

후좌굴 변단면 기둥의 기하 비선형 해석

Geometrical Nonlinear Analyses of Post-buckled Columns
with Variable Cross-section

이병구* · 김석기** · 이태은*** · 김권식****

Lee, Byoung Koo · Kim, Suk Ki · Lee, Tae Eun · Kim, Gwon Sik

Abstract

This paper deals with the geometrical nonlinear analyses of post-buckled columns with variable cross-section. The objective columns having variable cross-section of the width, depth and square tapers are supported by both hinged ends. By using the Bernoulli-Euler beam theory, differential equations governing the elastica of post-buckled column and their boundary conditions are derived. The solution methods of these differential equations which have two unknown parameters are developed. As the numerical results, equilibrium paths, elasticas and stress resultants of the post-buckled columns are presented. Laboratory scaled experiments were conducted for validating the theories developed in this study.

Keywords : *post-buckled behavior, geometrical nonlinear analysis, column with variable cross-section, Bernoulli-Euler beam theory*

요 지

이 논문은 양단회전 후좌굴 변단면 기둥의 기하 비선형 해석에 관한 연구이다. 기둥의 변단면은 변화폭, 변화깊이, 정방형 변단면으로 채택하였다. Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하였다. 이 미분방정식은 두 개의 미지수를 가지며 이러한 미분방정식을 풀 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 후좌굴 기둥의 수치해석 결과로 평형경로, 정확탄성곡선 및 합응력을 산정하였다. 실험을 통하여 후좌굴 거동의 이론을 검증하였다.

핵심용어 : 후좌굴 거동, 기하 비선형 해석, 변단면 기둥, Bernoulli-Euler 보 이론

1. 서 론

기둥은 보, 평판, 곡선 부재 등과 더불어 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 구조공학 분야에서 빼대구조로 이용되고 있다. 기둥은 압축하중에 저항하는 구조이므로 휨에 저항하는 보와 더불어 다른 어떤 구조단위 못지않게 중요한 구조단위로 생각한다.

지난 1세기 이상에 걸쳐서 기둥거동에 관한 연구가 매우 활발하게 진행되어 왔다. 다음은 비교적 최근의 기둥과 보의 기하 비선형 해석에 대한 연구동향을 나타낸다. Szymczak (1980)은 유한요소법을 이용하여 축방향으로 비틀림 좌굴이 발생된 등단면 및 변단면 박벽 I형 기둥의 좌굴 및 초기 후좌굴 거동에 관한 연구를 수행하였다. Haslach(1985)은 불연속사상 이론에 의한 비선형 구성방정식을 이용하여 기둥의 후좌굴 거동을 수행하였다. Adan과 Sheinman(1988)은 보의 신장, 휨 및 전단변형이 합성보의 후좌굴 거동에 미치는 영

향을 기하 비선형 이론에 의하여 고찰하였다. Lee 등(1993)은 3차이론에 의하여 변단면 캔틸레버 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 비선형 거동을 해석하였다. Lee와 Wass(1996)는 기하 비선형 이론을 이용하여 탄성지반 위에 놓인 유한보의 후좌굴 거동에 관한 연구를 수행하였다. Cederbaum(2000)은 다공탄성 기둥의 후좌굴 거동을 연구하였다. Mateous와 Witz(2001)는 비선형 유한요소 프로그램을 이용하여 수중 구조물에 사용되는 강관의 좌굴 및 후좌굴 거동에 관한 연구를 수행하였다. 김 등(2002)은 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간빼대구조의 후좌굴 거동을 기하 비선형 유한요소법으로 해석하였다. Rhodes(2003)는 압축하중이 작용하는 박판과 박벽 부재의 후좌굴 거동을 연구하였다. Thankam 등(2003)은 Coupled-displacement Field에 기반을 둔 전단-휨 요소를 이용하여 적층판의 열하중에 대한 후좌굴 거동을 해석하였다. 이와 오(2004)는 에너지법을 이용한 기둥과 보-기둥 구조물의 비탄

*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

**정회원 · 단국대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : skim@dankook.ac.kr)

***정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

****정회원 · 원광대학교 대학원 토목환경공학과 (E-mail : gskim@wku.ac.kr)

성 좌굴거동에 관한 연구에서 I형강에 적용되는 잔류응력 모델을 이용하여 휨-비틀림 좌굴거동을 해석하였다.

최근에 재료공학의 발달로 세장한 구조를 인위적으로 좌굴시킨 후에 이렇게 형성된 후좌굴 구조를 다른 구조와 결합시켜 뼈대구조로 사용하는 하이브리드 구조물(hybrid structures)을 토목, 건축, 기계, 항공을 비롯한 전 구조분야에서 새롭게 응용하고 있다(Falzon and Aliabadi, 2008). 이러한 전형적인 구조물 중에 하나가 elastica 아치(elastica arch)이다(Perkins, 1990). Elastica 아치의 선형은 후좌굴 기둥의 선형으로부터 산정되는 것이므로 후좌굴 기둥의 비선형 해석은 매우 중요한 연구과제 중에 하나이다(Lee et al, 2005; 이 등, 2008).

이상에서 고찰한 바와 같이 기둥의 후좌굴 거동에 관한 연구과제는 지난 수십 년간 활발하게 연구되어 왔으며 앞으로 그 연구는 계속될 전망이다.

이 연구는 변단면 기둥의 후좌굴 거동 해석에 관한 연구이다. 연구의 대상기둥은 직사각형 단면을 갖는 변화폭, 변화깊이 및 정방형의 대칭 선형 변단면으로 채택하였다. 후좌굴 거동을 지배하는 미분방정식을 유도하기 위하여 하중-거동의 관계가 비선형인 Bernoulli-Euler 보 이론을 적용하였다. 기둥의 지지조건은 양단회전을 채택하였다. 유도된 미분방정식으로부터 후좌굴 기둥의 미지수인 좌측지점의 회전각과 우측지점의 수평변위를 산정할 수 있는 수치해석법을 개발하였다. 미분방정식을 수치적분하기 위하여 Runge-Kutta법을 이용하였고 후좌굴 기둥의 미지수를 결정하기 위하여 시행착오적 방법을 사용하였다.

