

# 고정-고정 및 고정-회전 지점으로 지지된 일정체적 최강보

## Strongest Beams having Constant Volume Supported by Clamped-Clamped and Clamped-Hinged Ends

이병구\* · 이태은\*\* · 신성철\*\*\*

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Shin, Seong Cheol

### Abstract

This paper deals with the strongest beams with the solid regular polygon cross-section, whose volumes are always held constant. The differential equation of the elastic deflection curve of such beam subjected to the concentrated and trapezoidal distributed loads are derived and solved by using the double integration method. The Simpson's formula was used to numerically integrate the differential equation. In the numerical examples, the clamped-clamped and clamped-hinged ends are considered as the end constraints and the linear, parabolic and sinusoidal tapers are considered as the shape function of cross sectional depth. As the numerical results, the configurations, i.e. section ratios, of the strongest beams are determined by reading the section ratios from the numerical data obtained in this study, under which static maximum behaviors become to be minimum.

**Keywords :** *strongest beam, tapered beam, clamped-clamped beam, clamped-hinged beam, constant volume, double integration method, Simpson's formula*

### 요 지

이 논문은 정다각형 중실 단면을 갖는 최강보에 관한 연구이다. 이 연구에서 보의 체적은 항상 일정하다. 이러한 보에 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 경우에 탄성곡선의 미분방정식을 유도하고 이를 중적분법을 이용하여 풀어 정적 거동을 산정하였다. 미분방정식의 정적분은 Simpson 공식을 이용하였다. 수치해석 예에서는 고정-고정 보 및 고정-회전 보를 채택하였고, 단면깊이의 형상함수로선 선형, 포물선형 및 정현형의 함수를 채택하였다. 이 연구에서 얻은 수치해석의 결과로부터 보의 정적 최대거동값이 최소가 되는 단면형상 즉 최강단면비를 산정하였다.

**핵심용어 :** 최강보, 변단면보, 고정-고정 보, 고정-회전 보, 일정체적, 중적분법, Simpson 공식

### 1. 서 론

구조물의 설계에서 최대 내하력을 갖는 최적형상을 찾는 것은 매우 중요한 문제이며(Hafka *et al.*, 1990) 전통적으로 구조공학에서 가장 주요한 연구대상 중에 하나이다.

그동안 최적화 문제는 구조공학의 여러 분야에서 많은 연구가 이루어지고 있지만, 이 연구와 직접 관련이 있는 휨 부재에 대하여 연구 동향을 고찰하면 다음과 같다. Keller(1960)는 최강기둥의 형상에 관한 연구에서 최강기둥(strongest column)은 “일정량의 재료로 만들어진 지간길이가 동일한 기둥 중 가장 큰 좌굴하중을 갖는 기둥”으로 정의하였다. Keller와 Niordson(1966)은 또 다른 최적화 개념인 최장기둥(tallest column)에 대하여 연구하였으며 여기서 최장기둥은 “일정량의 재료로 만들어진 기둥 중 지중에 의하여 좌굴이 발생하지 않는 최장길이를 갖는 기둥”으로 정의

하였다. Taylor(1967)는 에너지 이론을 이용하여 최강기둥의 단면형상에 대한 연구를 수행하였다. Wilson 등(1971)은 삼각형 단면을 갖는 최강기둥의 단면깊이의 형상함수(shape function)에 대하여 이론 및 실험적 연구를 수행하였다. Cox와 Overton(1992)은 좌굴에 대한 기둥의 최적 단면형상에 대하여 연구하였다. Atanackovic과 Simic(1999)은 기둥축을 따라 등분포 비보존력이 작용하는 Pflüger 기둥의 최적형상에 대하여 연구하였다. 이 연구에서는 기둥의 제1고유진동수(fundamental frequency)가 최대가 되는 동적 최강기둥의 단면형상을 찾았다. Lee와 Oh(2000)는 일정체적 기둥에 대하여 대변형 이론(large deflection theory)을 이용하여 최강기둥의 단면형상을 찾았다. Lee 등(2005)은 전단변형을 고려한 변단면 기둥의 좌굴하중을 산정하였다. Lee 등(2006)은 기둥에 작용하는 압축하중에 대한 동적 개념을 이용하여 정적 최강기둥의 단면형상을 찾았다. 이 등(2009)은 일정체적을

