

# 직교성 전후방 PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) 알고리즘

## Orthonormalized Forward Backward PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) Algorithm

임 준 석\*  
(Jun-Seok Lim\*)

\*세종대학교 전자공학과  
(접수일자: 2009년 6월 5일; 채택일자: 2009년 7월 20일)

PAST (projection approximation subspace tracking)는 여러 연구자들에 의해 비교 연구가 되는 대표적인 신호 부공간을 추정하는 알고리즘이다. 이 방법은 신호 부공간 추정에 있어 상대적으로 낮은 계산 복잡도를 요구하기 때문에 인기가 있는 방법이 되었다. 그러나 이 방법은 개선의 여지가 많아서 추정 정확도나 공간의 직교성 등에서 계속 개선된 알고리즘이 연구되고 있다. 본 논문은 기존에 연구된 PAST 알고리즘의 추정 정확도 개선을 위해 연구된 알고리즘 중 하나인 FB-PAST (Forward-Backward PAST) 알고리즘에 사용할 직교성 알고리즘을 제안한다.

**핵심용어:** 정사형 근사화, 신호 부공간 추정

**투고분야:** 음향통신기술 분야 (6.4)

The projection approximation subspace tracking (PAST) is one of the attractive subspace tracking algorithms, because it estimates the signal subspace adaptively and continuously. Furthermore, the computational complexity is relatively low. However, the algorithm still has room for improvement in the subspace estimation accuracy. FB-PAST (Forward-Backward PAST) is one of the results from the improvement studies. In this paper, we propose a new algorithm to improve the orthogonality of the FB-PAST (Forward-Backward PAST).

**Keywords:** Subspace Estimation, Projection Approximation

**ASK subject classification:** Acoustic Communication (6.4)

### I. 서론

최근 안테나나 소나의 배열 신호처리 기술이 발달되고, MUSIC, ESPRIT 같은 신호 부공간을 이용하는 기술이 실제 적용되는 예가 점점 늘어남에 따라서 신호 부공간 추정 알고리즘은 많은 연구자들에게 관심을 끌고 왔고 필요성이 증대되고 있다. 이에 따라서 신호 부공간 추정 알고리즘에 대한 계산량 면이나, 시변 신호 부공간 추정 등의 다양한 분야에 대한 연구가 이뤄지고 있다. 특히 시변 신호 부공간 추정 방법에서는 한번에 전체 신호 부공간을 추정하는 대신, 점진적으로 부공간을 추정해 나가는 신호 부공간 추적 기법이 발달하고 있다.

이런 방법은 전통적인 ED (eigenvalue decomposition) 방법이나, SVD (singular value decomposition) 보다 더 효율적인 형태로 발달하고 있다. 이런 특징을 지닌 방법 중 대표적인 것인 PAST (projection approximation subspace tracking) 방법이다 [1]. PAST 알고리즘의 핵심은 입력 데이터 벡터와 추정된 신호 부공간으로 정사형을 내린 결과의 자승 평균값이 최소화되도록 신호 부공간을 매 시간 새롭게 갱신 하는데 있다. 그러나 [1]에서 제안된 PAST 알고리즘은 여전히 추정 부공간의 정확성 면에서 개선할 여지를 가지고 있었다. 이에 따라 성능을 개선하기 위해서 많은 개선된 알고리즘들이 제안되었다. 그 중에는 Jung-Lang Yu에 의해서 제안된 COPAST (correlation-based projection approximation subspace tracking)의 경우는 신호 부공간 추정에 사용되는 공분산 행렬의 품질을 높여 알고리즘의 성능을 개선하는 방법을 제안