본 연구에서 이론전개를 위하여 적용한 기본가정은 다음과 같다.

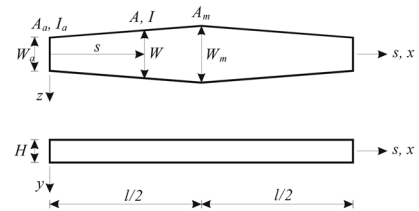
1. 기둥재료는 선형탄성체이다.
2. 기둥은 이상기둥이다.
3. 기둥축은 비압축성이다.
4. 기둥의 국부좌굴은 고려하지 않는다.
5. 이 연구에서 기둥의 세장비는 크므로 전단변형효과는 고려하지 않는다.

2. 기둥의 변단면

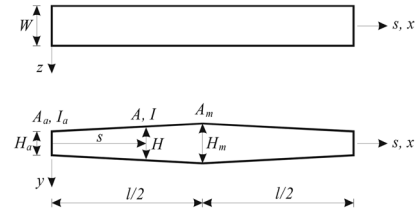
그림 1은 이 연구에서 채택한 (a) 변화폭, (b) 변화깊이, (c) 정방형 변단면을 나타낸다. 기둥의 단면은 직사각형이고 길이는 l 이다. x 축은 직교좌표계의 수평축이며, s 축은 기둥축을 따라 임의점 x 좌표까지 측정된 길이를 나타내는 축이다. 전좌굴 기둥은 직선상태이므로 x 축과 s 축은 일치한다. z 축은 후좌굴 기둥의 휨 축이며, y 축은 후좌굴 기둥의 연직방향 변위축이다. 국부좌굴은 고려하지 않기 때문에 z 축은 y 축보다 휨에 대하여 약축이다. 다음 장에서 취급할 후좌굴 기둥축은 정확탄성곡선을 이루게 되므로 x 축과 s 축은 더 이상 일치하지 않는다. 따라서 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의된다.

변화폭 변단면은 그림 1(a)와 같이 단면깊이 H 는 일정하고 단면폭 W 가 s 에 대하여 선형으로 변화한다. 변화깊이 변단면은 그림 1(b)와 같이 단면폭 W 는 일정하고 단면깊이 H 는 선형으로 변화한다. 정방형 변단면은 그림 1(c)와 같이

(a) 변화폭 변단면



(b) 변화깊이 변단면



(c) 정방형 변단면

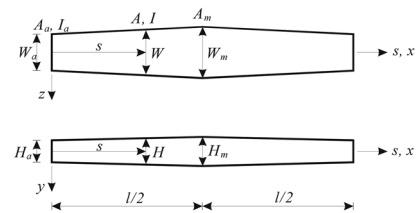


그림 1. 대상기둥의 변단면

단면폭 W 와 단면깊이 H 가 동시에 선형으로 변화하며 단면이 정사각형일 필요는 없다. 변단면은 기둥의 중앙점에 대하여 대칭이다. 임의점에서 단면적 및 단면2차모멘트는 A , I 이고, A_a 와 A_m 은 각각 기둥의 좌측지점($s=0$)과 중앙점($s=l/2$)에서 변단면의 단면적이다.

임의점 s 에서 변단면의 A , I 를 s 에 관한 방정식으로 나타내기 위하여 단면비 r 를 A_m 과 A_a 의 비로 다음 식 (1)과 같이 정의한다.

$$r = \frac{A_m}{A_a} \quad (1)$$

위 식에서 기둥의 단면적은 직사각형이므로 그림 1(a)의 변화폭 변단면의 $A_a = W_a H$ 이고 $A_m = W_m H (= r A_a)$ 이다. 다른 변단면도 마찬가지로 방법으로 구할 수 있다.

기둥의 임의점 s 에서 그림 1(a), (b), (c)에 나타난 변단면의 변화제원 W 와 H 를 1차식으로 표현한 식과 식 (1)을 이용하면 s 에 대한 함수식으로 A , I 식을 다음과 같이 산정할 수 있다.

$$A = A_a \left[e_1 + e_2 \left(\frac{s}{l} \right)^c \right] \quad (2)$$

$$I = I_a \left[e_1 + e_2 \left(\frac{s}{l} \right)^d \right] \quad (3)$$

식 (3)에서 I_a 는 기둥좌단($s=0$)에서 단면2차모멘트이다. 예로서 그림 1(a)에 나타난 변화폭 변단면의 $I_a = W_a H^3 / 12$ 이다. 식 (3)의 I 는 그림 1(a), (b), (c)에 나타난 z 축에 대한 단면2차모멘트이다. 이 연구에서 국부좌굴은 고려하지 않으므로 식 (3)의 I 는 항상 y 축에 대한 단면2차모멘트보다 작아지도록 변화제원이 $W \geq H$ 의 조건을 만족하여야 한다.

식 (2), (3)에서 지수 c, d 는 변단면 종류별로 다음과 같다.

• 변화폭 변단면: $c=1, d=1$ (4.1)

• 변화깊이 변단면: $c=1, d=3$ (4.2)

• 정방형 변단면: $c=2, d=4$ (4.3)

식 (2), (3)에서 계수 e_1, e_2 는 s 의 구간별로 다음 식과 같다.

• $0 \leq s \leq l/2$ 에서 $e_1=1, e_2=2(r^{1/c}-1)$ (5.1)

• $l/2 \leq s \leq l$ 에서 $e_1=2r^{1/c}-1, e_2=2(1-r^{1/c})$ (5.2)

3. 지배미분방정식

그림 2는 양단회전 지점으로 지지된 전좌굴 및 후좌굴 기둥의 형상을 나타낸다. 기둥길이는 l 이고, 기둥의 변단면은 제2장에서 정의되었다. 그림 2에서 전좌굴 기둥은 이상기둥이다. 압축하중 P 가 좌굴하중 B 보다 작기 때문에 기둥은 아직 직선상태를 유지하고 x 축과 s 축은 일치한다. 좌측지점은 수평방향 이동이 불가능하며 우측지점은 이동이 가능하다. 그림 2의 후좌굴 기둥은 압축하중 P 가 좌굴하중 B 보다 크기 때문에 좌굴하여 곡선상태인 정확탄성곡선(elastica)를 이루게 되어 더 이상 x 축과 s 축은 일치하지 않는다.