\*정회원 · 교신저자 · 원광대학교 토목환경공학과 교수 (E-mail : bkleest@wku.ac.kr)

\*\*정회원 · 원광대학교 토목환경공학과 겸임교수 (E-mail : telee@wku.ac.kr)

\*\*\*익산시청 건설교통국 재난관리과 (E-mail : shinsc@korea.kr)

갖는 단순지지 최강보에 대하여 연구하고 그 결과로 최강단면비를 산출하고, 보의 기하적 조건 및 하중조건이 최강단면비에 미치는 영향을 분석하였다.

보는 기둥, 곡선 부재, 평면판(또는 곡면판) 등과 더불어 가장 기본적인 구조단위 중에 하나이므로 구조공학 분야에서 뼈대구조로 이용되고 있다. 변단면은 구조물의 자중을 줄이고 작용하중에 대한 내하력을 증진시킬 수 있을 뿐만 아니라 미적 감각, 경제적 측면 등 다양한 목적 때문에 변단면의 이용은 날로 증가하는 추세이다.

이 연구는 일정체적을 갖는 변단면 최강보(strongest beam)에 관한 연구이다. 앞의 연구동향에서 살펴본 바와 같이 최강기둥에 관한 연구는 비교적 많은 문헌에서 찾을 수 있지만 최강보에 관한 연구는 이 등(2009)의 논문이 유일하다. 이 논문에서 최강보를 “보의 기하적 조건 및 하중조건에 대하여 보의 최대거동값이 최소가 되는 단면형상을 갖는 보”로 정의하였다.

일정체적 변단면 단순보는 부정정임에도 불구하고 수직반력을 정적으로 산정할 수 있다. 한편 이 연구에서 채택하고 있는 일정체적 변단면 고정-고정 및 고정-회전 보의 수직반력을 구하는 것 자체가 부정정이기 때문에 최강보의 연구에서 단순보의 이론전개와는 근본적으로 다르다.

이러한 관점에서 이 논문에서 연구된 내용은 이 등(2009)의 논문에 대한 후속연구라고 생각된다.

이 연구에서 보의 기하적 조건은 정다각형 중실 단면(solid cross-section)을 갖고 단면깊이가 선형, 포물선형 및 정현형으로 변화하는 변단면 일정체적 보를 채택하였다. 하중조건은 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 하중을 채택하였고, 지지조건은 고정-고정 및 고정-회전으로 채택하였다.

이러한 보의 탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고 이를 중적분법으로 풀어 보의 가장 중요한 거동인 변위(deflection), 회전각(rotation) 및 연오력(extreme fiber stress)을 산정하였다. 이렇게 산정된 수치해석의 거동값을 이용하여 최대거동값이 최소가 되는 최강보의 단면비 즉 최강단면비를 찾았다.

## 2. 일정체적 부재의 단면성질

그림 1(a)는 이 연구에서 채택한 단면이 중실 정다각형이고, 지간길이가  $l$ 인 부재를 나타낸다. 그림 1(b)는 단면깊이

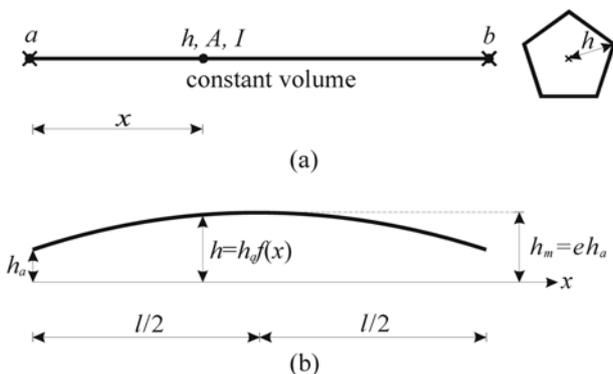


그림 1. 일정체적 정다각형 변단면 부재

$h$ 가 축방향 좌표  $x$ 의 함수로 표현되는 형상함수를 나타낸다. 이 그림에서  $h_a$ 는 양단( $x=0$  및  $x=l$ )에서 단면깊이이고,  $h_m$ 은 중앙( $x=l/2$ )에서 단면깊이다. 부재의 체적은  $h_a$ ,  $h_m$ 의 크기와  $h$ 의 형상함수에 상관없이 모두 일정체적  $V$ 를 갖는다(Lee and Oh, 2000; 이 등, 2009).