하였다 [2]. Abed-Meraim는 추정된 부공간의 직교성을 제고하기 위한 알고리즘을 발표하였다 [3]. 이 알고리즘은 OPAST (orthonormal PAST) 이라고 불리고, 이 후에 나오는 다른 직교성 알고리즘의 연구에 기반을 제공하였다. 그 외에 본 논문의 저자도 참고문헌 [4]에서 신호 부공간 추정에 사용되는 행렬의 품질을 제고하여 추정 성능을 높이는 다른 알고리즘을 제안하였는데, 이 알고리즘은 통상적인 PAST 알고리즘이 사용하는 데이터 벡터 외에 그의 공액 복소수이면서 원래 배열을 시간적으로 거꾸로 배열한 벡터를 동시에 사용하는 방법을 사용하였다. 이 방법을 본 논문에서는 [4]에서 소개한 것과 같이 FB-PAST (Forward-Backward PAST)라고 표기하기로 한다. [4]의 논문에서는 추정에 사용되는 행렬을 이상적인 공분산 행렬이 갖는 성질인 toeplitz이고 persymmetry한 좋은 성질을 가지도록 만들어서 추정 결과의 정확도 향상을 시킬 수 있었다. 그러나 이 FB-PAST 알고리즘은 최초 제안된 알고리즘인 PAST과 마찬가지로 신호 부공간을 이루는 각각의 성분 벡터간의 직교성이 충분히 보장되지 않았다. 뿐만 아니라 FB-PAST알고리즘은 성분 벡터간 직교화를 위해서 [3]에서 제안된 직교화 방법을 사용할 수 없다. 그 이유는 [3]의 방법은 입력 데이터의 형태가 벡터일 때만 사용할 수 있는 방법인데 비해서, FB-PAST의 경우는 두 개의 열을 갖춘 행렬을 기본 데이터 단위로 다루기 때문이다.

본 논문은 앞서의 FB-PAST에 직교성을 더한 새로운 알고리즘을 제안한다. 따라서 제안된 이 알고리즘은 FB-PAST가 가지고 있는 향상된 부공간 추정 정확도 뿐만 아니라 그 공간을 이루는 각각의 벡터 사이도 직교성을 충분히 갖도록 한다. 이 같은 장점을 갖춤으로써 SVD 처럼 개개의 구성 벡터가 서로 직교인 신호 부공간에 대응하는 품질을 갖는 신호 부공간을 제공하게 될 것이다. 이를 위해서 [5]에 제안된 직교화 방법을 이 논문에 적용하였다. 제안된 알고리즘의 성능을 보이기 위해서 시뮬레이션을 통해서 전통적인 PAST, 이의 직교성 알고리즘인 OPAST 및 [4]에 제안된 FB-PAST와 함께 추정 부공간의 정확도 및 그 직교성을 서로 비교한다.

## II. Forward Backward PAST Algorithm (FB-PAST)

PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) 알고리즘은 다음과 같은 목적 함수를 최소화하는 데에

근간을 두고 있다.

$$J(\tilde{\mathbf{U}}(t)) = \sum_{i=1}^L \beta^{i-1} \|\mathbf{x}(i) - \tilde{\mathbf{U}}(t)\tilde{\mathbf{U}}^H(t)\mathbf{x}(i)\|^2, \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{x} = [x_1 \ \dots \ x_N]^T$  는 입력 신호로 된 벡터이고,  $\beta$  는 0에서 1의 사이 값을 가지는 망각인자이다. 또  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  는  $N \times r$  인 신호 부공간을 나타내는 행렬이다.  $t-1$ 시간에 구한 신호 부공간  $\tilde{\mathbf{U}}(t-1)$  로부터 새로운 시간  $t$ 에서의 신호 부공간  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  를 얻기 위해서 Yang은 [1]에서 식 (1)의  $\tilde{\mathbf{U}}^H(t)\mathbf{x}(i)$  를  $\mathbf{y}(i) = \tilde{\mathbf{U}}^H(t-1)\mathbf{x}(i)$  로 근사하는 방법을 사용하였다. 이로써 다음과 같은 새로운 목적함수를 얻는다.

$$J'(\tilde{\mathbf{U}}(t)) = \sum_{i=1}^L \beta^{i-1} \|\mathbf{x}(i) - \tilde{\mathbf{U}}(t)\mathbf{y}(i)\|^2, \quad (2)$$

위 목적 함수는 적응 신호 처리 분야에서 많이 사용하는 일종의 지수 함수적으로 가중된 오차 에너지를 목적함수로 취한 형태이다. 위 목적함수  $J'(\tilde{\mathbf{U}}(t))$  를 최소화 하는 것은 최소 사승 해를 구하는 방법을 통하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}(t) &= \mathbf{C}_{yy}(t)\mathbf{C}_{yy}^{-1}(t), \\ \mathbf{C}_{yy}(t) &= \sum_{i=1}^L \beta^{i-1} \mathbf{x}(i)\mathbf{y}^H(i) = \beta\mathbf{C}_{yy}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{y}^H(t), \\ \mathbf{C}_{yy}(t) &= \sum_{i=1}^L \beta^{i-1} \mathbf{y}(i)\mathbf{y}^H(i) = \beta\mathbf{C}_{yy}(t-1) + \mathbf{y}(t)\mathbf{y}^H(t). \end{aligned} \quad (3)$$