그림 2에서 후좌굴 기둥의 좌굴형상인 정확탄성곡선은 직교좌표계 (x, y) 에서 정의되며 좌측지점($x=0$)에서 임의점 (x, y) 까지 곡선길이는 s 이다. 후좌굴 기둥에서 우측지점의 수평 변위는 Δ 이다. 따라서 후좌굴 기둥의 지간거리는 $l-\Delta$ 가 된다. 이 연구에서 기둥축은 비압축성이므로 우측지점($x=l-\Delta$)에서 곡선길이는 압축하중 P 의 크기에 상관없이 항상 $s=l$ 이다.

그림 2에서 후좌굴 기둥축의 임의점 (x, y) 에서 회전각은 θ 이고, 좌측지점에서 회전각은 θ_a , 우측지점에서 회전각은 θ_b 이다. 축방향력, 전단력, 휨 모멘트는 각각 N, Q, M 이다.

정확탄성곡선에서 $dy/dx=\tan\theta$ 이므로 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) \quad (6)$$

식 (6)을 이용하면 후좌굴 기둥의 축방향력 및 전단력 N, Q 를 다음 식 (7), (8)과 같이 구할 수 있고 휨 모멘트 M 은 식 (9)와 같이 구할 수 있다.

$$N = P \cos \theta = P \cos \left[\tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) \right] \quad (7)$$

$$Q = P \sin \theta = P \sin \left[\tan^{-1}\left(\frac{dy}{dx}\right) \right] \quad (8)$$

$$M = -Py \quad (9)$$

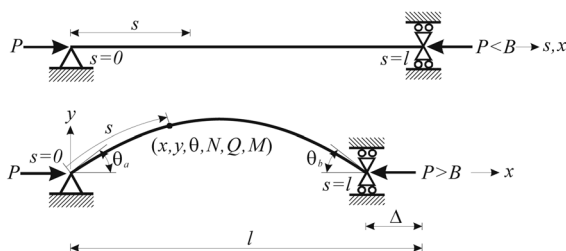


그림 2. 전좌굴 및 후좌굴 기둥의 형상

후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하기 위하여 하중-거동 사이의 관계가 기하 비선형으로 표현되는 Bernoulli-Euler보 이론(Chen and Atsuta, 1977)을 이용한다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (10)$$

위 식에서 E 는 기둥재료의 탄성계수이다.

식 (10)에 식 (3), (9)를 대입하면 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{Py}{EI_a} \left[e_1 + e_2 \left(\frac{s}{l} \right)^d \right] \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (11)$$

수학적 함수식의 미소요소 ds, dx, dy 사이에는 $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ 의 관계가 있으므로 다음의 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{ds}{dx} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (12)$$

위의 식 (11), (12)는 $0 \leq x \leq l-\Delta$ 에서 유효하다.

후좌굴 기둥의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (13)$$

$$\eta = \frac{y}{l} \quad (14)$$

$$\lambda = \frac{s}{l} \quad (15)$$

$$\delta = \frac{\Delta}{l} \quad (16)$$

$$p = \frac{Pl^2}{\pi^2 EI_a} \quad (17)$$

위에서 길이차원의 변수 (x, y, s, Δ) 는 기둥길이 l 로 정규화하였다. p 는 무차원 압축하중이고, 기둥이 좌굴하기 위해서는 주어진 p 값이 무차원 좌굴하중 $b = Bl^2/\pi EI_a$ 값 보다는 커야 한다.

식 (11), (12)의 미분방정식에 무차원 변수식인 식 (13)-(17)을 이용하면 제2장에서 정의한 변단면을 갖는 기둥의 좌굴된 형상인 정확탄성곡선을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{\pi^2 p \eta}{(e_1 + e_2 \lambda)^d} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{3/2} \quad (18)$$

$$\frac{d\lambda}{d\xi} = \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (19)$$

위의 미분방정식들은 $0 \leq \xi \leq 1-\delta$ 에서 유효하다.

기둥의 양단은 회전지점($x=0$)으로 지지되어 있다. 좌측지점에서 수직변위 $y=0$, 곡선길이 $s=0$ 이므로 식 (13)-(15)를 이용하면 식 (20), (21)의 무차원 경계조건을 얻는다.

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (20)$$

$$\lambda = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (21)$$

우측지점($x=l-\Delta$)에서 수직변위 $y=0$, 곡선길이는 $s=l$ 이다. 우측지점에서 회전각 $\theta_b = \tan^{-1}(dy/dx)_{x=l-\Delta}$ 로 계산되고, 기하적 대칭성으로 인하여 $\theta_b = -\theta_a$ 이다. 따라서 이들 세 조건에 대한 경계조건은 다음과 같이 무차원 경계조건으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (22)$$

$$\lambda - 1 = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (23)$$

$$\theta_a + \tan^{-1}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = 0, \xi = 1 - \delta \text{ 에서} \quad (24)$$

식 (18), (19)의 미분방정식은 식 (20), (21)에서 나타낸 경계조건 이외에 $\xi = 0$ 에서 $d\eta/d\xi$ 의 경계조건을 알아야만 초기치 문제를 형성한다. 그림 2에 나타낸 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선에서 수평변위 Δ 와 좌측지점의 회전각 $\theta_a (= \tan^{-1}(d\eta/d\xi)_{\xi=0})$ 가 미지수이다. 따라서 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선은 두 개의 미지수 δ, θ_a 를 갖는다.

