 프로그램을 구성하는 문제를 고찰하고, 수학교육에서의 시사점을 얻고자 한다.

I. 서 론

NCTM(2000)에서는 아이디어를 개발하고, 현상을 탐구하고, 수학적 추측을 형식화 및 검사하고, 일반화를 만들고, 결론을 정당화하는 데 수학적 추론의 역할을 강조하고 있으며 또한 추론능력은 수학학습의 주춧돌이고 수학교수의 핵심이어야 함을 피력하고 있다.

수학적 추론능력은 추론의 과정 중에서 다양한 수학적인 해석 가운데 채택 가능한 것의 선택과 구성에 도움을 준다(Lampert, 1990; Yackel & Cobb, 1994, 1996; NCTM(2000)에서 재인용).

특히, 초등수학에서의 정당화와 관련된 귀납적 추론과 직관적 사고는 수학의 구조적 이해와 통찰에 중요한 역할을 한다. 또한 초등학교에서의 정당화는 주로 귀납적 일반화 또는 조작적 검증을 이용한다.

수학적 추론과 관련하여, 강문봉(1996)은 초등학교 수준에서 아동들이 개연적 추론은 물론 논증적 추론도 어느 정도는 가능하다고 판단하면서 논증적 추론을 포함하여 개연적 추론을 형식적 조작기에 도달하기 이전에 비형식적으로 경험 시킬 수 있으며 또한 시키는 것이 바람직하다고 주장하였다.

한편, 문제해결에 주된 역할을 하는 직관적 사고(통찰, 구조적 이해)와 관련하여 평면에서의 간단한 형태의 등주문제를 생각해보자. 즉, '일정한 둘레의 길이를 가지는 직사각형 중에서 넓이가 최대인 사각형은 어떤 사각형인가?' 라는 문제에 대하여 속진학습의 영향으로 수학에 관심이 많은 초등학생들조차도 그 답을 알고 있다. 그러나 그 이유에 대한 설명은 초등학생을 포함한 대부분의 학생은 해석적 또는 대수적인 방법(형식적인, 연역적인 방법)을 택하고 있다. 심지어 대부분의 선생님들까지도 이러한 방법을 사용하고 있다. 반면 기하적인 방법(구조적 이해)을 사용하는 경우는 거의 없다. 이는 수학학습에서 직관적 사고와 통찰을 강조하는 것에 반하는 현상인 것이다.

위와 같은 형식적 고착화의 문제는 지식의 전달에서 개인화/배경화의 과정을 과소평가한 결과로 나타날 수 있는 교수학적 현상이다(강완, 1991).

물론, 이러한 형상은 여러 가지 관점에서 해석될 수 있지만, 이른 시기의 수학적 형식화도

* 제주대학교(kbchoe@jejunu.ac.kr)

주된 원인 중 하나이다. 수학적 형식화는 학생들의 학습 수준향상을 위하여 반드시 필요한 것이지만 경우에 따라서는 학생들의 통찰력을 사장시키는 단순한 도구에 불과할 수도 있다.

이 논문에서는 평면에서의 등주문제 지도 방법을 게슈탈트 심리학적 관점에서 분석하여 초등 영재수업에 적용가능 한 프로그램을 구성하는 문제를 고찰하고, 이로부터 수학교육에서의 시사점을 얻고자 한다.

II. 게슈탈트

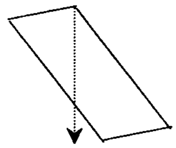
1. 관계적 결정의 원리

관계적 결정 원리는 형태심리학자들이 주장하는 공통적인 원리로 '전체는 요소(부분)의 단순한 합과는 다른 그 자체를 구조화하여 게슈탈트(gestalt, configuration)를 형성하고 내적 관련성을 보유하며, 또한 부분은 그 전체에 의해서 규정되고 전체 속으로 편입된 이상 단순한 요소는 아니며 짜임새 있는 게슈탈트를 이루고 있는 전체 속의 부분이다' 라는 이론이다(황혜정, 나귀수, 최승현, 박경미, 임재훈, 서동엽, 2008).

따라서 형태심리학에서의 문제해결은 부분을 단순히 모아서 전체를 구성하는 것(행동주의 심리학)이 아니라, 문제의 구성요소들이 전체와 관련하여 적절히 기능을 했을 때 가능하다. 또한 형태심리학자들은 내적인 구조적 관계는 통찰 현상에 의해 발견된다고 보았다. 즉, 통찰은 문제의 구성요소들을 재조직함으로써 획득될 수 있다.

2. 생산적 사고

베르트하이머(Wertheimer)는 교육의 측면에서 인간의 인지구조에 대한 형태심리학자들의 관점을 가장 잘 설명한 사람이다(남승인, 신준식, 류성림, 권성룡, 김남균, 백선수 외, 2004). 그는 학생들의 사고 과정을 연구하기 위해, 생산적 사고(productive thinking) 또는 구조의 이해에 기초한 사고를 설명하고 입증하는 데 많은 관심을 기울였으며, 생산적 사고의 기제(mechanism)를 밝히려고 평행사변형 문제를 이용하였다.



[그림 II-1] 높이에 관한 그릇된 인식

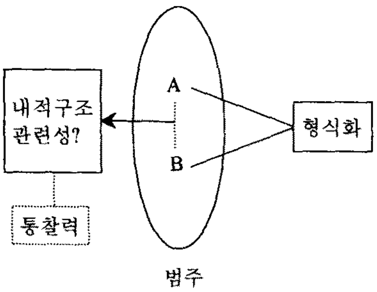
[그림 II-1]에서와 같은 오류는 넓이를 구하는데 수직선을 긋는 이유를 이해하지 못하고 단지 넓이에 관한 형식화된 규칙에 얽매인 경우에 나타날 수 있는 현상이며, 평행사변형과 직사각형 사이의 기능적 동질성(황혜정 외, 2008)을 이해하지 못함에 기인된 실수라고 베르트하이머는 지적 한다.

