

일정체적 단순지지 최강보

Strongest Simple Beams with Constant Volume

이병구* · 이태은** · 김영일***

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Kim, Young Il

Abstract

This paper deals with the strongest beams with the solid regular polygon cross-section, whose volumes are always held constant. The differential equation of the elastic deflection curve of such beam subjected to the concentrated and trapezoidal distributed loads are derived and solved numerically. The Runge-Kutta method and shooting method are used to integrate the differential equation and to determine the unknown initial boundary condition of the given beam. In the numerical examples, the simple beams are considered as the end constraint and also, the linear, parabolic and sinusoidal tapers are considered as the shape function of cross sectional depth. As the numerical results, the configurations, i.e. section ratios, of the strongest beams are determined by reading the section ratios from the numerical data related with the static behaviors, under which static maximum behaviors become to be minimum.

Keywords : *strongest beam, tapered beam, simple beam, constant volume, Runge-Kutta method, shooting method*

요 지

이 논문은 정다각형 중실단면을 갖는 최강보에 관한 연구이다. 이 연구에서 보의 체적은 항상 일정하다. 이러한 보에 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 경우에 탄성곡선의 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 정적 거동을 산정하였다. 미분방정식은 Runge-Kutta법을 이용하여 수치적분을 하였고 미지수인 보의 초기치는 shooting method를 이용하여 산정하였다. 수치해석 예에서는 단순보를 채택하였고, 단면깊이의 형상함수로는 선형, 포물선형 및 정현형의 함수를 채택하였다. 이 연구에서 얻은 수치해석의 결과로부터 보의 정적 최대거동값이 최소가 되는 단면형상 즉 최강단면비를 산정하였다.

핵심용어 : 최강보, 변단면보, 단순보, 일정체적, Runge-Kutta법, shooting method.

1. 서 론

보는 기둥, 곡선 부재, 평면판(또는 곡면판) 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 구조공학 분야에서 빼대구조로 이용되고 있다. 구조물의 설계에서 최대 내하력을 갖는 최적형상을 찾는 것은 매우 중요한 문제이다 (Haftka *et al.*, 1990).

변단면은 구조물의 지중을 줄이고 작용하중에 대한 내하력을 증진시킬 수 있을 뿐만 아니라 미적 감각, 경제적 측면 등 다양한 목적 때문에 변단면의 이용은 날로 증가하는 추세이다.

이상의 관점에서 구조물의 최적형상을 찾는 문제는 구조공학에서 가장 주요한 연구대상 중에 하나이며 최적형상은 당연히 변단면일 수밖에 없다. 최적화 문제는 구조공학의 여러 분야에서 적용되고 있지만 이 연구와 직접 관련이 있는 휨 부재에 대하여 연구동향을 고찰하면 다음과 같다.

Keller(1960)는 최강기둥의 형상에 관한 연구에서 최강기둥(strongest column)은 “일정량의 재료로 만들어진 길이가 동일한 기둥 중 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥”으로 정의하였다. Keller와 Niordson(1966)은 또 다른 최적화 개념인 최장기둥(tallest column)에 대하여 연구하였으며 여기서 최장기둥은 “일정량의 재료로 만들어진 기둥 중 지중에 의하여 좌굴이 발생하지 않는 최장길이를 갖는 기둥”으로 정의하였다. Taylor(1967)는 에너지 이론을 이용하여 최강기둥의 단면형상에 대한 연구를 수행하였다. Wilson 등(1971)은 삼각형 단면을 갖는 최강기둥의 단면깊이의 형상함수(shape function)에 대하여 이론 및 실험적 연구를 수행하였다. Cox와 Overton(1992)은 좌굴에 대한 기둥의 최적 단면형상에 대하여 연구하였다. Atanackovic과 Simic(1999)은 기둥축을 따라 등분포 비보존력이 작용하는 Pflüger 기둥의 최적형상에 대하여 연구하였다. 이 연구에서는 기둥의 제1고유진동수가 최대가 되는 동적 최강기둥

*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

**정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

*** (주)대정컨설턴트 대리 (E-mail : gambo0101@empal.com)

의 단면형상을 찾았다. Lee와 Oh(2000)는 일정체적 기둥에 대하여 대변형 이론(large deflection theory)을 이용하여 최강기둥의 단면형상을 찾았다. 김(2003)은 일정체적을 갖는 변단면보의 정적 최적 단면에 대하여 연구하였다. Lee 등(2006)은 기둥에 작용하는 압축하중에 대한 동적 개념(dynamic concept)을 이용하여 정적 최강기둥의 단면형상을 찾았다.

이상에서 고찰한 바와 같이 구조물의 최강단면에 관한 연구는 주로 기둥을 대상으로 하고 있다. 앞서서도 언급한 바와 같이 보는 가장 기본적인 구조단위이므로 작용하중에 대하여 큰 내하력을 갖는 단면 형상을 찾는 문제는 최적설계의 개념에서 매우 중요한 연구과제이다.

이 연구는 일정체적을 갖는 최강보(strongest beam)에 관한 연구이다. 이 연구에서 최강보는 “보의 기하적 조건 및 하중조건에 대하여 보의 최대거동값이 최소가 되는 단면형상을 갖는 보”로 정의한다. 최강기둥에 관한 연구는 비교적 많은 문헌에서 찾을 수 있지만 최강보에 관한 연구는 이 논문이 최초이다.