이러한 점에서 식 (18), (19)의 미분방정식과 식 (20)-(24)의 경계조건을 이용하여 정확탄성곡선의 미지수인 δ 와 θ_a 를 구하는 것이 이 논문의 요지이다.

후좌굴 기둥에 작용하는 합응력을 무차원 식으로 나타내기 위하여 식 (7)-(9)에 나타낸 합응력을 식 (13)-(17)의 무차원 변수식을 이용하여 다음과 같이 무차원화하였다.

$$n = \frac{NI^2}{\pi^2 EI_a} = p \cos \left[\tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \right] \quad (25)$$

$$q = \frac{QI^2}{\pi^2 EI_a} = p \sin \left[\tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) \right] \quad (26)$$

$$m = \frac{MI}{\pi^2 EI_a} = -p\eta \quad (27)$$

4. 수치해석방법

기둥의 조건 즉, 단면비(r), 변단면 종류(변화폭/변화깊이/정방형 변단면: c, d 값) 및 하중크기 p 가 주어지면 후좌굴 기둥의 미지수인 δ 와 θ_a 를 산정하여야 한다.

이 연구에서 유도한 미분방정식과 경계조건을 이용하여 두 개의 미지수 (δ, θ_a)를 산정할 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다.

주어진 기둥조건에 대한 미분방정식을 풀기 위해서는 미분방정식을 수치적분하여야 한다. 미분방정식의 수치적분 문제는 초기치 문제이므로 좌측지점에서 모든 초기조건을 알아야 한다. 제3장에서 언급한 바와 같이 (δ, θ_a)가 미지수이므로 미분방정식의 수치적분을 시행할 수 없다. 이러한 미분방정식을 풀 수 있는 수치해석 방법은 아직 알려져 있지 않다.

이 연구에서는 두 개의 미지수를 갖는 미분방정식을 시행착오적 방법을 이용하여 풀 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 수치해석 과정을 단계별로 설명하면 다음과 같다.

1) 미지수 (δ, θ_a)를 시행착오적으로 가정하여 좌측지점 ($\xi=0$)에서 $d\eta/d\xi = \tan(\theta_a)$ 와 정확탄성곡선의 지간길이 $1-\delta$ 를 계산한다.

2) 식 (20), (21)의 경계조건과 1)에서 가정하여 계산한 $d\eta/d\xi$ 를 이용하여 식 (18), (19)의 미분방정식을 $\xi=0$ 에서 $\xi=1-\delta$ 까지 수치적분한다. 이 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법(Carnahan *et al.*, 1969)을 이용하였다.

3) 이 때 수치적분법으로 시산된 우측지점의 거동값들은 “+”와 “-”의 오차를 동시에 가질 수 있다. 단순히 식 (22)-(24)의 경계조건을 이용하면 더 큰 오차가 발생하였음에도 “+”, “-”의 오차가 상쇄되어 마치 오차가 더 작아지는 것과

같은 결과를 보인다. 이러한 모순을 피하기 위하여 우측지점의 경계조건인 식 (22)-(24)에 절대값을 취하여 다음과 같이 한 개의 경계조건으로 변환시켜 시행착오적 방법에 적용하였다.

$$D = |\eta + |\lambda - 1| + \left| \theta_a + \tan^{-1} \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_{\xi=1-\delta} \right| = 0 \quad (28)$$

4) 그림 2의 정확탄성곡선에서 미지수 (δ, θ_a)는 $0 < \delta < 1, 0 < \theta_a < \pi/2$ 의 범위 내에 그 해가 존재한다. 첫 번째 시행착오에서는 $0 < \delta < 1$ 과 $0 < \theta_a < \pi/2$ 의 범위에서 (δ, θ_a)를 일정증분 $\Delta\delta, \Delta\theta_a$ 씩 증가시키면서 미분방정식을 수치적분하고 그 결과로 식 (28)의 D 를 계산한다. 이 계산결과를 공간직교좌표계 (δ, θ_a, D)에 3차원 곡면으로 그린다. 이러한 예를 그림 3(a)에 나타내었다. 주어진 기둥의 조건 “ $r=1.2$, 변화폭 변단면, ($c=1, d=1$), $p=1.35, \Delta\delta=0.05, \Delta\theta_a=0.05$ ”를 이 그림 상단에 표시하였다. 수치해 (δ, θ_a)의 D 는 반드시 “0”이어야 하기 때문에 $D=0$ 인 (δ, θ_a) 평면에 접하는 3차원 곡면의 꼭짓점 좌표 (δ, θ_a)가 미지수의 해가 된다.

5) 그림 3(a)에 나타낸 3차원 곡면의 등고선을 (δ, θ_a) 평면 위에 그리면 그림 3(b)와 같다. 이 그림에서 수치해 (δ, θ_a)는 가장 낮은 등고선 안쪽에 존재한다. 가장 낮은 등고선으로부터 첫 번째 시행착오보다 더 한층 축소된 미지수의 범위 $0.18 \leq \delta \leq 0.36, 0.90 \leq \theta_a \leq 1.31$ 을 찾을 수 있다. 다음의 시행착오에서 적용할 (δ, θ_a)의 새로운 범위를 실선의 직사각형으로 표시하였다. 두 번째 반복시행에서는 위에서 언급한 바와 같이 $0.18 \leq \delta \leq 0.36, 0.90 \leq \theta_a \leq 1.31$ 의 범위에서 미분방정식을 수치적분하고 공간직교좌표계 (δ, θ_a, D)에 3차원 곡면으로 그린다.