평행사변형 문제를 구조의 관점에서 분석해 보자. 수직선을 긋고 그 길이와 밑변의 길이를 곱하는 학생들의 활동의 실제는 무엇인가? 실제로, 학생들은 직사각형의 넓이를 계산하는 일반적인 알고리즘을 적용했던 것이다. 학생들이 이러한 알고리즘과 직사각형의 관계를 파악하는 데에는 별다른 어려움이 없다. 그러면 학생들이 평행사변형과 이 알고리즘과의 관계를 이해하는 것은 어떠한가? 적어도 평행사변형의 구조적 이해 없이는 불가능하다.

사물을 조직된 전체로 지각하려는 인간의 자연적인 경향성은 평행사변형문제의 본질적인 구조를 이해하는데 도움을 준다. 전체로 지각한다는 측면에서 볼 때, 평행사변형은 다른 형

태-한 부분이 다른 쪽 끝부분에 정확하게 채워질 수 있으므로-인 직사각형으로 지각하게 된다. 평행사변형을 수선에 따라 나누어 각 조각(부분)을 재구성(조직)화하여 직사각형이 되도록 변형시키면 평행사변형의 넓이를 구하는 공식에서 왜 수선을 긋는지 알게 된다. 반면, 학생들의 구조적인 이해가 동반되지 않은 형식화는 사물을 구조적인 전체로 보려는 인간의 자연적인 경향성을 거스르는, 무의미하고 비생산적인 학습, 즉 통찰력을 사장시키는 결과를 초래할 수 있다.

위의 사실로부터 통찰력과 형식화의 관계를 [그림 II-2]와 같이 이해할 수 있다. 즉, 두 대상이 같은 것으로 형식화 될 수 있다면, 형식화되기 이전의 두 대상은 유사한 구조적 관련성을 지닌다.



[그림 II-2] 통찰력과 형식화

수학자들은 어떤 현상을 형식화하는 것을 의무인 것처럼 생각하고 있다. 그리고 이 형식화되어진 수학적인 사실이 학교현장에 도입된다. 이러한 과정 중에 수학자 자신의 수년간에 걸친 사고활동은 논리적 형식화의 저 편으로 사라진다. 수학교육의 입장에서 실제로 중요한 것은 수학자들이 만든 형식화라는 결과가 아니라 그들의 사고활동 과정이다. 형식화의 결과는 사물을 조직된 전체로 지각하려는 인간의 자연적인 경향성을 사장시킬 수 있다.

III. 평면에서의 등주문제

평면에서 일정한 둘레의 길이를 가지는 단일폐곡선 중에서 그 넓이가 최대인 도형은 무엇인가? 라는 문제를 평면에서의 등주문제 (isoperimetric problem)[1]라고 한다. 이를 형식화하면 다음과 같다.

최대화: $\int y\, dx$ (넓이)

제약식: $\int ds = L$ (둘레의 길이)

물론 그 답은 '원'인데, 주로, 라그랑제 승수법(Lagrange multiplier method)을 사용하여 답을 구한다.

이 장에서는 등주문제와 관련하여, 학교현장에서의 지도가능성에 초점을 두고 크게 두 가지의 관점, 즉 하나는 원의 특성을 이용하는 잘 알려진 슈타이너의 방법과 또 다른 하나는 다각형의 등주문제를 이용하는 방법을 고찰한다.

1. 원의 특성을 이용하는 방법

이 방법은 이미 답이 원이라는 사실을 알고 (추측하고) 있을 때, 연역적인(논증적) 추론을

1) 등주문제는 고대로부터 알려져 온 흥미로운 주제로 매력적인 역사를 가지고 있다. 1841년에 슈타이너(Jacob Steiner)에 의하여 엄격한 증명이 되었다. 그때까지 등주문제는 미·적분을 사용하는 해석적 신봉자와 순수기하 신봉자 사이에 논쟁의 중심에 있었다. 비록 해석적인 방법(Boas, Mary L., 1984 p. 401; Marsden, Jerrold E., 1974 p. 432 참조)의 명백성이 채택되었다고 할지라도, 슈타이너는 증명의 방법으로 단지 순수기하적인 접근방식을 사용하였다(Bogomolny, A., Isoperimetric Theorem and Inequality, http://www.cut-the-knot.org/do_you_know/isoperimetric.shtml).

통하여 정당화를 주장하는 방법으로 잘 알려진 슈타이너의 기하적 관점의 접근법이다(리차드 쿠랑 · 허버트 로빈슨(이언 스튜어트 개정, 박평우 · 김운규 · 정광택 옮김, 2003). 즉, 원의 일반적인 특성

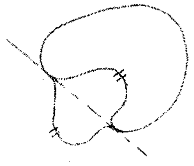
· 볼록 곡선이다.
· 지름 축에 대칭이다.
· 반원에 대한 원주각은 90°이다.
· 어느 점에서나 곡률이 같다.
⋮

을 파악하고 이를 적당한 순서의 탐구문제로 조직하여 평면에서의 등주문제는 그 답이 필연적으로 원이 될 수밖에 없다는 결론에 도달시키는 방법이다.

이러한 관점에서 개략적인 프로그램 형태를 구성해보자.2)

먼저, 평면에서 일정한 둘레의 길이 L을 가지는 단일폐곡선 중에서 그 넓이가 최대인 곡선을 C라고 하자.

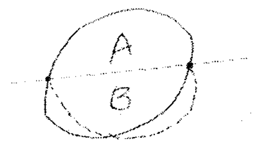
[단계 1] 곡선 C는 볼록 곡선이여야만 한다. 그 이유는 [그림 III-1]과 같다.



[그림 III-1] 오목과 볼록

초등학교의 경우는 수학과 교육과정상 오목다각형을 다루고 있지 않은 이유로 인해서, 도형에서의 오목 · 볼록성과 관련된 개념형성에 항상 유념해야 한다.

[단계 2] 곡선 C의 길이를 반 $\frac{L}{2}$으로 나누는 두 점을 지나는 선분의 아래와 위에 있는 곡선 C로 둘러싸인 영역의 넓이는 같아야만 한다. 즉, [그림 III-2]에서 영역 A의 넓이와 영역 B의 넓이는 같다.