이 연구에서 보의 기하적 조건은 정다각형 중실단면(solid cross-section)을 갖고 단면깊이가 선형, 포물선형 및 정현형으로 변화하는 일정체적 보를 채택하였다. 하중조건은 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 하중을 채택하였고, 지지조건은 단순지지로 채택하였다. 이러한 보의 탄성 곡선의 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 보의 가장 중요한 거동인 변위(deflection), 회전각(rotation) 및 연응력(extreme fiber stress)을 산정하였다. 이렇게 산정된 수치해석의 거동값을 이용하여 최대거동값이 최소가 되는 최강보의 단면비 즉 최강단면비를 찾았다.

이 연구에서 작용하중은 한 개의 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중으로 제한하였으나 중첩의 원리에 의하여 여러 개의 집중하중 또는 임의 분포하중에 대해서도 이 연구의 이론은 성립한다.

이 연구는 보의 체적이 일정하므로 전통적인 최적설계의 문제에서 최소중량 설계의 한 분야로 분류할 수 있다.

본 연구에서 이론전개를 위하여 적용한 가정은 다음과 같다.

1. 기둥재료는 선형탄성체이다.
2. 미분방정식의 유도는 미소변형 이론(small deflection theory)에 의한다.
3. 하중방향은 도심축에 대하여 연직하다.
4. 지간길이는 단면깊이에 비하여 길기 때문에 전단변형 효과는 고려하지 않는다.

2. 일정체적 부재의 단면성질

그림 1(a)는 이 연구에서 채택한 단면이 중실 정다각형이고, 지간길이가 l 인 부재를 나타낸다. 그림 1(b)는 단면깊이 h 가 축방향 좌표 x 의 함수로 표현되는 형상함수를 나타낸다. 이 그림에서 h_a 는 양단($x=0$ 및 $x=l$)에서 단면깊이이고, h_m 은 중앙($x=l/2$)에서 단면깊이다. 따라서 단면은 부재의 중앙에 대하여 좌우대칭이다. 부재의 체적은 h_a , h_m 의 크기와 h 의 형상함수에 상관없이 모두 일정체적 V 를 갖는다(Lee and Oh, 2000).

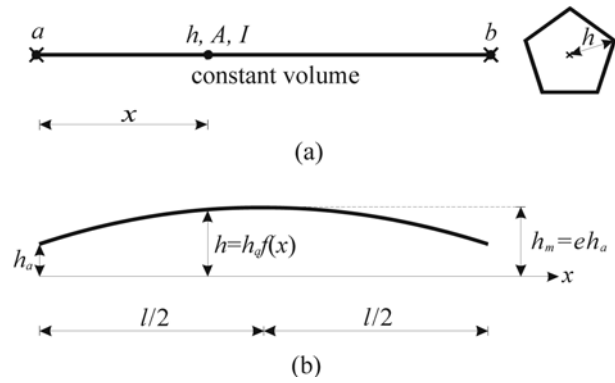


그림 1. (a) 일정체적 정다각형단면 부재 (b) 일정체적 부재의 단면깊이 변화

단면깊이의 형상함수를 결정하기 위하여 단면비 e 를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \frac{h_m}{h_a} \quad (1)$$

단면깊이가 h 인 정 n 각형의 단면적 A 및 단면2차모멘트 I 는 다음 식과 같이 결정할 수 있다. 여기서 $n(\geq 3)$ 은 정수이다.

$$A = c_1 h^2 \quad (2)$$

$$I = c_2 h^4 \quad (3)$$

위에서 c_1 , c_2 는 다음과 같다.

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$c_2 = \frac{n}{12} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[3 + \tan^3\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \quad (5)$$

단면깊이 h 는 변화깊이이므로 축방향 좌표 x 에 관한 형상함수로 나타내면 다음과 같이 표현된다.

$$h = h_a f \quad (6)$$

여기서 $f=f(x)$ 이다.

식 (2), (3)을 이용하여 부재의 일정체적 V 를 구하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^l A ds = \int_0^l c_1 h_a^2 f^2 ds = c_1 c_3 h_a^2 l \quad (7)$$

위에서 c_3 는 식 (6)에서 주어지는 형상함수 f 에 따라서 결정되는 무차원 함수식이다

이제 변단면의 종류를 선형, 포물선형, 정현형의 3가지 변단면으로 채택하면 식 (6)에서 단면깊이 h 를 정의해주는 형상함수 f 및 식 (7)의 무차원 계수를 다음과 같이 결정할 수 있다.

1) 선형 변단면(linear taper)

$$f = 2(e-1)\left(\frac{x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (8.1)$$

$$f = 2(e-1)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + 1, \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (8.2)$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(e^2 + e + 1) \quad (9)$$

2) 포물선형 변단면(parabolic taper)

$$f = 4(e-1)\left(\frac{x}{l}\right)\left(1-\frac{x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (10)$$

$$c_3 = \frac{1}{15}(8e^2 + 4e + 3) \quad (11)$$

3) 정현형 변단면(sinusoidal taper)

$$f = (e-1)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (12)$$

$$c_3 = \frac{e^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)e + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \quad (13)$$

식 (7)을 이용하여 부재의 양단($x=0$ 및 $x=l$)에서 단면깊이 h_a 를 일정체적 V 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_a = \left(\frac{V}{c_1 c_3 l}\right)^{1/2} \quad (14)$$

식 (3), (6), (14)를 이용하여 축방향 좌표 x 에서 단면2차 모멘트 I 를 구하면 다음과 같다.

$$I = c_2 h^4 = c_2 \left(\frac{V}{c_1 c_3 l}\right)^2 f^4 \quad (15)$$

이상과 같이 지간길이 l , 일정체적 V , 정 n 다각형 단면을 갖는 부재의 축방향 좌표 x 에서 단면2차모멘트 I 를 식 (15)와 같이 유도하였다. 여기서 무차원 계수 c_1, c_2, c_3 및 형상함수 f 는 앞의 식에 이미 정의되어 있다. 참고로 식 (15)의 단면2차모멘트는 정다각형의 단면2차모멘트이므로 모든 도심축이 주축이 되고, 도심축의 회전에 상관없이 모두 동일한 단면2차모멘트 값을 갖는다(Gere and Timoshenko, 1997).