6) 두 번째 이상의 시행착오에서 위의 방법을 반복시행하는 과정에서 소정의 수렴조건을 만족하는 (δ, θ_a)의 수치해를 찾는다. 다음의 두 가지 수렴조건 중에서 하나를 만족하면 축소된 범위의 중앙값 즉, 직사각형 도심의 좌표 (δ, θ_a)를 최종적인 수치해로 결정하였다.

$$D \leq 10^{-5} \quad (29)$$

$$w_\delta \leq 10^{-4}, w_{\theta_a} \leq 10^{-4} \quad (30)$$

식 (30)에서 w_δ, w_{θ_a} 는 그림 3(b)에 나타낸 바와 같이 미지수 (δ, θ_a)가 존재하는 범위의 폭이다. 그림 3(a), (b)에 이러한 방법으로 찾은 수치해 $\delta = 0.301, \theta_a = 1.151$ 을 ●로 표시하였다. 그림 3(b)에 나타낸 것처럼 첫 번째 반복시행에서 $w_\delta = 0.36 - 0.18 = 0.18 > 10^{-4}$ 이므로 수치해는 될 수는 없지만 $\delta = (0.18 + 0.36)/2 = 0.270$ 은 최종 수치해 $\delta = 0.301$ 에 상당히 근접한 것을 알 수 있다. 또한 $\theta_a = (0.90 + 1.31)/2 = 1.105$ 도 최종 수치해 $\theta_a = 1.151$ 에 근접해 있다. 반복횟수에 따른 ($\delta, \theta_a/3$)의 수렴과정을 그림 4에 나타내었다. 이 그림에서는 4회의 반복시행으로 최종 수치해는 $\delta = 0.301, \theta_a = 1.151$ 에 수렴한 것을 알 수 있다.

7) 이와 같이 수치해 (δ, θ_a)를 찾으면 Runge-Kutta법의 결과로 ($\xi, \eta, d\eta/d\xi, \lambda$)가 산정되며, θ 는 식 (6)을 이용하여 계산할 수 있다. 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선에 발생하는 합응력 n, q, m 은 식 (25)-(27)을 이용하여 산정한다.

이상의 수치해석 방법을 FORTRAN어로 프로그램하였다. 이 수치해석 방법은 시행착오적이므로 많은 양의 연산을 필

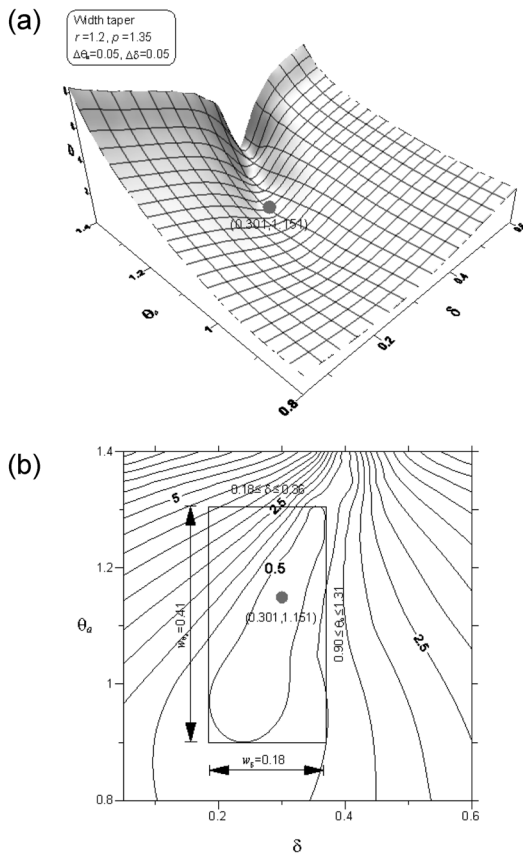


그림 3. 미지수 (δ , θ_a)의 수렴과정

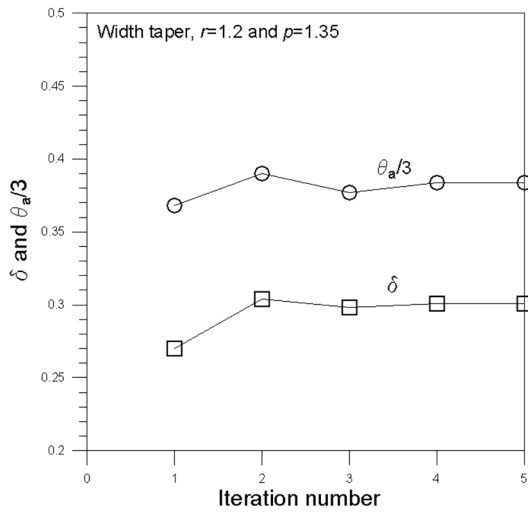


그림 4. 반복횟수에 따른 수렴과정

요로 함에도 실용적인 무차원 하중 p 의 범위 내에서 안정적으로 수치해를 산출해 주었다.

5. 수치해석 예 및 토의

미분방정식을 Runge-Kutta법을 이용하여 수치적분하려면 적당한 단계길이(step size) $\Delta\xi$ 의 산정이 필요하다(Carnahan et al., 1969). 그림 5는 미지수 (δ , θ_a)의 수렴해석 결과를 나타낸다. 이 그림 상단에 기둥의 조건을 표시하였으며, 이후에 모든 수치해석 그림에서도 기둥의 조건을 표시하였다. 수치해는 $(1-\delta)/\Delta\xi = 50$ 에서 충분한 정도로 수렴되는 것을 알 수 있다. 여기서 $(1-\delta)$ 는 정확탄성곡선의 지간길이이므로 지간길이를 50등분하여 단계길이를 수치적분하면 수치해는