[그림 III-2] 넓이의 반분

만일 A와 B의 넓이가 같지 않다면, 이를테면, A의 넓이가 B의 넓이보다 크다면 [그림 III-2]에서와 같이 영역 A를 그림에 주어진 선분에 대하여 대칭을 시키면 곡선의 길이 L을 변화시키지 않고 넓이가 더 큰 단일 폐곡선을 만들 수 있다. 이는 둘레의 길이 L을 가지는 단일폐곡선 중에서 그 넓이가 최대인 곡선이 C라는 사실에 모순이 된다.

이제, [단계 2]의 사실로부터 둘레의 길이가 반인 반곡선만 고려하면 된다.

초등학교의 경우 [단계 2]는 공간감각 기르기 활동에서 뒤집기(flip)와 관련된다.

[단계 3] 이제 [단계 1]과 [단계 2]의 사실로부터 얻어진 반곡선의 원주각이 항상 90°이다. 또는 곡률이 일정하다.

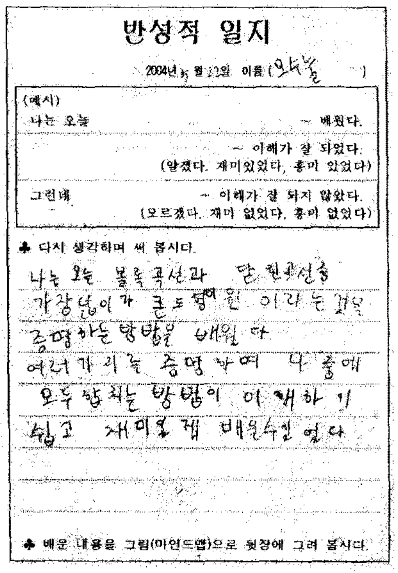
[그림 III-3] 원주각과 넓이

2) 실제로, 이것은 ○○대학교 영재교육원의 초등수학반 심화과정의 프로그램 중 하나이다.

만일 원주각이 90°가 아니라면 [그림 III-3]에서 빗금 친 부분의 넓이변화 없이 원주각을 90°로 만들면, 삼각형 T의 넓이보다 삼각형 R의 넓이는 더 커진다. 이유는 주어진 두 변을 가지는 삼각형 중에서 두 변이 직각을 이루는 경우(직각 삼각형)에 넓이가 최대이기 때문이다. 따라서 원주각은 항상 90°이어야 한다.

이와 같은 연역적 탐구 방법으로 구성된 초등 수학영재 프로그램을 다년간 투입해본 바에 따르면, 학생들은 강사의 설명을 이해하는데 별 어려움이 없는 것으로 드러났다.[3]

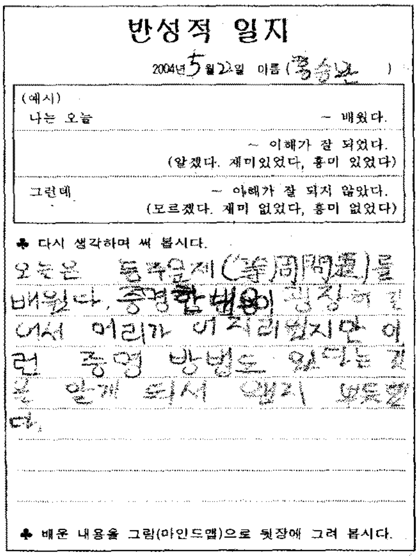
[그림 III-4]는 등주문제와 관련된 학생들의 프로그램에 대한 반응인 반성적일지의 예이며, 다른 대다수의 학생의 반응도 이 학생과 유사하다.



[그림 III-4] 반성적 일지1

그러나 경험한 바에 의하면 학생들은 능동적으로 아이디어를 내지는 못하였으며, 거의 수동적 학습태도를 보였다. 그러한 이유는 증명(정당화)의 방식이 초등학생들의 인지수준에 맞지 않게 비활동적, 비조작적이며 또한 주어진 단계별 탐구주제들 사이의 관련성(내적 관련성)을 인식할 수 있어야 문제를 해결할 수 있도록 구성된 탓이다.

실제로, [그림 III-5]는 다수의 탐구주제를 해결한 후 이때 나온 결과들을 모아서 원래의 주제인 등주문제를 해결하는 긴 증명과정에 대한 어려움을 나타내고 있다.



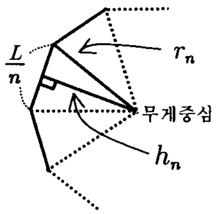
[그림 III-5] 반성적일지2

2. 다각형의 등주문제를 이용하는 방법

다각형에 관한 등주문제의 해결을 통해서 일

3) 이는 ○○대학교 영재교육원의 2004년부터 2008년까지 투입된 초등수학반 심화과정의 프로그램 중 하나이다. 주로 수업은 위에서 언급한 단계별 학생의 탐구활동과 강사에 의한 정리의 방식을 따르고 있으며, 피드백은 주로 강사(1명)와 담임(2명)의 수업 중의 관찰(학생의 아이디어 발견과 메타인지 등)과 반성적 일지 · 마인드 맵(학생의 이해력)을 참고로 하고 있다. 실제로, 이 프로그램에 대한 강사와 담임의 수업 중의 학생관찰에 따르면 강사의 설명에 대한 이해력은 비교적 좋지만 탐구주제의 문제해결을 위한 자기주도적인 아이디어 발견과 탐구주제들 사이에 어떤 관계가 있는가와 같은 메타인지적인 능력은 20명 중 몇 학생을 제외하고는 부족함을 보였다.

반적인 경우로 접근하는 방법이다. 즉, 다각형의 등주문제의 답은 정다각형임을 알고 있다고 가정하고, 형식적·해석적인 방법으로 일반적인 등주문제를 해결하는 방법이다. 실제로, 둘레의 길이가 일정한 정다각형의 극한은 원인데, 이 원이 바로 우리가 원하는 것, 등주문제의 답이 됨을 보이는 방법이다.