3. 수학적 모형

그림 2는 제2장에서 정의된 지간길이 l , 일정체적 V 인 단 순보에 집중하중 P 와 하중강도가 Q_a, Q_b 인 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 경우 탄성곡선을 나타낸 것이다. 축방향 좌표 x 에서 $M, w, \theta(=dw/dx), \sigma_e$ 는 휨모멘트, 변위, 회전 각, 연응력을 나타낸다. 집중하중 P 의 위치를 a 라 하면 좌 단의 수직반력 R_a 는 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$R_a = P\left(1 - \frac{a}{l}\right) + \frac{1}{6}(2Q_a + Q_b) \quad (16)$$

식 (16)을 이용하여 휨모멘트 M 을 산정하면 다음과 같다.

$$M = R_a x - \frac{1}{2}Q_a x^2 + \frac{1}{6l}(Q_a - Q_b)x^3, 0 \leq x \leq a \quad (17.1)$$

$$M = R_a x - P(x-a) - \frac{1}{2}Q_a x^2 + \frac{1}{6l}(Q_a - Q_b)x^3, a \leq x \leq l \quad (17.2)$$

연응력 σ_e 는 식 (6), (14), (15), (17)을 이용하여 다음과

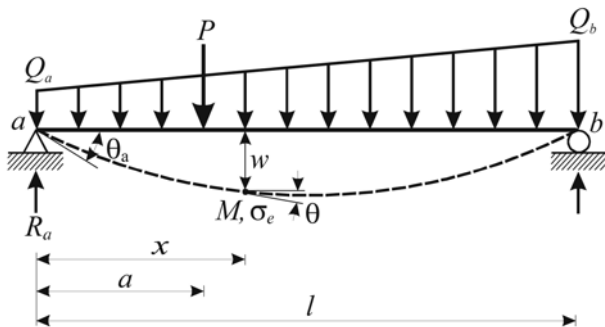


그림 2. 집중하중 및 사다리꼴 분포하중이 작용하는 단순보

같이 구한다.

$$\sigma_e = \frac{M}{I} h = \frac{(c_1 c_3 l)^{3/2} M}{c_2 V^{3/2} f^3} \quad (18)$$

미소변형 이론에 의한 탄성곡선의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M}{EI} \quad (19)$$

위에서 E 는 보 재료의 탄성계수이다.

식 (19)에 식 (15)를 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{(c_1 c_3 l)^2 M}{c_2 E V^2 f^4} \quad (20)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (21)$$

$$\eta = \frac{w}{l} \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{a}{l} \quad (23)$$

$$p = \frac{\pi^2 P l^4}{E V^2} \quad (24)$$

$$q_a = \frac{\pi^2 P l^5}{E V^2} \quad (25)$$

$$q_b = \frac{\pi^2 Q_a l^5}{E V^2} \quad (26)$$

$$r_a = p(1 - \alpha) + \frac{1}{6}(2q_a + q_b) \quad (27)$$

$$m = \frac{\pi^2 M l^3}{E V^2} = r_a \xi - \frac{1}{2}q_a \xi^2 + \frac{1}{6}(q_a - q_b)\xi^3, 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (28.1)$$

$$m = \frac{\pi^2 M l^3}{E V^2} = r_a \xi - p(\xi - \alpha) - \frac{1}{2}q_a \xi^2 + \frac{1}{6}(q_a - q_b)\xi^3, \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (28.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_e l^{3/2}}{\pi^2 E V^{1/2}} = \frac{(c_1 c_3)^{3/2} m}{\pi^4 c_2 g^3} \quad (29)$$

위의 식에서 길이차원의 (x, w, a) 는 식 (21)-(23)과 같이 지간길이 l 로 정규화하였고, 하중항인 $(P, Q_a, Q_b, M, \sigma_e)$ 는 식 (24)-(29)와 같이 지간길이 l 와 일정체적 V 로 정규화하였다. 따라서 무차원 거동 $\eta, \theta, \varepsilon$ 의 값은 기하적 조건 및 하중조건에 상관없이 그 값을 상대적으로 비교할 수 있다.

식 (21)-(28)의 무차원 변수식을 식 (20)에 적용하면 다음과 같이 탄성곡선의 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = \frac{(c_1 c_3)^2 m}{\pi^2 c_2 g^4} \quad (30)$$

식 (30)에서 m 은 식 (28)과 같고, 식 (29), (30)에서 무차원 형상함수식 $g=g(\xi)$ 는 변단면 종류별로 다음과 같다.