식 (3)에서  $\mathbf{C}_{yy}(t)$  는 식 (2)에서 쓴 Yang의 근사 관계를 사용하면, 식 (4)에서와 같이 샘플 공분산 행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$  과 신호 부공간 행렬  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$  로 이뤄져 있다.

$$\mathbf{C}_{yy}(t) = \tilde{\mathbf{U}}^H(t)\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t)\tilde{\mathbf{U}}(t), \quad (4)$$

여기서  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t) = \beta\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t-1) + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)$  이다.

일반적으로, 이상적인 공분산 행렬  $\mathbf{R}_{xx}$  는 toeplitz이며 persymmetry 이다 [4][6]. 그러나, 식 (5)에서와 같이 추정된 공분산 행렬  $\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  은 위와 같은 이상적인 성질을 다 보장하지는 못한다. 그 이유는 식 (5)와 같이 추정된 공분산 행렬은 persymmetry한 성질을 만족할 수 없기 때문이다. 즉  $\mathbf{J}(\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t))^T \mathbf{J} \neq \hat{\mathbf{R}}_{xx}(t)$  이기 때문이다. 여기서

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

0] 는 역전 행렬이다 [4][6].

저자는 [4]에서 샘플 공분산 행렬을 toeplitz이고 per-symmetry하게 하기 위해서 수정된 공분산 행렬로 만들었다. 그 수정된 샘플 공분산 행렬,  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ , 은 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t) = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{R}}_{xx}(t) + \mathbf{J}\hat{\mathbf{R}}_{xx}^T(t)\mathbf{J}), \quad (5)$$

여기서  $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & & & 1 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix}$ 이다. 위의 수정된 샘플 공분산 행렬  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ 을 식 (4)에 있는 샘플 공분산 행렬 구성식을 고려 하면, 정상적인 순서로 구성된 데이터 벡터와 그의 역순으로 구성된 데이터 벡터가 동시에 필요하게 된다. 그러므로,  $\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t)$ 를 전후방 공분산 행렬이라고 할 수 있다. 위의 전후방 공분산 행렬을 PAST에 적용하기 위해서 [4]에서는 식 (4)의 갱신식을 다음과 같은 축차적인 갱신식으로 바꿨다.

$$\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t) = \beta\tilde{\mathbf{R}}_{xx}(t-1) + \begin{bmatrix} x_1(t) & x_1^*(t) \\ \vdots & \vdots \\ x_L(t) & x_L^*(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^*(t) & \cdots & x_L^*(t) \\ x_L(t) & \cdots & x_L(t) \end{bmatrix}, \quad (5)$$

[4]는 식 (5)를 근간으로 수정된 PAST를 FB-PAST라고 하였고, 그 알고리즘의 전부를 아래 표 1에 정리하였다.

표 1. FB-PAST (forward-backward PAST) 의 요약 정리  
Table 1. Summary of the FB-PAST (forward-backward PAST).

$\tilde{\mathbf{U}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, [L \times r]$	
$\tilde{\mathbf{P}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, [r \times r]$	
Do $t = 1, \dots$	
$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [x_i(t); x_i^*(t)]$	(T2.1)
$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{U}}^H(t-1)\tilde{\mathbf{x}}(t)$	(T2.2)
$\tilde{\mathbf{h}}(t) = \tilde{\mathbf{P}}(t-1)\tilde{\mathbf{y}}(t)$	(T2.3)
$\tilde{\mathbf{g}}(t) = \tilde{\mathbf{h}}(t)/(\lambda\mathbf{I}_{[2r]} + \tilde{\mathbf{y}}^H(t)\tilde{\mathbf{h}}(t))$	(T2.4)
$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \frac{1}{\lambda}[\tilde{\mathbf{P}}(t-1) - \tilde{\mathbf{g}}(t)\tilde{\mathbf{h}}^H(t)]$	(T2.5)
$\tilde{\mathbf{\epsilon}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{U}}(t-1)\tilde{\mathbf{y}}(t)$	(T2.6)
$\tilde{\mathbf{U}}(t) = \tilde{\mathbf{U}}(t-1) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}(t)\tilde{\mathbf{g}}^H(t)$	(T2.7)
END	