단면깊이의 형상함수를 결정하기 위하여 단면비  $e$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$e = \frac{h_m}{h_a} \quad (1)$$

단면깊이가  $h$ 인 정 $n$ 각형의 단면적  $A$  및 단면2차모멘트  $I$ 는 다음 식과 같이 결정할 수 있다. 여기서  $n$ 은 정다각형의 변수이므로 3이상의 정수이다.

$$A = c_1 h^2 \quad (2)$$

$$I = c_2 h^4 \quad (3)$$

위에서  $c_1$ ,  $c_2$ 는 다음과 같다.

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (4)$$

$$c_2 = \frac{n}{12} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[3 + \tan^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right] \quad (5)$$

단면깊이  $h$ 는 변화깊이이므로 축방향 좌표  $x$ 에 관한 형상함수로 나타내면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$h = h_a f \quad (6)$$

여기서  $f = f(x)$ 이다.

식 (2), (3)을 이용하여 부재의 일정체적  $V$ 를 구하면 다음과 같다.

$$V = \int_0^l A dx = \int_0^l c_1 h_a^2 f^2 dx = c_1 c_3 h_a^2 l \quad (7)$$

위에서  $c_3$ 는 식 (6)에서 주어지는 형상함수  $f$ 에 따라서 결정되는 함수식이다

이제 변단면의 종류를 선형, 포물선형, 정현형의 3가지 변단면으로 채택하면 식 (6)에서 단면깊이  $h$ 를 정의해주는 형상함수  $f$  및 식 (7)의 무차원 계수  $c_3$ 를 다음과 같이 결정할 수 있다.

1) 선형 변단면(linear taper)

$$f = 2(e-1)\left(\frac{x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \quad (8.1)$$

$$f = 2(e-1)\left(1 - \frac{x}{l}\right) + 1, \frac{l}{2} \leq x \leq l \quad (8.2)$$

$$c_3 = \frac{1}{3}(e^2 + e + 1) \quad (9)$$

2) 포물선형 변단면(parabolic taper)

$$f = 4(e-1)\left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (10)$$

$$c_3 = \frac{1}{15}(8e^2 + 4e + 3) \quad (11)$$

3) 정현형 변단면(sinusoidal taper)

$$f = (e-1)\sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + 1, 0 \leq x \leq l \quad (12)$$

$$c_3 = \frac{e^2}{2} + \left(\frac{4}{\pi} - 1\right)e + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \quad (13)$$

식 (7)을 이용하여 부재의 양단( $x=0$  및  $x=l$ )에서 단면깊이  $h_a$ 를 일정체적  $V$ 로 나타내면 다음과 같다.

$$h_a = \left( \frac{V}{c_1 c_3 l} \right)^{1/2} \quad (14)$$

식 (3), (6), (14)를 이용하여 축방향 좌표  $x$ 에서 단면2차모멘트  $I$ 를 구하면 다음과 같다.

$$I = c_2 h^4 = c_2 \left( \frac{V}{c_1 c_3 l} \right)^2 f^4 \quad (15)$$

이상과 같이 시간길이  $l$ , 일정체적  $V$ , 정 $n$ 다각형 단면을 갖는 부재의 축방향 좌표  $x$ 에서 단면2차모멘트  $I$ 를 식 (15)와 같이 유도하였다.