1) 선형 변단면

$$g = 2(e-1)\xi + 1, 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad (31.1)$$

$$g = 2(e-1)(1-\xi) + 1, \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1 \quad (31.2)$$

2) 포물선형 변단면

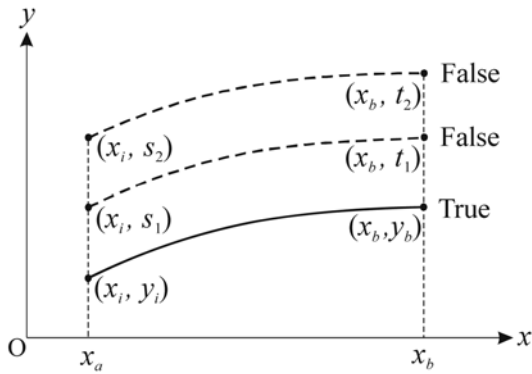


그림 4. Shooting method의 해석방법

그림 4와 같이 초기치 x_i 에서 미지수인 y_i 값을 s_1, s_2 로 가정하고 가정한 2개의 초기치 $(x_i, s_1), (x_i, s_2)$ 를 이용하여 4차 Runge-Kutta법으로 경계치 $(x_b, t_1), (x_b, t_2)$ 를 산정한다. 이렇게 산정된 x_b 에서 경계치 (t_1, t_2) 값은 초기치 (s_1, s_2) 값이 가정한 값이므로 거짓 값(false value)이다. 이 때, 식 (40)의 미분방정식이 식 (30)과 같이 선형 미분방정식이면 $(y_b, y_b), (s_1, t_1), (s_2, t_2)$ 을 이용하여 다음과 같은 비례식을 세울 수 있다.

$$(s_1 - y_i) : (s_2 - s_1) = (t_1 - y_b) : (t_2 - t_1) \quad (41)$$

위의 비례식에서 초기치 y_i 는 미지수이고 $(y_b, s_1, s_2, t_1, t_2)$ 는 기지수이므로 미지수인 초기치 y_i 를 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$y_i = s_1 + (s_2 - s_1) \frac{y_b - t_1}{t_2 - t_1} \quad (42)$$

식 (42)와 같이 x_i 에서 미지수인 초기치 y_i 를 산정하였으므로 주어진 식 (40)의 미분방정식을 수치적분할 수 있고, 그 결과로 미분방정식의 수치해인 (x, y) 값을 $x_i \leq x \leq x_b$ 의 범위에서 연속적으로 산정할 수 있다.

Shooting method의 효율성을 검증하기 위하여 식 (38)의 미분방정식을 다음과 같이 경계치 문제로 변환하여 검증한다.

$$\frac{dy}{dx} = y - 3x^2 + x - 2, \text{ 초기치: } y(0) = y_i \text{ (미지수)} \quad (43)$$

$$\text{경계치: } y(1) = 15$$

위의 식에서 초기치의 x 값은 $x_i=0$ 이고 경계치의 x 값은 $x_b=1$ 이다. 식 (43)에서는 식 (38)의 초기치 $y(x_i)=7$ 을 미지수로 하고 표 1의 $y(x_b)=15$ 를 경계치로 이용한다.

이제, 식 (43)의 경계치 문제를 풀기 위하여 두개의 초기치를 $(0,8), (0,9)$ 즉 $s_1=8, s_2=9$ 로 가정한다. 이렇게 가정한 두개의 초기치 $(0,8), (0,9)$ 를 식 (43)의 미분방정식에 적용하여 4차 Runge-Kutta법을 이용하여 수치적분하면 두개의 경계치 $(1,16), (1,17)$ 즉, $t_1=16, t_2=17$ 로 계산된다. 한편, 식 (43)에서 $y_b=15$ 이다.

이상의 값들을 식 (42)에 대입하면 $y_i=7$ 로 계산되어 식 (38)의 초기치 $y(0)=7$ 과 정확하게 일치하는 것을 알 수 있다.

참고로 두개의 초기치 s_1, s_2 를 임의로 가정하여도 같은 결과의 y_i 값을 얻는다.

표 2. 수치적분을 위한 수렴해석*

$\Delta\xi$	거동 값		
	$\eta_{\xi=0.5}$	θ_a	$\varepsilon_{\xi=0.5}$
0.500	0.017812	0.066442	0.035769
0.250	0.017383	0.073603	0.035769
0.100	0.017170	0.074486	0.035769
0.050	0.017164	0.074523	0.035769
0.025	0.017164	0.074523	0.035769
0.010	0.017164	0.074523	0.035769
0.005	0.017164	0.074523	0.035769

*기하조건: 선형 변단면, $n=4, e=2$

하중조건: $(p=0.5, \alpha=0.4), (q_a=0.5, q_b=1)$

4.3 수치해의 수렴해석

기하적 조건(변단면 종류, n, e) 및 하중조건(p, α, q_a, q_b)이 정의되면 이상의 수치해석 방법을 이용하여 축방향 무차원 좌표 ξ 에서 무차원 변위 η , 회전각 $\theta(=d\eta/d\xi)$, 무차원 연응력 ε 을 계산할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 FORTRAN 어로 작성하였다.

수치해석 예를 토의를 하기 전에 수치해의 정확도를 확보하기 위하여 먼저 수렴해석을 실시하였다. 표 2는 4차 Runge-Kutta법에서 단계길이 $\Delta\xi$ 에 대한 수렴해석 결과를 나타낸다. 수치해석에 사용한 기하적 조건 및 하중조건을 표 하단에 표기하였다. 이 표에 보인 바와 같이 $\Delta\xi=0.050$ 에서 거동값인 중앙에서 변위 $\eta_{\xi=0.5}$, 연응력 $\varepsilon_{\xi=0.5}$ 및 좌단의 회전각 θ_a 는 $\Delta\xi=0.005$ 의 거동값에 대하여 모두 유효숫자 5자리의 정도로 수렴하고 있다.

수렴해석의 특징적인 내용으로는 연응력 ε 은 단계길이 $\Delta\xi$ 값에 영향을 받지 않는 것으로 나타났다. 이 연구에서 수치해의 정도를 강화하기 위하여 이후의 수치해석에서는 단계길이 $\Delta\xi=0.01$ 을 적용하였다.