[그림 III-6] 정 n각형

정 n각형의 둘레의 길이를 L이라고 하고 무게중심에서 한 변까지의 거리와 한 꼭짓점까지의 거리, 즉 내접원의 반지름을 h_n, 외접원의 반지름을 r_n이라고 두자([그림 III-6] 참고).

무게중심에서 한 변까지의 거리 h_n은 다음과 같다.

$$h_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{n} \cdot tan\{\frac{(n-2)\pi}{2n}\}$$

$$= \frac{L}{2} \cdot \frac{\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}}$$

따라서 다음을 얻을 수 있다.

$$\lim_{n \to \infty} h_n = \frac{L}{2\pi} \quad (1)$$

한편, 식 (1)의 우변의 값 $\frac{L}{2\pi}$는 원주가 L인 원의 반지름을 의미한다.

또한 정 n각형의 외접원의 반지름 r_n을 이용할 수도 있다. 실제로

$$r_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{n} \cdot \frac{1}{\cos\{\frac{(n-2)\pi}{2n}\}}$$

$$= \frac{L}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}}$$

따라서

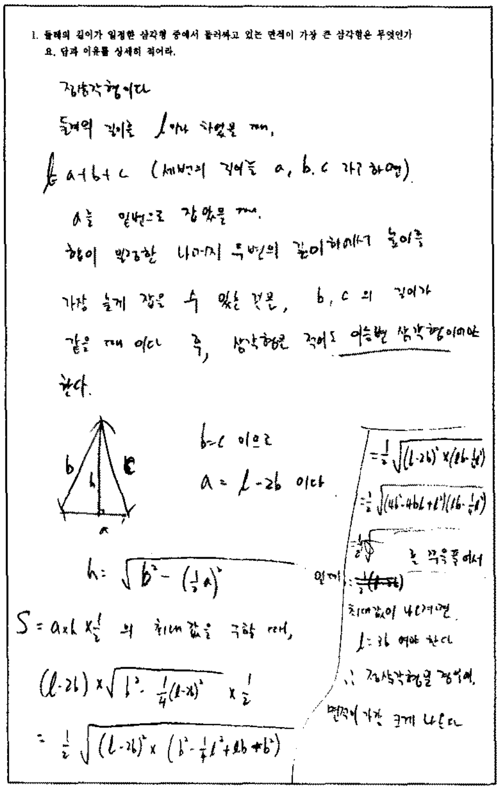
$$\lim_{n \to \infty} r_n = \frac{L}{2\pi} \quad (2)$$

(1)의 값과 (2)의 값이 같음을 알 수 있으며, 주목할 사실은 h_n은 위로 유계인 증가수열인 반면 r_n은 아래로 유계인 감소수열이다. 즉, 내접원은 반지름이 증가하면서 원주가 L인 원에 수렴하고, 외접원은 반지름이 감소하면서 원주가 L인 원에 수렴한다.

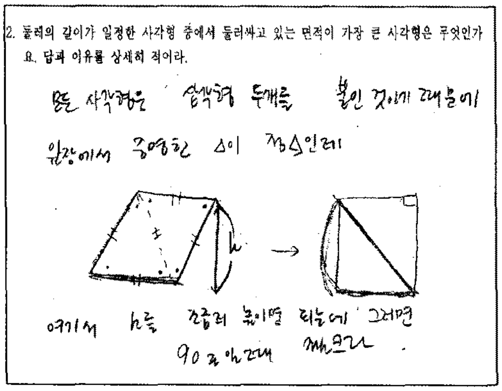
IV. 등주문제의 게슈탈트적인 접근

대학생들의 통찰과 관련된 직관적 사고능력과 형식적 고착(formal abidance)의 정도를 알아보기 위하여, ○○교대 수학교육과 2학년 학생 12명을 대상으로 삼각형과 사각형에 대한 등주문제를 물어보았다.

삼각형 등주문제의 경우에는 12명의 학생 중 6명이 정삼각형이라고 답을 했지만, 풀이과정이 맞은 학생은 2명에 불과했으며 대부분의 학생이 대수적 또는 해석적 식을 그 풀이방법으로 사용하고 있었다. 삼각형구조의 재조직화를 통한 기하적인 풀이방법은 단 2명의 학생만이 사용하고 있었는데, 그 중 1명만 완전한 것은 아니지만 [그림 IV-3]과 같은 참신한 아이디어를 사용했다. 실제로, 이 학생은 먼저 [그림 IV-3]의 아이디어를 사용하여 이등변삼각형을 만들고 그 후의 과정은 대수적인 식을 이용하였다([그림 IV-1] 참조).



[그림 IV-1] 삼각형의 등주문제 아이디어



[그림 IV-2] 사각형의 등주문제 아이디어

사각형 등주문제는 12명의 학생 중 9명의 학생이 정사각형이라고 답을 했다. 특이한 점은 대부분의 학생이 범주를 직사각형의 경우로 한정하여 사용하고 있으며, 삼각형의 경우와 마찬가지로 대부분의 학생이 대수적 또는 해석적 식을 풀이방법으로 사용하고 있었다. 풀이 과정도 산술·기하평균 또는 이차방정식을 이용하였으며, 1명만이 정삼각형 두 개를 사용한 기하적인 방법을 사용하였다([그림 IV-2] 참조).

위에서와 같은 대학생들을 대상으로 한 등주문제와 관련된 실험결과는 중등과정에서의 최대·최소문제는 대부분 함수식과 관련하여 다루고 있고 또 그렇게 풀어 왔었다는 사실로 비추어 볼 때, 어느 정도는 예상된 것이다. 이와 같은 형식적 고착은 수학적 통찰력을 사장시키는 주된 원인 중 하나이다. 특히, 초등학생의 경우에는 형식적 고착화의 문제를 더욱 주의하여야 한다.

등주문제의 해결방식은 3장에서 논의한 것처럼 연역적, 형식적·해석적인 접근이 일반적이다.