### 3. 수학적 모형

그림 2는 제2장에서 정의된 시간길이  $l$ , 일정체적  $V$ 인 (a) 고정-고정 보와 (b) 고정-회전 보에 작용위치가  $a$ 인 집중하중  $P$ 와 하중강도가  $Q_a, Q_b$ 인 만재 사다리꼴 분포하중이 작용하는 경우에 탄성곡선의 형상을 나타낸다. 이 그림에서  $R_a, M_a$ 는 좌측의 고정지점( $x=0$ )에서 수직반력 및 모멘트 반력을 나타낸다.  $M_b$ 는 우측지점( $x=l$ )에서 모멘트 반력을 나타내며, 고정-회전 보에서는  $M_b=0$ 이다. 축방향 좌표  $x$ 에서  $M, w, \theta (=dw/dx), \sigma_e$ 는 휨모멘트, 변위, 회전각, 연응력을 나타낸다.

축방향 좌표  $x$ 에서 휨모멘트  $M$ 을 ( $R_a, M_a$ ), ( $P, a$ )와 ( $Q_a, Q_b$ )를 이용하여 산정하면 다음과 같다.

$$M = M_a + R_a x - \frac{1}{2} Q x^2 + \frac{1}{6l} (Q_a - Q_b) x^3, \quad 0 \leq x \leq a \quad (16.1)$$

$$M = M_a + P a + (R_a - P) x - \frac{1}{2} Q a x^2 - \frac{1}{6l} (Q_b - Q_a) x^3, \quad a \leq x \leq l \quad (16.2)$$

위의 식 (16)에서  $R_a, M_a$ 는 부정정력으로 산정하여야 할 미지수이다.

연응력  $\sigma_e$ 는 식 (6), (14)~(16)을 이용하여 다음과 같이 구한다.

$$\sigma_e = \frac{M}{I} h = \frac{(c_1 c_3 l)^{3/2} M}{c_2 V^{3/2} f^3} \quad (17)$$

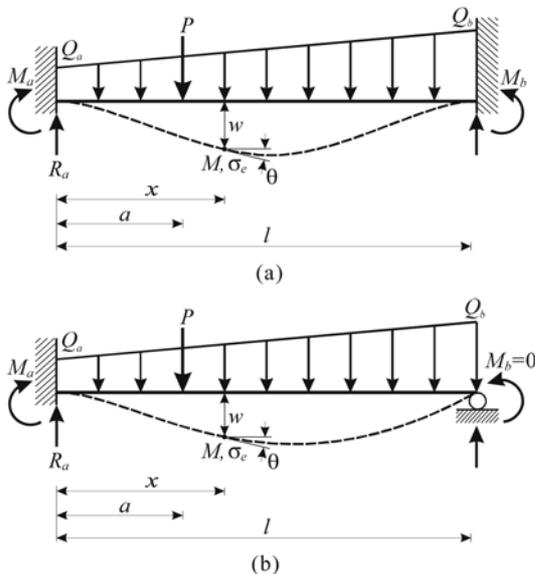


그림 2. (a) 고정-고정 및 (b) 고정-회전 보

미소변형 이론(small deflection theory)에 의한 탄성곡선의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (18)$$

위에서  $E$ 는 보 재료의 탄성계수이다.

식 (18)에 식 (15)를 대입하여 다음 식을 얻는다.

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{(c_1 c_3 l)^2 M}{c_2 E V^2 f^4} \quad (19)$$

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음의 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l} \quad (20)$$

$$\eta = \frac{w}{l} \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{a}{l} \quad (22)$$

$$p = \frac{\pi^2 P l^4}{E V^2} \quad (23)$$

$$q_a = \frac{\pi^2 Q_a l^5}{E V^2} \quad (24)$$

$$q_b = \frac{\pi^2 Q_b l^5}{E V^2} \quad (25)$$

$$r_a = \frac{\pi^2 R_a l^4}{E V^2} \quad (26)$$

$$m_a = \frac{\pi^2 M_a l^3}{E V^2} \quad (27)$$

$$m = \frac{\pi^2 M_a l^3}{E V^2} = m + r_a \xi - \frac{1}{2} q_a \xi^2 + \frac{1}{6} (q_a - q_b) \xi^3, \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (28.1)$$

$$m = \frac{\pi^2 M l^3}{E V^2} = m_a + p \alpha + (r_a - p) \xi - \frac{1}{2} q_a \xi^2 + \frac{1}{6} (q_a - q_b) \xi^3, \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (28.2)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma_e l^{3/2}}{\pi^2 E V^{1/2}} = \frac{(c_1 c_3)^{3/2} m}{\pi^4 c_2 g^3} \quad (29)$$