5. 수치해석 예 및 토의

이상의 수치해석 방법을 이용하여 보의 기하적 조건 및 하중조건에 대한 $\eta, \theta, \varepsilon$ 을 산정하였다. 이 결과를 이용하면 최강단면비를 산정할 수 있다. 먼저, “선형 변단면, 정4각형 단면($n=4$), 집중하중 $p=1$, 하중위치 $\alpha=0.4$ ”인 보의 최강단면비 산정과정을 그림 5, 6를 통하여 수치적으로 설명한다. 여기서는 집중하중에 대한 예이므로 $q_a=q_b=0$ 이다.

주어진 보의 단면비를 $e=2$ 로 택하여 변위 η , 회전각 θ 및 연응력 ε 을 계산하고 이를 그림으로 그리면 그림 5와 같다. 이 그림에서는 거동값의 최대값을 판정하기 위하여 η 를 수평축의 위쪽에 표시하였고, θ, ε 은 절대값을 취하여 “-”값도 모두 “+”값으로 표시하였다.

이 그림으로부터 ■로 표시한 최대거동값을 읽으면 $\eta_m=0.0168, \theta_m=0.0746, \varepsilon_m=0.0480$ 이다.

이상과 같은 방법으로 찾은 최대거동값 ($\eta_m, \theta_m, \varepsilon_m$)을 단면비 e 값을 변화시키면서 산정하고 이들 사이의 관계를 그림으로 그리면 그림 6과 같다. 그림 5에서 ■로 표시한

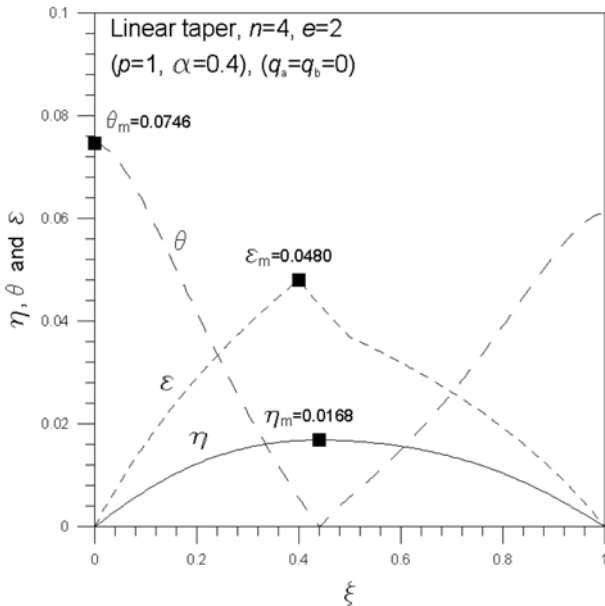


그림 5. (η , θ 및 ϵ) - ξ 곡선

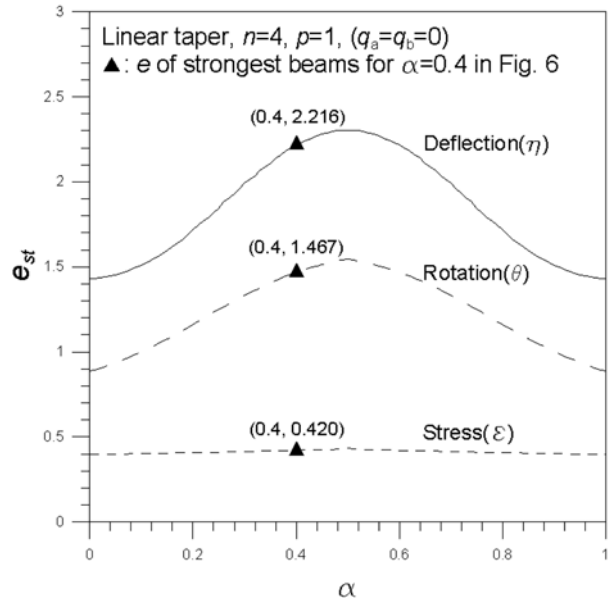


그림 7. $e_{st} - \alpha$ 곡선(선형 변단면)