여기서  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_r(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)]^T$ ,  $\mathbf{x}_L(t) = [x_L(t), x_{L-1}(t), \dots, x_1(t)]^T$  그리고  $x_i(t)$ 는  $i$ 번째 센서의  $t$ 시각의 스냅샷 신호이다.  $i$ 번째 신호 부공간 벡터는  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$ 의  $i$ 번째 열벡터이다. 행렬  $\tilde{\mathbf{U}}(t)$ 의 크기는  $[L \times r]$ 이다.  $r$ 은 신호 부공간의 차원 값이다.  $x^*$ 은  $x$ 의 공약 복소수이다.  $L$ 은 센서의 수이다.

### III. 직교성 FB-PAST (Orthonormal FB-PAST)

[4]의 결과에 의하면, 앞 장의 FB-PAST는 추정 부공간의 정확도가 향상되는 것으로 나타났다. 하지만 직교성은 전통적인 PAST와 같은 수준이다. 따라서 알고리즘의 성능 향상을 위해 직교성을 더할 필요가 있다. 이를 위해서 다음과 같은 직교화 과정을 전 장의 FB-PAST 알고리즘에 추가한다.

$$\tilde{\mathbf{U}}(t) = \mathbf{R}_{xx}(t)\mathbf{W}(t-1)(\mathbf{W}(t-1)^H\mathbf{R}_{xx}(t)\mathbf{W}(t-1))^{-1}, \quad (6)$$

$$\mathbf{W}(t) = \tilde{\mathbf{U}}(t)\mathbf{S}(t), \quad (7)$$

이 때  $\Phi^{-1}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{S}(t)^H = (\tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t))^{-1}$ 이라고 한다면, 결과적으로,  $\mathbf{W}(t)$ 는 식 (8)과 같이 직교성을 갖게 된다 [7].

$$\mathbf{W}(t)^H\mathbf{W}(t) = \mathbf{S}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t)\mathbf{S}(t) = (\tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t))^{-1/2}(\tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t))(\tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t))^{1/2} = \mathbf{I}_r$$

앞 장의 FB-PAST에 직교화 과정을 추가하기 위해서,  $\mathbf{C}_{yy}(t)$ 와  $\mathbf{C}_{yy}(t)$  같은 공분산 행렬을 추정할 때 앞 장과 같이  $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{U}}^H(t-1)\mathbf{x}(t)$ 를 사용하는 대신  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{W}^H(t-1)\mathbf{x}(t)$ 를 사용한다. 이를 사용한 직교화 과정은 [5]에 소개된 Bodeau의 방법을 적용한다. FB-PAST 알고리즘의  $\Phi(t) = \tilde{\mathbf{U}}(t)^H\tilde{\mathbf{U}}(t)$ 은 표 1에 정리한 FB-PAST 알고리즘 중의  $\tilde{\mathbf{U}}(t) = \tilde{\mathbf{U}}(t-1) + \tilde{\mathbf{\epsilon}}(t)\tilde{\mathbf{g}}^H(t)$ 를 이용하면 다음과 같이 변형 가능하다.

$$\Phi(t) = \Phi(t-1) + \mathbf{F}(t)\tilde{\mathbf{J}}(t)\mathbf{F}(t)^H, \quad (9)$$

여기서  $\tilde{\mathbf{J}}(t)$ 는 다음과 같은  $4 \times 4$  크기의 non-singular인 hermitian 행렬이다.

$$\tilde{\mathbf{J}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)^H \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t) & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

그리고  $\mathbf{F}(t)$ 도 다음과 같은  $r \times 4$  크기의 행렬이다. 여기서  $r$ 은 신호 부공간의 차원이다.

$$\mathbf{F}(t) = [\tilde{\mathbf{g}}(t) : \tilde{\mathbf{U}}(t-1)^H \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(t)], \quad (11)$$

식 (7)에서와 같이  $\mathbf{S}(t-1)$ 를  $\Phi(t-1)$ 의 역행렬의 자승근 행렬이라고 하고,  $\mathbf{S}(t-1)^H \mathbf{F}(t)$ 의 SVD를 생각하면 다음과 같다.

$$\mathbf{S}(t-1)^H \mathbf{F}(t) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{O}(t)^H, \quad (12)$$