이 장에서는 수학적인 식을 사용한 접근방법 대신에 도형의 '구조적인 이해' 에 바탕을 둔 형태심리학적 접근방식에 따른 초등영재 프로그램의 구성에 관하여 논의한다. 따라서 프로그램 구성의 기본적인 조건과 방향은 초등학생들에 맞게 친숙한 탐구주제(삼각형, 사각형, …)로 구성하고, 정당화의 과정은 귀납적이고 조작적 검정을 사용한다. 또한 수학적인 식 대신에 도형의 구조적인 이해를 통한 구조의 변형과 관련된 조작활동이 중심이 된다. 즉,

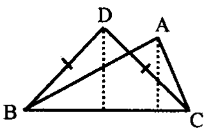
- (친근성) 다각형의 등주문제를 기본으로 하여 등주문제를 다룬다.
- (통찰) 도형의 구조적 이해를 바탕으로 한다.
- (비형식성) 수학적인 식을 이용하지 않는다.
- (정당화) 귀납적 추론과 조작적 검정을 사용한다.

이러한 접근방식은 아동들은 '활동적'이

고, 본질적으로 분석적이기 보다는 '구성적' 적인 경향이 있으며 또한 사물에 대한 경험으로부터 실체를 구성한다고 보는 딘즈(Dienes)의 관점(남승인 외 2004)과 인지발달에서 '내면화된 가역적 행동(조작)'을 중시하는 피아제(Piaget)의 관점(우정호 · 홍진곤, 1999)과도 일맥상통 한다.

1. 삼각형의 등주문제

삼각형과 관련된 등주문제의 답이 정삼각형인 이유는 [그림 IV-3]을 참조하면 된다.



[그림 IV-3] 삼각형 등주문제의 핵심 아이디어

실제로, [그림 IV-3]에서 선분 AB의 길이와 선분 AC의 길이의 합은 선분 BD길이(=선분 DC의 길이)의 2배로, 따라서 둘레의 길이를 변화시키지 않고 삼각형의 넓이를 더 크게 만들 수 있다. 이것은 삼각형에서 길이의 합이 일정한 두 변의 구조적 변형에 따른 높이의 변화와 관련된 통찰의 문제이다([그림 IV-3]에서 점선(높이) 참고).

이제, 삼각형의 등주문제를 해결하기 위하여 논리적으로 접근해 보자.

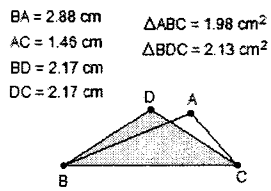
> 만일 일정한 둘레의 길이 L을 가지는 삼각형 중에서 그 넓이가 최대인 삼각형을 T라고 하면, 삼각형 T의 임의의 두 변의 길이는 같다. 즉, 만일 길이가 같지 않은 변이 있다면 [그림 IV-3]의 아이디어를 사용하여 삼각형의 넓이를 더 크게 만들 수 있다. 따라서 T는 같은 길이의 세변을 가져야 한다. 즉, T는 정삼각형이다.

위와 같이 논리적으로 접근하지 않으면, [그림 IV-1]에서의 대학생 반응처럼 이등변삼각형 정도의 반응에만 머물 수 있다.

이러한 논리는 우리의 방식으로 일반적인 다각형의 등주문제를 다룰 때 항상 염두에 두어야 할 사항이다. 즉, 다각형의 모든 변의 길이가 같음을 보이는 논리적인 방법으로 배리법(背理法)을 사용한다는 것이다.

특히, 초등학생의 경우에는 논리적 정당화의 어려움을 겪을 수 있으므로, 소집단 활동, 적절한 교사의 발문, 교구나 공학을 이용한 조작활동 등이 도움을 줄 수 있다.4)

한편, [그림 IV-4]는 [그림 IV-3]의 아이디어를 도출하기 위한 공학(GSP)을 이용한 조작활동의 예이다.



[그림 IV-4] GSP를 이용한 조작활동

2. 사각형의 등주문제

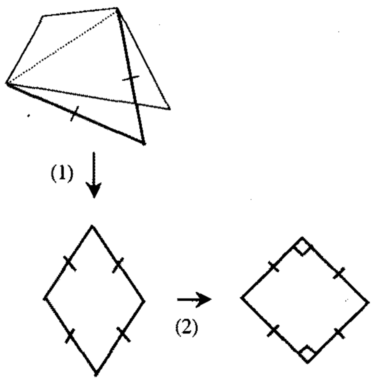
우선, 사각형 이상의 다각형에서의 등주문제는 그 답이 오목다각형이 될 수 없다.

사각형에서의 등주문제는 사각형은 각 대각선을 기준으로 두 삼각형의 결합으로 생각 할 수 있고, 여기에 [그림 IV-3]의 아이디어를 사용하면 '사각형의 임의의 인접한 두 변의 길이는 같아야 한다.' 라는 결론에 도달하고, 따

4) 조작활동을 통한 주체의 행동으로부터 '삼각형에서 어느 두 변의 길이가 다르면 그 넓이를 더 크게 만들 수 있구나' 라는 반영적 추상화가 일어나도록 교사의 적절한 발문이 필요할 수도 있다.

라서 우리는 마름모라는 잠정적인 결론을 얻을 수 있다([그림 IV-5]의 (1) 참조).

한편, [그림 IV-5]의 (2)는 주어진 두 선분을 두 변으로 하는 삼각형 중에서 주어진 두 변이 직각을 이루는 경우에 넓이가 최대라는 사실을 이용하여 사각형에서의 등주문제의 답은 정사각형임을 보여주고 있다. 실제로, 이것은 [그림 IV-2]의 아이디어와 같은 것이다.



[그림 IV-5] 사각형의 등주문제

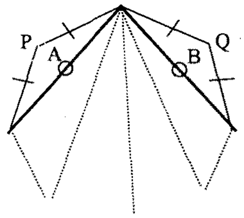
3. 다각형의 등주문제

오각형이상의 다각형에 대한 등주문제의 답이 정다각형이라는 사실을 보이자. 즉, 다각형의 변들의 길이가 모두 같고, 각 꼭짓점에서의 내각이 크기가 같음을 보이면 된다.