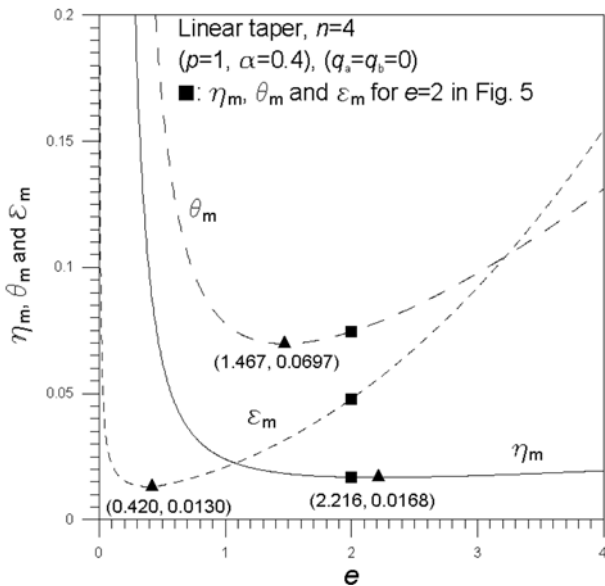


그림 6. (η_m , θ_m 및 ϵ_m) - e 곡선

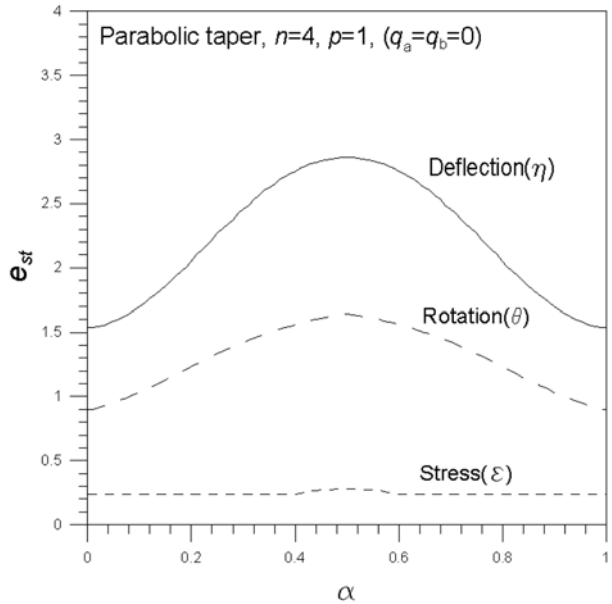


그림 8. $e_{st} - \alpha$ 곡선(포물선형 변단면)

$e=2$ 에서 최대거동값 (η_m , θ_m , ϵ_m)을 그림 6에서도 역시 ■로 표시하였다. 이 그림에서 최대거동값이 최소가 되는 단면비 e 및 최대거동값의 최소값을 찾을 수 있다. 이러한 조건을 만족하는 보가 최강보이고, 이때의 단면비를 “최강단면비”라 하고 e_{st} 로 표시한다. e_{st} 에 대응하는 최대거동값의 최소값을 각각 ($\eta_{m,m}$, $\theta_{m,m}$, $\epsilon_{m,m}$)으로 표시한다. 이후 간단한 표기를 위하여 “최대거동값의 최소값”을 단순히 “최소거동값”으로 표기하기로 한다. 이 그림에 최강보에 대한 e_{st} 와 최소거동값을 ▲로 표시하였다. 따라서 ▲로 표시한 좌표값을 읽으면 최강보의 e_{st} 및 ($\eta_{m,m}$, $\theta_{m,m}$, $\epsilon_{m,m}$)을 얻을 수 있다. 즉, 그림 6의 상단에 표시한 “선형 변단면, 정4각형단면 ($n=4$), $p=1$, $\alpha=0.4$ ”인 단순보의 변위(η)에 대한 $e_{st}=2.216$, 회전각(θ)에 대한 $e_{st}=1.467$, 연용력(ϵ)에 대한 $e_{st}=0.420$ 이며, 이에 대응하는 $\eta_{m,m}=0.0168$, $\theta_{m,m}=0.0697$, $\epsilon_{m,m}=0.0130$ 이다.

참고로 이 연구에서는 미소처짐 이론을 이용하여 탄성곡선식을 유도했기 때문에 중첩의 원리가 적용된다. 따라서 그림 6에서 적용하중이 “ $p=1$ ” 입에도 최강단면비 e_{st} 는 p 의 크기

에 상관없이 모두 같고, ($\eta_{m,m}$, $\theta_{m,m}$, $\epsilon_{m,m}$) 값은 위에서 기술한 값에 단순히 새로운 p 값을 곱해주면 된다.

이상과 같이 기하적 조건 즉, (변단면 종류, n) 및 하중조건 즉, (p , α , q_a , q_b)를 주면 단순보의 e_{st} 와 ($\eta_{m,m}$, $\theta_{m,m}$, $\epsilon_{m,m}$)을 산정할 수 있다. 이와 같은 방법으로 정4각형단면 ($n=4$), 집중하중 $p=1$ ($q_a=q_b=0$)의 e_{st} 를 α 값을 변화시키며 산정하고 이를 그림 7(선형 변단면), 그림 8(포물선형 변단면) 및 그림 9(정현형 변단면)에 각각 $e_{st}-\alpha$ 곡선으로 나타내었다. 독자의 이해를 돕기 위하여 앞의 그림 6에서 ▲로 표시한 $\alpha=0.4$ 의 e_{st} 값을 그림 7(선형 변단면)에서도 역시 ▲로 표시하였다. 최강단면비 e_{st} 는 하중위치 α 가 보 중앙에 위치할수록 더 큰 값을 가지며 중앙에서 최대가 된다. 연용력 ϵ 의 e_{st} 값은 α 값에 큰 영향을 받지 않는다. 예를 들면 그림 7의 선형 변단면에서 ϵ 의 e_{st} 는 약 0.40~0.43의 범위로 그 변화가 매우 작다.

앞에서도 언급한 바와 같이 그림 7, 8, 9의 $e_{st}-\alpha$ 곡선은 중첩의 원리에 의하여 $p=1$ 을 비롯한 모든 p 의 크기에 대해

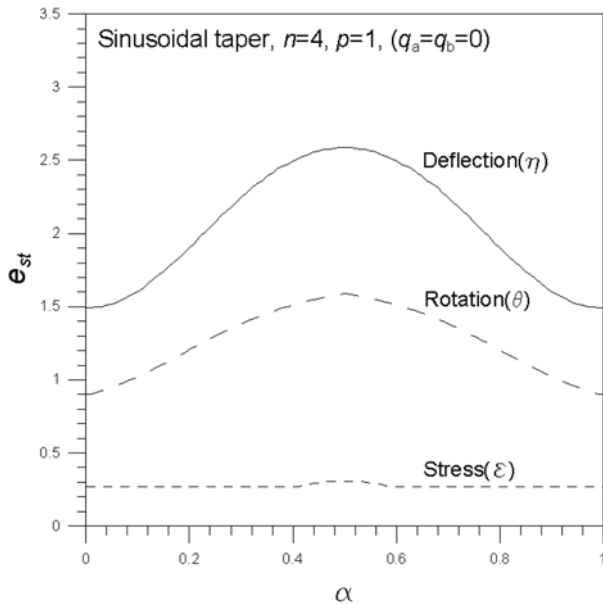


그림 9. $e_{st}-\alpha$ 곡선(정현형 변단면)