여기서  $\mathbf{Q}(t)$ 는  $r \times p$  크기의 직교 행렬이고,  $\boldsymbol{\Sigma}(t)$ 는  $p \times p$  크기의 양의 값으로 이뤄진 대각 행렬이며,  $\mathbf{O}(t)$ 는  $4 \times p$  크기의 직교 행렬이다. 여기서  $\mathbf{L}(t) = \mathbf{O}(t)\boldsymbol{\Sigma}(t)$ 로 대입하면,  $\mathbf{S}(t-1)^H \mathbf{F}(t) = \mathbf{Q}(t)\mathbf{L}(t)^H$ 이 된다. 이와 함께 다음의  $p \times p$  크기의 행렬  $\mathbf{T}(t)$ 를 함께 고려하면,  $\mathbf{T}(t) = (\mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{L}(t)^H \mathbf{J}(t)\mathbf{L}(t))^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_{p \times p}$ , 다음과 같은  $\Phi(t)^{-1}$ 의 자승근 행렬을 구할 수 있다 [5].

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t-1)(\mathbf{I}_{n \times r} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{Q}(t)^H), \quad (13)$$

또  $n \times p$  크기의 행렬인  $\mathbf{P}^*(t) = [\boldsymbol{\varepsilon}(t) : \mathbf{0}_{n \times 2}] \mathbf{L}(t)$ 과 식 (12.7)과 식 (7)과 식 (10) 및 식 (11)을 함께 고려하면, 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{\mathbf{U}}(t)\mathbf{S}(t-1) = \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{P}^*(t)\mathbf{Q}(t)^H, \quad (14)$$

위 식 (13) 과 식 (14)를 식 (7)에 대입하면, 다음과 같은 신호 부공간 갱신식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{P}^*(t)\mathbf{Q}(t)^H, \quad (15)$$

여기서  $\mathbf{P}^*(t)$ 는  $n \times p$  크기의 행렬이며 다음과 같다.

$$\mathbf{P}^*(t) = \mathbf{W}(t-1)\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t) + \mathbf{P}^*(t)(\mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{T}(t)), \quad (16)$$

위에서 유도된 새로운 알고리즘을 정리하여 표 2에 나타내었다.

표 2. 제안된 직교성 FB-PAST 알고리즘 요약 정리  
Table 2. Summary of the proposed orthonormalized forward-backward PAST (OFB-PAST).

$\tilde{\mathbf{W}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \end{bmatrix}, \dim = [L \times r],$
$\tilde{\mathbf{P}}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \dim = [r \times r],$
Do $t = 1, \dots$
$\tilde{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{x}_f(t) : \mathbf{x}_s^*(t)]$
$\tilde{\mathbf{y}}(t) = \tilde{\mathbf{W}}^H(t-1)\tilde{\mathbf{x}}(t)$
$\vdots$
표 1의 T2.30에서 T2.7까지 사용
$\vdots$
$\mathbf{F}(t) = [\tilde{\mathbf{g}}(t) : \mathbf{U}(t-1)^H \boldsymbol{\varepsilon}(t)] \mathbf{S}(t-1)^H \mathbf{F}(t) = \mathbf{Q}(t)\boldsymbol{\Sigma}(t)\mathbf{O}(t)^H$
$\mathbf{L}(t) = \mathbf{O}(t)\boldsymbol{\Sigma}(t)$
$\mathbf{J}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}(t)^H \boldsymbol{\varepsilon}(t) & \mathbf{I}_{2 \times 2} \\ \mathbf{I}_{2 \times 2} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$
$\mathbf{P}^*(t) = [\boldsymbol{\varepsilon}(t) : \mathbf{0}_{n \times 2}] \mathbf{L}(t)$
$\mathbf{T}(t) = (\mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{L}(t)^H \mathbf{J}(t)\mathbf{L}(t))^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_{p \times p}$
$\mathbf{S}(t) = \mathbf{S}(t-1)(\mathbf{I}_{n \times r} + \mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t)\mathbf{Q}(t)^H)$
$\mathbf{P}^*(t) = \mathbf{W}(t-1)\mathbf{Q}(t)\mathbf{T}(t) + \mathbf{P}^*(t)(\mathbf{I}_{p \times p} + \mathbf{T}(t))$
$\mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(t-1) + \mathbf{P}^*(t)\mathbf{Q}(t)^H$
END

여기서  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_f(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_L(t)]^T$ ,  $\mathbf{x}_s(t) = [x_L(t), x_{L-1}(t), \dots, x_1(t)]^T$ ,  $r$ 은 신호 부공간의 차원 값이다.  $\mathbf{x}^*$ 은  $\mathbf{x}$ 의 공액 복소수이다.  $L$ 은 센서의 수 이다.