먼저, [그림 IV-3]의 아이디어를 바탕으로 변의 길이가 모두 같다는 결론을 얻는다.

다음으로, 내각의 크기가 모두 같음을 보여야 한다. 그러나 이는 삼각형과 사각형의 경우와는 달리 그렇게 쉽게 해결할 수 있는 문제는 아니다. 이 논문에서는 일관성 유지(삼·사각형에 사용된 아이디어를 일반적인 다각형의 경우로)의 관점에서 문제해결의 기본적인 아이디어로 [그림 IV-3]을 선택하고 있다. 그러면 [그림 IV-3]의 아이디어를 어떻게 사용할 것인가?

이를 위해서 다각형의 각 꼭짓점에서 좌·우로 두 번째 점으로 연결된 대각선(이하 인접 대각선)의 길이가 같음을 보이면 된다.



[그림 IV-6] 같은 길이의 인접 대각선

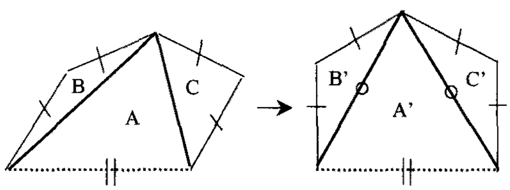
즉, [그림 IV-6]에서 점선이 아닌 실선인 대각선의 길이가 같으면, 두 삼각형 A와 B는 합동이다(SSS합동). 이로부터 각 P와 각 Q는 같다.

이와 같은 방법을 몇 번 사용하면 어렵지 않게 주어진 다각형의 내각의 크기가 모든 같아짐을 보일 수 있다.

따라서 우리가 해결해야 문제는 다음과 같다:

어떻게 하면 각 변의 길이를 같게 유지하면서 또한 넓이의 변화를 고려하면서 인접 대각선의 길이를 같게 만들 수 있을까?

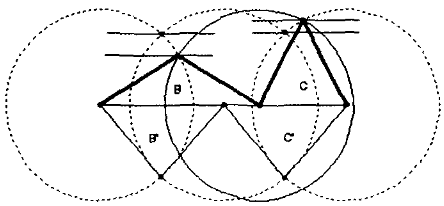
먼저, [그림 IV-3]의 아이디어를 '인접 대각선에 적용' 해보자. 여기서의 문제는 인접 대각선의 길이를 같게(균등하게) 만드는 동안 인접 대각선 각각에 붙어 있는 삼각형의 모양도 변화를 겪게 된다는 것이다. 이를 테면, [그림 IV-7]에서 A는 A'으로, B는 B'으로, 또한 C는 C'으로 변한다.



[그림 IV-7] 대각선의 변형

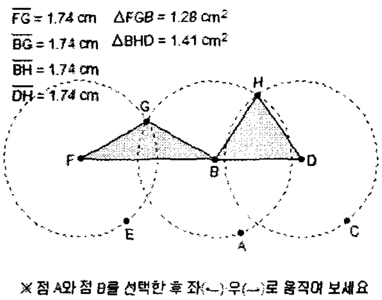
이제, 넓이의 변화를 생각해 보자. 우선, 삼각형 A보다 삼각형 A'의 넓이가 더 큰 이유는 [그림 IV-3]에 의하여 당연하다.

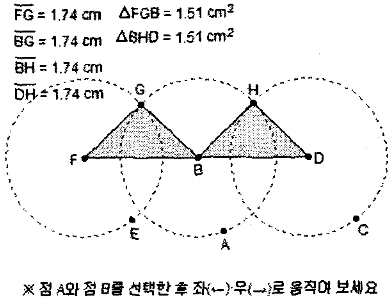
삼각형 B와 C의 넓이의 합과 삼각형 B'과 C'의 넓이의 합을 어떻게 비교할까? 삼각형 B와 C 그리고 삼각형 B'과 C'을 변형하여 [그림 IV-8]과 같이 만들 수 있다.



[그림 IV-8] 다각형 등주문제의 핵심 아이디어

가로선(인접 대각선)을 기준으로 위에 있는 두 삼각형 B와 C의 넓이 합은 아래에 있는 두 삼각형B'과 C'의 넓이 합보다 작다. 실제로, 삼각형의 밑면들이 균등분배 되었을 때 그 넓이의 합이 최대가 된다. [그림 IV-9]는 GSP를 활용한 [그림 IV-8]의 실제적인 조작활동을 보여주고 있다.

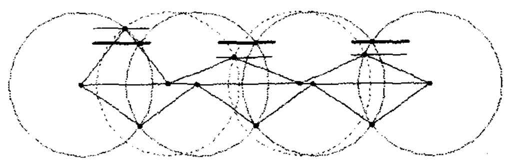




[그림 IV-9] 넓이 변화

[그림 IV-9]의 아이디어는 사각형의 경우에도 적용될 수 있다. 즉, [그림 IV-5]의 마름모에서의 두 대각선의 길이가 같을 때 넓이가 최대가 된다.

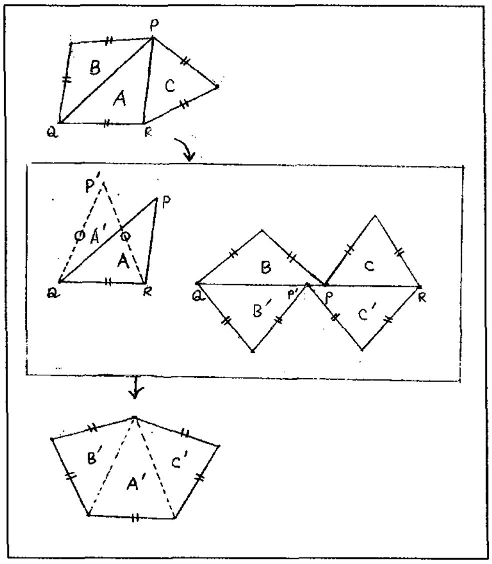
이러한 아이디어는 [그림 IV-10]과 같이 일반화 될 수 있다.