표 3. 정다각형 변수(n)별 최강단면비 및 최소거동값

(1) 집중하중(선형 변단면, $p=1, \alpha=0.4$)

n	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
3	2.216	0.01453	1.467	0.06037	0.420	0.01393
4	2.216	0.01678	1.467	0.06971	0.420	0.01296
5	2.216	0.01728	1.467	0.07178	0.420	0.01224
원형*	2.216	0.01757	1.467	0.07300	0.420	0.01083

(2) 등분포하중(선형 변단면, $q_a=q_b=1$)

n	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
3	2.024	0.01018	1.378	0.04052	0.434	0.00870
4	2.024	0.01176	1.378	0.04679	0.434	0.00810
5	2.024	0.01211	1.378	0.04818	0.434	0.00765
원형*	2.024	0.01231	1.378	0.04899	0.434	0.00677

(3) 삼각형분포하중(선형 변단면, $q=0, q_b=1$)

n	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
3	2.000	0.00513	1.316	0.02204	0.434	0.00435
4	2.000	0.00592	1.316	0.02545	0.434	0.00405
5	2.000	0.00610	1.316	0.02621	0.434	0.00382
원형*	2.000	0.00620	1.316	0.02666	0.434	0.00338

*원형단면: $n=\infty$

서도 만족한다.

이 그림을 이용하면 집중하중 p 의 하중위치 α 에 대한 e_{st} 를 용이하게 알 수 있으므로 최소중량 설계에 유용한 자료를 제공할 수 있다.

그림 7-9에서 정4각형단면($n=4$)에 대한 집중하중의 e_{st} 만을 나타내었다. 그러나 정4각형단면 이외의 정다각형단면, 등분포하중, 삼각형 분포하중의 e_{st} 와 ($\eta_{m,m}, \theta_{m,m}, \epsilon_{m,m}$)도 중요하다.

표 4. 변단면 종류별 최강단면비 및 최소거동값

(1) 집중하중($n=4, p=1, \alpha=4$)

종류	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
선형	2.216	0.01678	1.467	0.06971	0.420	0.01296
포물선형	2.752	0.01610	1.561	0.06828	0.240	0.00892
정현형	2.498	0.01619	1.511	0.06855	0.268	0.00995

(2) 등분포하중($n=4, q_a=q_b=1$)

종류	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
선형	2.024	0.01176	1.378	0.04679	0.434	0.00810
포물선형	2.427	0.01131	1.456	0.04595	0.280	0.00504
정현형	2.232	0.01138	1.415	0.04613	0.308	0.00565

(3) 삼각형분포하중($n=4, q_a=0, q_b=1$)

종류	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
선형	2.000	0.00592	1.316	0.02545	0.434	0.00405
포물선형	2.403	0.00568	1.382	0.02506	0.276	0.00254
정현형	2.212	0.00573	1.348	0.02515	0.304	0.00285

(4) 조합하중($n=4, p=0.4, \alpha=0.5, q_a=0.5, q_b=0.25$)

종류	변위(η)		회전각(θ)		연응력(ϵ)	
	e_{st}	$\eta_{m,m}$	e_{st}	$\theta_{m,m}$	e_{st}	$\epsilon_{m,m}$
선형	2.185	0.01126	1.465	0.04453	0.434	0.00952
포물선형	2.670	0.01090	1.549	0.04378	0.280	0.00592
정현형	2.434	0.01095	1.502	0.04394	0.308	0.00664

이러한 관점에서 표 3에 선형 변단면에 대한 집중하중($p=1, \alpha=0.4$), 등분포하중($q_a=q_b=1$) 및 삼각형분포 하중($q_a=0, q_b=1$)의 e_{st} 와 ($\eta_{m,m}, \theta_{m,m}, \epsilon_{m,m}$)을 정다각형 변수(n)별로 수록하였다. 이 표 3에서와 같이 정다각형의 변수 n 은 e_{st} 값에 영향을 미치지 않는다. 즉, n 값 이외의 다른 조건이 같으면 e_{st} 값은 모두 동일하다. 그러나 최소거동값에는 큰 차이를 보이고 있다. 예로서 (1)의 집중하중에서 원형($n=\infty$)단면의 $n_{m,n}$ 은 정3각형단면($n=3$)에 비하여 $1.21(=0.01757/0.01453)$ 로 21%의 변위(η)의 증가를 초래한다. 즉, n 값이 작을수록 변위에 대하여 유리하다. 회전각(θ)도 마찬가지로 n 값이 작을수록 유리하다. 그러나 연응력(ϵ)에 대해서는 n 값이 클수록 유리하다. 즉, 정3각형 단면의 $\epsilon_{m,m}$ 은 원형단면에 비하여 $1.29(=0.01393/0.01083)$ 로 약 29%의 연응력의 증가를 초래한다. 따라서 변위와 회전각을 기준으로 하는 설계에서는 정3각형단면이 제일 유리하고, 연응력에 대해서는 원형단면이 제일 유리하다.