#### IV. 시뮬레이션을 통한 성능 검증

이 장에선 앞 장에서 제안된 알고리즘의 성능을 알아보기 위해 추정된 신호 부공간의 직교성과 추정 정확성을 알아본다. 이를 위해서 8개의 선형 배열을 가정하고, 평면파 신호가 이 배열에 도래 한다고 가정한다. 이 때 서로 상관 관계가 없는 두 신호가 각각  $-10^\circ$ 와  $-40^\circ$ 로부터 도래 한다고 가정한다.

알고리즘의 성능을 비교하기 위해서 전통적인 PAST 알고리즘과 [4]에서 제안한 전후방 공분산 행렬을 사용한 PAST (FB-PAST)와 [3]에서 제안한 PAST에 직교성을 부여한 OPAST를 제안된 알고리즘 및 [5]에서 제안한 Sliding window orthonormal PAST 알고리즘과도 비교하였다. 알고리즘을 운영할 때 망각인자는 0.98로 동일하게 고정하였다. 그리고 직교의 성능을 측정하기 위해

서 다음과 같은 기준치를 사용하여 그 성능을 비교하였다 [3].

$$\eta(i) \equiv \frac{1}{r_0} \sum_{r=1}^{r_0} \|\mathbf{I} - \mathbf{W}_r^H(i) \mathbf{W}_r(i)\|_F^2, \quad (17)$$

여기서  $\eta(i)$ 는  $i$ 번째 추정 결과의 직교 정도를 의미하고,  $\mathbf{W}_r(i)$ 는 신호 부공간 행렬의  $r$ 번째 열 벡터를 의미한다. 식 (17) 살펴보면 직교성이 좋을수록 '0'에 가까운 값을 나타내야 함을 알 수 있다. 직교성 비교의 결과는 그림 1에 나타내었다. 그림 1을 보면, 전통적인 PAST와 [4]에서 제안된 FB-PAST은 직교성 면에서 유사하였고, 제안된 알고리즘은 직교 성능면에서 이 둘보다 월등히 우수하

며 OPAST 및 Sliding window orthonormal PAST 알고리즘과 그 성능이 유사함을 알 수 있다.

그림 1을 통해서 서론에서 언급한 통상적인 OPAST방법으로 직교 알고리즘을 만들 수 없었던 FB-PAST 알고리즘을 제안된 알고리즘으로 직교성을 갖도록 할 수 있음을 보였다. 그 성능은 OPAST에 견줄 만큼 우수함도 보였다.

다음 그림은 제안된 알고리즘의 신호 부공간 추정 정확도를 알아보기 위해서 참 신호 부공간과 추정된 신호 부공간 간의 거리를 서로 비교하였다. 부공간 간의 거리를 표현하기 위해서 다음 식을 사용한다 [4][7].

$$\sin \theta(\mathbf{S}, \tilde{\mathbf{S}}) \equiv \|(\mathbf{I} - \mathbf{P})\tilde{\mathbf{P}}\|, \quad (18)$$

여기서  $\mathbf{S}$ 는 참 신호 부공간을 의미하고,  $\tilde{\mathbf{S}}$ 는 추정된 신호 부공간이다. 또  $\mathbf{P}$ 는 참 신호 부공간  $\mathbf{S}$ 로의 정사영 행렬이고,  $\tilde{\mathbf{P}}$ 는 추정된 신호 부공간  $\tilde{\mathbf{S}}$ 로의 정사영 행렬이다.

그림 2를 보면 전통적인 PAST와 OPAST 및 Sliding window orthonormal PAST 알고리즘보다는 전후방 공분산 행렬을 사용하는 FB-PAST나 본 논문에서 제안한 알고리즘이 공히 우수한 추정 정확성을 나타내고 있다. 그러므로 그림 1과 그림 2로부터 제안된 알고리즘이 FB-PAST의 정확성과 함께 신호 공간 벡터 사이의 직교성까지 지니고 있음을 알 수 있다.