[그림 IV-10] 균등분배와 비균등분배

따라서 만일 인접 대각선이 길이가 같지 않다면, [그림 IV-7]과 같은 대각선의 변형으로 둘레(각 변의 길이는 같게 유지)의 길이는 변화시키지 않은 채 넓이를 항상 더 크게 만들 수 있다.

[그림 IV-11]은 오각형에서의 우리의 아이디어를 적용한 구체적인 예이다.



[그림 IV-11] 오각형 등주문제 아이디어

4. 평면에서의 등주문제

앞에서 우리는 다각형의 등주문제를 해결하였다. 이를 통해서 일반적인 등주문제를 해결한다. 구체적으로 이야기하면, 둘레의 길이가 L로 같은 정 n각형의 넓이는 n에 따른 증가수열로 원주가 L인 원의 넓이에 수렴함을 귀납적으로 유추하는 방법이다. 즉,

둘레의 길이가 L인 정 n각형 $\xrightarrow[n\to\infty]{}$ 원

여기서,

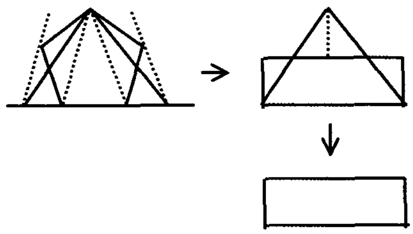
- 원의 넓이는 어떻게 되는가?
- 원주는 L인가?

가. 일반적 등적변형

둘레의 길이가 같은 임의의 두 정다각형의 넓이비교는 넓이를 구하는 형식적인 공식을 사용하지 않고 등적변형을 이용한다(단, 넓이비교를 위해서 직사각형의 넓이공식은 허용한다). 즉,

임의의 다각형은 직사각형으로 등적변형가능하다.

라는 사실을 사용하면 된다. [그림 IV-12]는 오각형의 직사각형으로의 등적변형을 보여주고 있다.



[그림 IV-12] 오각형의 등적변형

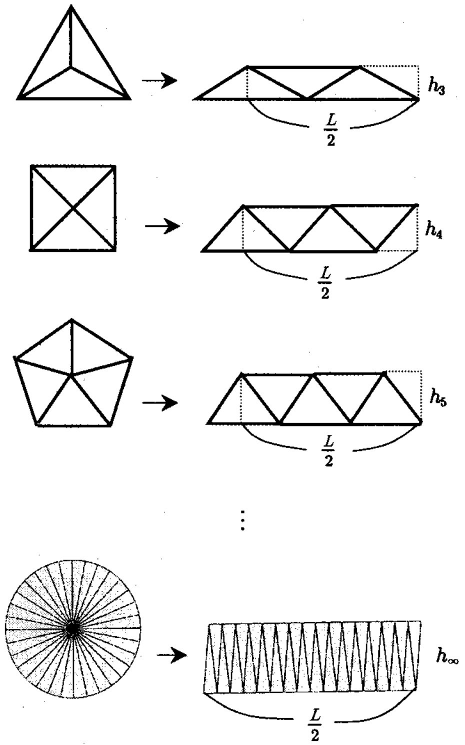
둘레의 길이가 같은 두 정다각형의 넓이비교는 등적변형을 통해서 얻어진 각각의 직사각형 넓이를 비교하면 된다. 실제로, 둘레의 길이가 같은 경우, 정 n각형의 넓이는 n에 따른 증가수열이 됨을 알 수 있다.

나. 합동인 삼각형을 이용한 등적변형

정 n각형을 n개의 합동인 삼각형으로 조각내어 직사각형으로 구조적인 재배열을 행한다. 이 경우에는 높이 h_n의 비교가 바로 넓이의 비교를 결정하며, 정 n각형의 넓이는 n에 따른 증가수열이 됨을 알 수 있다. 실제로, [그림 IV-13]과 같은 조작활동을 통해서

$$h_3 < h_4 < h_5 \cdots < h_\infty$$

가됨을 알 수 있다.



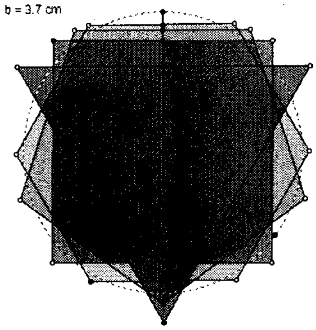
[그림 IV-13] 합동인 삼각형을 이용한 등적변형

[그림 IV-13]에서 마지막 그림은 초등학교 교과서 <6-나> 단계에 소개된 구조적 변형을 통한 원의 넓이를 구하는 방법이다. 또한 [그림 IV-13]의 아이디어는 정 n각형과 평행사변형·사다리꼴 사이, 평행사변형·사다리꼴과 직사각형 사이의 기능적 동질성을 이해하고 있다면, 이와 같은 구조적 변형이 아동들에게 어렵지 않을 것이다. 게다가 구조적 변형을 통한 원의 넓이를 구하는 방법이 역으로 정 n각형의 직사각형으로의 구조적 변형에 단초를 제공할 수도 있다.

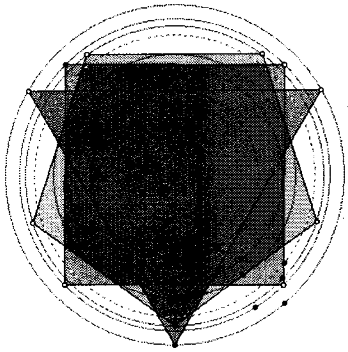
다. 귀납적, 조작적 검정

둘레의 길이 L인 정 n다각형은 n이 증가함에 따라 점점 원형에 가까이 가고, 결국에는 극한이 원이 된다. 그런데 극한인 원의 원주가 여전히 L인가? 라는 의문이 들 수 있다.

[그림 IV-14]와 [그림 IV-15]는 이러한 질문에 대한 무게중심을 이용한 조작적 검정을 보여주고 있다.