표 3에서 하중의 크기로 단위값(1)을 사용했지만 다른 조건이 같으면 중첩의 원리에 의하여 하중크기에 상관없이 e_{st} 값은 이 표에 나타난 e_{st} 값과 같다.

표 4는 변단면 종류가 e_{st} 및 최소거동값에 미치는 영향을 보이기 위하여 변단면 종류별로 e_{st} 및 최소거동값을 산정하고 이를 수록한 표이다. 단면은 정4각형단면($n=4$)이고 하중 조건은 모두 4가지로 이 표에 기록되어 있다. (4)번째 하중

조건은 조합하중의 예를 보이기 위하여 집중하중($p=0.4$, $\alpha=0.5$)과 사다리꼴 분포하중($q_a=0.5$, $q_b=0.25$)이 동시에 재하되는 예를 보였다. 표 4에서와 같이 변위(η) 및 회전각(θ)에 대한 값은 선형 변단면이 제일 작고, 정현형, 포물선형 변단면의 순서로 커지며, 연응력(ϵ)에 대해서는 그 반대의 순서로 커진다. 최소거동값들은 모두 포물선형 변단면이 제일 작고, 정현형, 선형 변단면의 순서로 커진다. 구조물은 작은 거동이 안전 측이므로 최강보의 설계에서 포물선형, 정현형, 선형 변단면의 순서로 유리하다.

표 3에서와 마찬가지로 (1), (2), (3)의 하중조건에서 하중의 크기가 다르더라도 다른 조건이 같으면 하중크기에 상관없이 e_{st} 값은 표 4에 나타난 e_{st} 값과 같다. 조합하중의 경우에도 이 표의 하중조건에 배수로 되는 하중에 대해서도 이 표에 나타난 e_{st} 값과 같다.

6. 결 론

이 논문은 일정체적의 정다각형 증실단면을 갖는 최강보에 관한 연구이다. 이러한 보에 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용할 때 탄성곡선의 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 보의 정적거동을 산정하였다. 수치해석 예에서는 단순보를 채택하였고, 단면깊이의 형상함수로는 선형, 포물선형 및 정현형 함수를 채택하였다. 이 연구에서 얻은 수치해석의 결과를 이용하여 보의 최대거동값이 최소가 되는 최강단면비를 산정할 수 있었다.

이 연구에서 얻은 수치해석 예를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 집중하중의 경우에 최강단면비(e_{st})는 하중위치(α)가 중앙에 위치할수록 더 크다.
2. 집중하중의 경우에 하중위치의 변화에 따른 연응력(ϵ)에 대한 최강단면비의 변화는 비교적 작다.
3. 변단면 종류가 같을 때 정다각형의 변수(n)에 상관없이 최강단면비는 모두 같다
4. 변위(η) 및 회전각(θ)에 대한 최강보는 정다각형의 변수가 작을수록 유리하고, 연응력에 대해서는 변수가 클수록 유리하다.
5. 최강보는 최소거동값이 작은 순서인 포물선형, 정현형, 선형 변단면의 순서로 유리 하다.

이상의 결과들은 집중하중, 등분포, 삼각형 분포, 사다리꼴 분포하중 및 조합하중이 작용하는 단순지지 보의 최소중량 설계에 유용한 자료를 제공할 수 있다.

이 연구에서는 단순지지 최강보에 대한 연구로 국한하였다.

단순보에서는 단면이 변단면임에도 불구하고 수직반력을 정적(static)으로 산정할 수 있지만, 고정-고정 보 및 고정-회전 보는 반력을 구하는 것 자체가 부정정(statically indeterminate)이기 때문에 최강보의 연구에서 단순보의 이론전개와는 근본적으로 다르다. 고정-고정 보 및 고정-회전 보도 구조공학 분야에서 무엇보다도 중요한 구조형식이므로 이에 대한 최강보의 연구도 계속되어야 할 것으로 생각한다.

감사의 글

이 논문은 2008년도 원광대학교 교내연구비의 지원을 받았습니다. 제1저자는 연구비 지원에 감사드립니다.

참고문헌

- 김영일(2003) 일정체적 변단면보의 정적 최적 단면, 석사학위논문, 원광대학교.
- 이병구(2008) 응용수치해석, 원광대학교 구조공학연구실 강의노트.
- Atanackovic, T.M. and Simic, S.S. (1999) On the optimal shape of a Pflüger column. *European Journal of Mechanics A-Solid*, Vol. 18, pp. 903-913.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) Applied numerical methods. *John Wiley & Sons*, USA.
- Cox, S.J. and Overton, M.I. (1992) On the optimal design of columns against buckling. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, pp. 287-325.
- Gere, J.M. and Timoshenko, S.P. (1997) Mechanics of materials. *PWS Publishing Company*, USA.
- Haftka, R.T., Grudal, Z., and Kamat, M.P. (1990) Elements of structural optimization. *Kluwer Academic Publisher*, Dordrecht.
- Keller, J.B. (1960) The shape of the strongest column. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, pp. 275-285.
- Keller, J.B. and Niordson, F.I. (1966) The tallest column. *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, pp. 433-446.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume. *Journal of Sound and Vibrations*. Vol. 294, Issues. 1-2, pp. 381-387.
- Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling loads of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507-2518.
- Taylor, J.E. (1967) The strongest column-energy approach. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 34, pp. 486-487.
- Wilson, J.F., Holloway, D.M., and Biggers, S.B. (1971) Stability experiments on the strongest columns and circular arches. *Experimental Mechanics*, Vol. 11, pp. 303-308.

(집수일: 2009.1.8/심사일: 2009.2.18/심사완료일: 2009.2.18)