## V. 결론

본 논문은 직교성을 갖춘 전후방 공분산 행렬을 이용하는 PAST알고리즘을 제안하였다. 기존의 PAST 알고리즘의 직교화를 위해 사용되던 OPAST로는 전후방 공분산 행렬을 사용하는 PAST알고리즘 (FB-PAST)을 직교화 할 수 없는데 반해서, 본 논문에서 제안한 방법으로 직교성을 갖는 알고리즘으로 만들 수 있음을 보였다. 시뮬레이션 결과에서 보인 것처럼 제안된 알고리즘은 향상된 추정 정확성도 갖추고 있다. 그러므로 본 논문에서 제안한 알고리즘은 추정 정확도와 직교성을 동시에 갖춘 알고리즘임을 알 수 있다.

## 참고 문헌

1. Bin Yang, "Projection approximation subspace tracking", *IEEE*

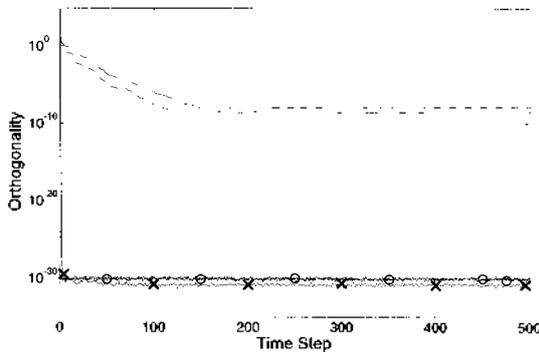


그림 1. 추정된 신호 부공간 벡터간 직교성 비교. (-o-: 제안한 알고리즘, 실선: OPAST, 점선: PAST, 일점쇄선: FB-PAST, -x-: Sliding window orthonormal PAST)

Fig. 1. The orthonormality performance for (-o-: the proposed algorithm, solid line: OPAST, dotted line: PAST, dash and dotted line: FB-PAST, -x-: Sliding window orthonormal PAST).

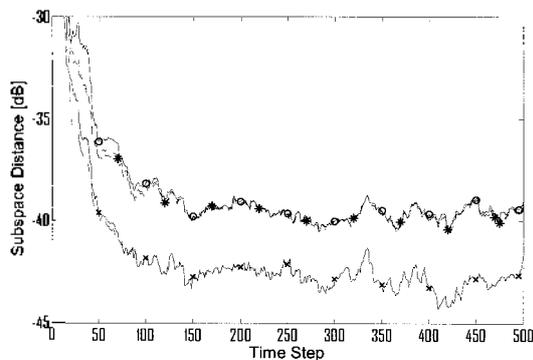


그림 2. 추정된 신호 부공간 정확성 비교. (-x-: 제안한 알고리즘, -o-: OPAST, 점선: PAST, 일점쇄선: FB-PAST, 점선선과 \*: Sliding window orthonormal PAST)

Fig. 2. The subspace estimation accuracy comparisons. (-o-: the proposed algorithm, solid line: OPAST, dotted line: PAST, dash and dotted line: FB-PAST, dotted and \* line: Sliding window orthonormal PAST).

- Trans. Signal Proc.*, vol. 43, no. 1, pp. 95–107, 1995.
2. Jung-Lang Yu, "A novel subspace tracking using correlation-based projection approximation", *Signal Processing*, vol. 80, no. 12, pp. 2517–2525, 2000.
  3. K. Abed-Meraim, A. Chkeif and Y. Hua, "Fast orthonormal PAST algorithm", *IEEE Signal Proc. Letters*, vol. 7, no. 3, pp. 60–62, 2000.
  4. Jun-Seok Lim, "Forward backward PAST (Projection Approximation Subspace Tracking) algorithm for the better subspace estimation accuracy," *J. Acoust. Soc. Kor.*, vol. 27, no. 1E, pp. 25–29, 2008.
  5. R. Badeau, K. Abed-Meraim, G. Richard, and B. David, "Sliding window orthonormal PAST algorithm," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process.*, pp. 261–264, Apr. 2003.
  6. P. Stoica and R. L. Moses, *Spectral Analysis of Signals*, Prentice Hall, Upper Saddle River, N.J., 2005.
  7. Srinath Hosur, Ahmed H. Tewfik, and Daniel Boley, "ULV and generalized ULV subspace tracking adaptive algorithms", *IEEE Trans. Signal Proc.*, vol. 46, no. 5, pp. 1282–1297, 1996.

---

### 저자 약력

---

•임 준 식 (Jun-Seok Lim)  
한국음향학회지 제27권 제1E호 참조