[그림 II-14] 조작적 검정



[그림 II-15] 내·외심을 이용한 조작적 검정

V. 결론 및 제언

등주문제의 해결방법은 그 역사가 깊은 만큼 매우 다양하다. 이 중에서 미·적분을 이용한 방법은 명확하고 수학적인 심미성을 준다. 그러나 이러한 방법은 학생들이 접하기가 어렵고 또한 지극히 해석적이다. 근본적으로 등주문제는 기하적인 문제이기 때문에 기하적인 방법이 오히려 학생들의 직관적 사고와 통찰력을 길러

주는데 유용하다.

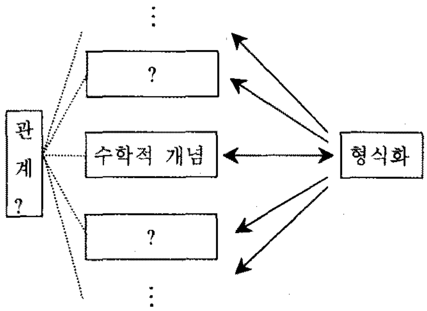
이러한 관점에서 슈타이너(Steiner)의 기하적인 방법을 고찰하고, 이로부터 도형의 구조적 이해에 바탕을 둔 초등 수학영재 프로그램 구성에 관하여 집중적으로 고찰 및 논의하였다. 여기에는 초등생의 인지수준에 맞게 경우에 따라서는 정당화의 방법으로 GSP(The Geometer's Sketchpad, Version 4.03)를 이용한 조작적 검증도 택하였다.

우리나라의 교육환경에 비추어 볼 때, 형식적 고착화의 문제는 의식하든 안하든 필연적인 것처럼 보인다. 사각형의 등주문제를 생각해보자. 대부분의 학생들이나 선생님들은 이차방정식을 이용하여 해결한다. 도형에서의 문제를 도형의 관점으로 해결하지 않고, 당연한 것처럼 대수식의 문제로 몰고 간다. 이러한 과정에서 문제해결의 직관력과 통찰력은 사장된다. 실제로, 어떤 속성이 다른 속성으로 변할 때 항상 이러한 문제가 발생할 수 있다. 여기서 관계적 이해 교육의 필요하다.

이와 관련하여 형태심리학의 구조적 이해의 관점에서 유추할 수 있는 수학교육에서의 시사점을 주고자 한다. 보통 초등학교 수학교과서의 구조는 먼저 활동이 주어지고 이로부터 개념형성과 형식화가 이루어지고 끝으로 활용과 적용의 순서를 따른다. 여기서 역의 문제를 생각해 보자는 것이다. 즉,

> 무엇인가가 형식화되어 졌다면, 이렇게 형식화 될 수 있는 수학적 개념들은 어떤 것들이 있는가? 또한 이들 사이에는 어떤 관계들이 있는가?

이를 테면, $\frac{1}{2} \times A \times B$ 로 형식화 될 수 있는 수학적 개념에는 어떤 것들이 있는가? 또한 이들 사이에는 어떤 관계들이 있는가? 이를 도식화 하면 [그림 V-1]처럼 표현 할 수 있다.



[그림 V-1] 형식화를 중심으로 한 구조적 이해

끝으로, 등주문제와 관련하여, 형태심리학을 이론적 배경으로 분석한 우리의 관점을 중심으로 한 초등 영재프로그램 구성은 수학적 추론력을 기르고 또한 여러 도형을 구조적(관계적)으로 이해하는 데 도움을 줄 수 있을 것이다.

참고문헌

강문봉(1996). 초등학교에서의 수학적 추론의 지도에 관하여(1), **수학교육학연구, 6**(2), 71-85.

강문봉 · 김수미 · 송상헌 · 박교식 · 박영배 · 유현주 외(2002). **초등수학교육의 이해,** 경문사.

강완(1991). 수학적 지식의 교수학적 변환. 한국수학교육학회지 **수학교육, 30**(3), 71- 89.

남승인 · 신준식 · 류성림 · 권성룡 · 김남균 · 백선수 외(2004). **초등교사 교육을 위한 수학 프로그램 적용 및 확산 연구**, 교육인적자원부.

리차드쿠랑 · 허버트 로빈슨(이언 스튜어트 개정, 박평우 · 김운규 · 정광택 옮김(2003)). **수학이란 무엇인가**, 경문사.

우정호 · 홍진곤(1999). **수학교육학연구, 9**(2),

383-404.

황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 · 서동엽(2008). **수학교육학신론**, 문음사.

Boas, Mary L. (1984). Mathematical Methods in the Physical Science, 연합출판

Lampert, M. (1990). When the Problem Is Not the Question and the Solutions Is Not the Answer: Mathematical Knowing and Teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-63.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Yackel, E., & Cobb, P. (1994). *The development of Young Children's Understanding of Mathematical Argumentation.* Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, New Orleans.

________. (1996). Sociomathematical Norms, Agumentations, and Autonomy in Mathematics. Journal for Research in *Mathematics Education 27*(July), 458-477.

A Study on the Isoperimetric Problem in a Plane focused on the Gestalt's View for the mathematically Gifted Students in the Elementary School

Choi, Keun Bae (Jeju National University)

The isoperimetric problem has been known from the time of antiquity. But the problem was not rigorously solved until Steiner published several proofs in 1841. At the time it stood at the center of controversy between analytic and geometric methods.

The geometric approach give us more productive thinking (insight, structural understanding) than the analytic method (using Calculus).

The purpose of this paper is to analysis and then to construct the isoperimetric problem which can be applied to the mathematically gifted students in the elementary school. The theoretical backgrounds of our analysis about our problem are based on the Gestalt psychology and mathematical reasoning.

Our active program about the isoperimetric problem constructed by the Gestalt's view will contribute to improving a mathematical reasoning and to serving structural (relational) understanding of geometric figures.

* key words : isoperimetric problem(등주문제), Gestalt psychology(형태심리학), mathematical reasoning(수학적 추론), productive thinking(생산적 사고)

논문접수 : 2009. 4. 16
논문수정 : 2009. 5. 29
심사완료 : 2009. 6. 8