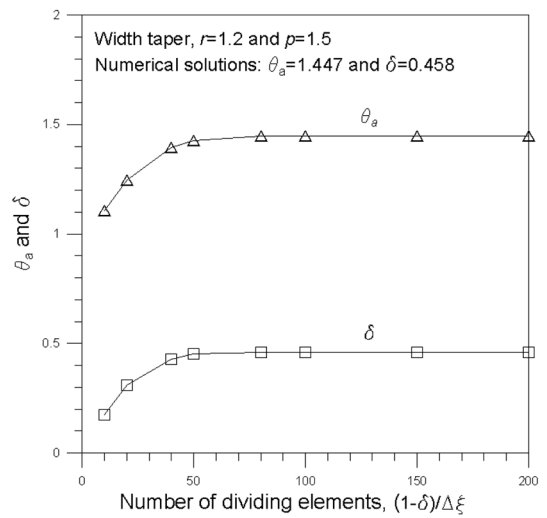


그림 5. 수렴해석

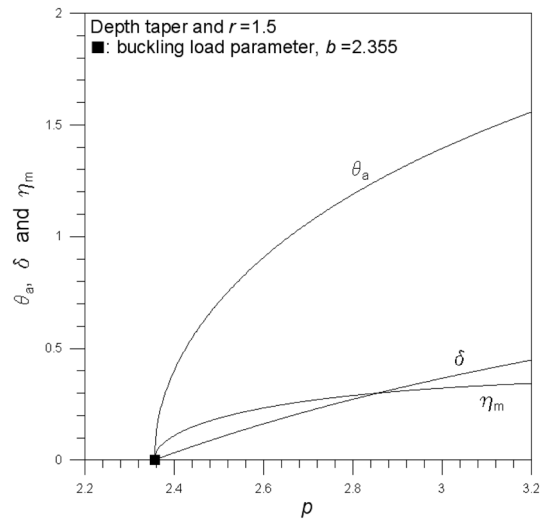


그림 6. 하중 에 대한 평형경로

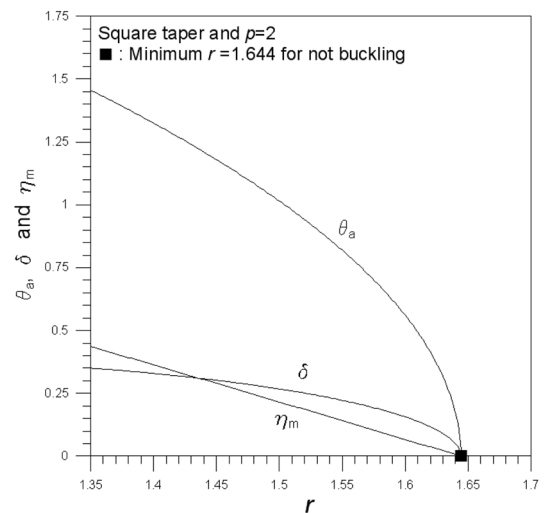


그림 7. 단면비 에 대한 평형경로

높은 정도로 수렴되는 것을 알 수 있다.

그림 6은 무차원 하중 p 와 후좌굴 거동사이의 관계를 그린 평형경로를 나타낸다. 이 그림에서 새로운 변수 η_m 는 정확탄성곡선의 최대연직변위 즉 중앙점에서 연직변위이다. 이 평형경로에서 보는 바와 같이 모든 거동은 매우 강한 비선형성을 보인다. 특히 θ_a , η_m 는 δ 에 비하여 더 큰 비선형성

을 보인다. 이 그림에서 $p < 2.355$ 인 하중에 대해서 모든 거동값은 "0"거동 즉 기둥은 직선상태로 있는 것을 알 수 있다. 한편 $p > 2.355$ 인 하중에 대해서 기둥은 후좌굴 거동을 보인다. 따라서 이 그림에서 p 축에 ■로 표시한 값이 $p=2.355$ 값이 "변화깊이 변단면, $r=1.5$ "로 주어진 기둥의 무차원 좌굴하중 $b=2.355$ 가 된다. 따라서 평형경로의 특성을 이용하여 무차원 좌굴하중 b 를 산정할 수 있다.

그림 7은 단면비 r 과 후좌굴 거동사이의 관계를 그린 평형경로를 나타낸다. 그림 6과 마찬가지로 후좌굴 거동은 강한 비선형성을 보인다. 주어진 정방형 변단면 기둥은 $p=2$ 에 대하여 ■로 표시한 $r=1.664$ 에서 좌굴한다. 즉, $r=1.664$ 는 하중 $p=2$ 에 대하여 기둥이 좌굴하지 않는 최소 단면비이다. 이러한 곡선은 기둥설계에 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대된다.

그림 8은 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선의 예를 나타낸다. 이 그림에서 정확탄성곡선의 곡선길이는 모두 일정하다. 무차원 하중 p 가 증가할수록 후좌굴 거동값인 지점회전각 θ_m , 우측지점 수평변위 δ 및 정확탄성곡선 높이 η_m 은 증가한다. 이와 같이 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선은 일정곡선길이로 다양한 형태의 선형을 창조할 수 있다. 서론에서 언급한 바와 같이 최근 후좌굴 기둥의 정확탄성곡선과 다른 구조단위를 결합하여 뼈대구조로 사용하는 하이브리드(hybrid) 구조물에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며, 이러한 구조설계에서 이 그림은 구조물 선형에 관한 중요한 자료를 제공해 줄 수 있다.

그림 9는 후좌굴 기둥에 작용하는 무차원 합응력 n , q , m 을 나타낸다. 축방향력 n 과 휨 모멘트 m 은 후좌굴 기둥의 중앙에서 최대값이 발생하고, 전단력 q 는 지점에서 최대로

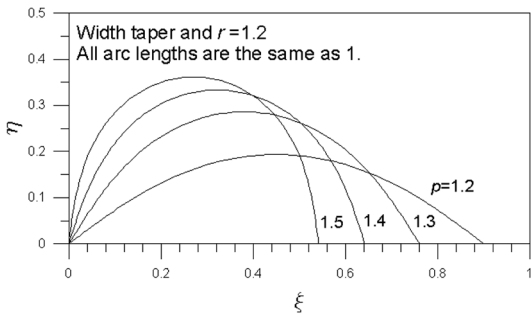


그림 8. 정확탄성곡선

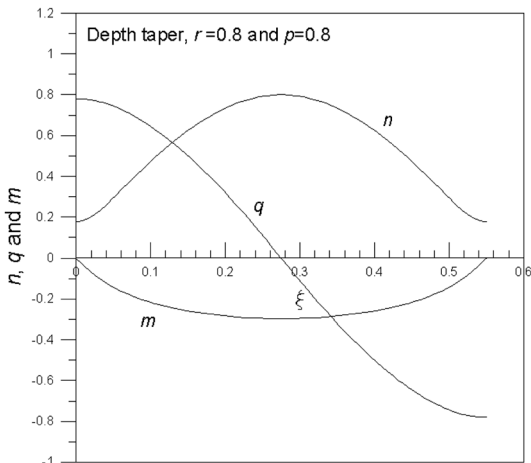


그림 9. 후좌굴 기둥의 합응력도

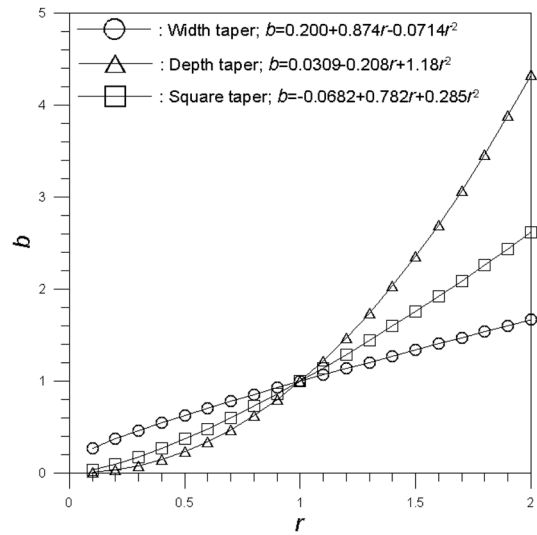


그림 10. r - b 곡선

발생한다. 이러한 그림은 하이브리드(hybrid) 구조물 설계에서 구조의 단면을 결정하는데 중요한 자료를 제공할 수 있다.

기둥의 좌굴하중을 산정하는 것은 매우 중요한 기둥구조의 해석단계 중에 하나이다. 이 연구에서는 그림 6, 7과 같은 평형경로의 기하적 분기특성을 이용하여 기둥의 무차원 좌굴하중을 산정하였다. 그림 10은 변단면 기둥의 단면비 r 과 무차원 좌굴하중 b 사이의 관계를 나타낸다. b 는 $0.1 \leq r < 1$ 에서는 변화폭, 정방형, 변화깊이 변단면의 순서로 크지만 $1 < r \leq 2$ 에서는 그 반대다. $r=1$ 인 등단면 기둥은 세 변단면 모두 $b=1$ 이다. 이 그림에서 ○, △, □로 나타낸 각각 20개의 (r , b)값을 회귀분석하여 무차원 좌굴하중 방정식을 $0.1 \leq r \leq 2$ 의 범위 내에서 포물선 함수식으로 나타내어 다음과 같이 제안한다.

- 변화폭 변단면

$$b = 0.200 + 0.874r - 0.0714r^2 \quad (31.1)$$

- 변화깊이 변단면

$$b = 0.0309 - 0.208r + 1.18r^2 \quad (31.2)$$

- 정방형 변단면

$$b = -0.0682 + 0.782r + 0.285r^2 \quad (31.3)$$

그림 10에서 실선으로 나타낸 추정된 포물선 식들은 모두 상관계수가 0.99이상으로 이론값에 우수하게 적합하였다.

6. 실험

본 논문에서 전개한 이론, 수치해석 방법 및 작성된 컴퓨터 프로그램을 검증하기 위하여 [A], [B] 2조의 모형기둥을 제작하여 실험실 규모의 실험을 실시하였다.

실험에 사용한 기둥재료는 모형실험에 적당한 휨 강성을 갖는 플라스틱을 사용하였다. 기둥의 단면은 변화깊이 및 정방형 변단면보다 비교적 제작이 용이한 변화폭 변단면을 채택하였다. 그림 11에 실험장치의 개략도를 나타내었다.

실험장치에 모형기둥을 거치하고 도르래와 중량추를 이용하여 하중을 재하하였다. 중량추의 중량을 압축하중으로 전

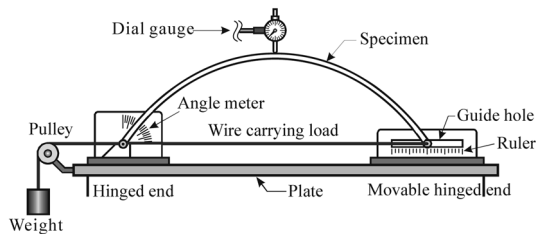


그림 11. 실험장치 개략도

달하는 피아노선은 양쪽지점의 회전축의 중앙을 통과 하도록 하여 편심이 발생하지 않도록 하였다. 실험 전에 모형기둥의 좌굴하중을 이론에 의하여 먼저 산정하고 이 좌굴하중보다 더 큰 소정의 하중을 점진적으로 재하하여 기둥의 좌굴을 유도하였다. 좌측지점의 회전각과 우측지점의 수평변위는 그림 11에서와 같이 각도기와 정밀자를 이용하여 측정하였고, 정확탄성곡선의 높이는 dial gauge를 이용하여 측정하였다. 모형기둥 [A], [B]에 대하여 각각 3회의 실험을 실시하여 평균치를 후좌굴 거동값으로 하였다. 이상과 같은 기둥의 후좌굴 실험과 유사한 실험방법이 문헌(Wilson, 1993)에 잘 기술되어 있다.

실험에 사용한 모형기둥 [A], [B]의 제원은 다음과 같다.

[A] 시편: 변화폭, 직사각형 단면

$$l=350 \text{ mm}, W_a=30 \text{ mm},$$

$$W_m=45 \text{ mm}, H=3 \text{ mm},$$

$$E=3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2,$$

$$P=27\text{N} (B=24.1\text{N})$$

$$r=1.5, p=1.504 (b=1.343)$$

[B] 시편: 변화폭, 직사각형 단면

$$l=500 \text{ mm}, W_a=40 \text{ mm},$$

$$W_m=24 \text{ mm}, H=3 \text{ mm},$$

$$E=3.3 \times 10^3 \text{ N/mm}^2,$$

$$P=26\text{N} (B=23.1\text{N}),$$

$$r=0.6, p=0.798 (b=0.709)$$

표 1은 본 연구의 이론과 실험으로 얻어진 후좌굴 거동값 θ_a , δ , η_m 을 비교한 표이다. [A], [B]의 실험에서 이론과 실험 사이의 평균 오차는 3.68%이다. 이론과 실험 사이의 오차는 다음의 3가지가 주요 원인으로 생각된다. 첫째, 모형기둥의 제작 오차, 둘째, 좌측 및 우측지점의 마찰력에 의한 오차, 셋째, 재료적 비선형성에 의한 오차를 들 수 있다. 특히 완벽한 조건을 구현하는 지점의 제작이 어려우며 이에 수반하는 마찰력의 요인이 가장 큰 원인으로 생각된다.

이러한 오차의 발생 요인에도 불구하고 표 1에서 보는 바

표 1. 이론과 실험의 결과 비교

| 실험 | 거동변수 | 이론 | 실험 | 오차* |
|-----|------------|-------|-------|------|
| [A] | θ_a | 0.953 | 0.926 | 2.83 |
| | δ | 0.204 | 0.195 | 4.41 |
| | η_m | 0.265 | 0.260 | 1.89 |
| [B] | θ_a | 0.950 | 0.916 | 3.58 |
| | δ | 0.231 | 0.215 | 6.93 |
| | η_m | 0.288 | 0.281 | 2.43 |

*오차(%)=(1-실험/이론)×100

와 같이 두 결과는 매우 우수하게 근접하여 이 연구에서 유도한 지배미분방정식, 개발된 수치해석 방법 및 작성된 프로그램의 타당성을 검증할 수 있었다.

7. 결 론

이 논문은 후좌굴 변단면 기둥의 비선형 거동 해석에 관한 연구이다. 기둥의 양단은 회전지점으로 지지되고, 기둥의 변단면은 변화폭, 변화깊이, 정방형 변단면으로 채택하였다. 하중-변위 사이의 관계가 기하 비선형인 Bernoulli-Euler 보 이론을 이용하여 기둥의 좌굴된 형상인 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 이 미분방정식은 좌측지점의 회전각과 우측지점의 수평변위를 미지수로 갖고 있다. 이러한 미분방정식을 시행차오적으로 풀 수 있는 수치해석 방법을 개발하였다. 후좌굴 기둥의 수치해석 결과로 평형경로, 정확탄성곡선 및 합용력을 산정하였다. 평형경로의 기하적 분기 특성을 이용하여 무차원 좌굴하중을 산정하였다. 수치해석의 결과로 얻어진 무차원 좌굴하중과 단면 비 사이의 관계를 회귀분석하여 양단회전 변단면 기둥의 좌굴하중방정식을 제안하였다. 실험을 통하여 이 연구의 이론, 수치해석방법 및 컴퓨터 프로그램을 검증하였다.

참고문헌

- 김성보, 김문영, 장승필(2002) 비대칭 단면을 갖는 박벽 공간뼈대구조의 후좌굴해석을 위한 개선이론. **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제22권, 제2A호, pp. 189-200.
- 이동식, 오순택(2004) 기둥과 보-기둥 구조물의 비탄성 좌굴 거동. **한국강구조학회 논문집**, 한국강구조학회, 제16권, 제2호, pp. 215-224.
- 이병구, 오상진, 이태은, 김권식(2008) Elastica형 아치의 자유진동. **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제28권, 제6A호, pp. 827-833.
- Adan, M. and Sheinman, I. (1988) Effect of stretching-bending coupling and shear deformation on post-buckling behaviour of laminated beams. *Computers & Structures*, Vol. 30, Issue 3, pp. 609-613.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) Applied numerical methods. *John Wiley & Sons*, USA.
- Cederbaum, G. (2000) Post-buckling behaviour of poro-elastic columns. *International Journal of Mechanics Science*, Vol. 42, pp. 771-783.
- Chen, W.F. and Atsuta, T. (1977) Theory of beam-columns. *McGraw-Hill Book Co.*, USA.
- Falzon, B.G. and Aliabadi M.H. (2008) Buckling and post-buckling structures. *Imperial College Press*, UK.
- Haslach, H.W. Jr. (1985) Post-buckling behaviour of columns with non-linear constitutive equations. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 20, Issue 1, pp. 53-67.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elastics and buckling loads of shear deformable tapered columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.
- Lee, S.H. and Waas, A.M. (1996) Initial post-buckling behaviour of a finite beam on an elastic foundation. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 31, Issue 3, pp. 313-328.
- Lee, B.K., Wilson, J.F., and Oh, S.J. (1993) Elastics of cantilevered beams with variable cross sections. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 28, No. 5, pp. 579-589.
- Mateous, A.F. and Witz, J.A. (2001) A parametric study of post-

- buckling behaviour of steel plates. *Engineering Structures*, Vol. 23, Issue 2, pp. 172-185.
- Perkins, N.C. (1990) Planar vibration of an elastica arch. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 112, pp. 374-379.
- Rhodes, J. (2003) Some observations on post-buckling behaviour of thin plates and thin-walled members, *Thin-Walled Structures*, Vol. 41, Issues 2-3, pp. 207-226.
- Szymczak, C. (1980) Buckling and initial post-buckling behaviour of thin-walled I columns. *Computer & Structures*, Vol. 11, Issue 6, pp. 481-487.
- Thankam, V.S., Singh, G., Rao, G.V., and Rath, A.K. (2003) Thermal post-buckling behaviour of laminated plates using a shear-flexible element based on coupled-displacement field. *Composite Structures*, Vol. 59, Issue 3, pp. 351-359.
- Wilson, J.F. (1993) Experiments of the strength of solids. *McGraw-Hill Inc.*, USA.
- (접수일: 2008.9.23/심사일: 2008.11.17/심사완료일: 2008.12.15)