위의 식에서 길이차원의 ( $x, w, a$ )는 식 (20)~(22)와 같이 시간길이  $l$ 로 정규화 하였고, 하중항인 ( $P, Q_a, Q_b, R_a, M_a, M, \sigma_e$ )는 식 (23)~(29)와 같이 시간길이  $l$ 과 일정체적  $V$ 로 정규화하였다. 따라서 무차원 거동  $\eta, \theta (=d\eta/d\xi), \varepsilon$ 의 값은 기하적 조건 및 하중조건에 상관없이 그 값을 상대적으로 비교할 수 있다.

식 (20)~(29)의 무차원 변수식을 식 (19)에 적용하면 다음과 같이 탄성곡선의 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\xi^2} = -\frac{(c_1 c_3)^2 m}{\pi^2 c_2 g^4} \quad (30)$$

식 (30)에서  $m$ 은 식 (28)과 같고, 식 (29), (30)에서 무차원 형상함수식  $g=g(\xi)$ 는 변단면 종류 별로 다음과 같다.

1) 선형 변단면

$$g = 2(e-1)\xi + 1, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2} \quad (31.1)$$

$$g = 2(e-1)(1-\xi) + 1, \frac{1}{2} \leq \xi \leq 1 \quad (31.2)$$

2) 포물선형 변단면

$$g = 4(e-1)(\xi - \xi^2) + 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (32)$$

3) 정현형 변단면

$$g = (e-1)\sin(\pi\xi) + 1, \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad (33)$$

## 4. 수치해석 방법

### 4.1 중적분법

앞에서 유도한 식 (30)의 미분방정식에는 식 (28)에 보인 바와 같이 미지반력인  $r_a, m_a$ 를 포함하고 있고 평형방정식으로는 이 반력을 풀 수 없다. 이러한 탄성곡선의 미분방정식을 풀기 위하여 이 연구에서는 중적분법(double integration method)을 이용하였다.

식 (30)의 미분방정식을 적분하여 각각  $d\eta/d\xi$ 를 구하고, 미지수인  $r_a, m_a$ 와 적분상수는 보의 경계조건을 이용하여 산정한다.

식 (30)에 식 (28)을 대입하고 적분하여  $d\eta/d\xi$ 식을 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = c_4 \int \frac{m}{g} d\xi = c_4 [m_a i_1 + r_a i_2 - q_a i_3 + (q_a - q_b) i_4 + t_1], \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (34.1)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = c_4 \int \frac{m}{g} dx = c_4 [(m_a + p\alpha) i_1 + (r_a - p) i_2 - q_a i_3 + (q_a - q_b) i_4 + t_2], \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (34.2)$$

위의 식에서  $t_1, t_2$ 는 결정하여야 할 적분상수이고,  $c_4$ 는 무차원 계수로 식 (35.1)과 같고,  $i_1 = i_1(\xi), \dots, i_4 = i_4(\xi)$ 는 적분의 결과로 얻어지는 함수식으로 식 (35.2)~(35.5)와 같다.

$$c_4 = \frac{(c_1 c_3)^2}{\pi^2 c_2} \quad (35.1)$$

$$i_1 = \int \frac{1}{g} d\xi \quad (35.2)$$

$$i_2 = \int \frac{\xi}{g} d\xi \quad (35.3)$$

$$i_3 = \frac{1}{2} \int \frac{\xi^2}{g} d\xi \quad (35.4)$$

$$i_4 = \frac{1}{6} \int \frac{\xi^3}{g} d\xi \quad (35.5)$$

마찬가지로, 식 (34)를 적분하여  $\eta$ 식을 다음과 같이 얻는다.

$$\eta = c_4 \int \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi = c_4 [m_a i_5 + r_a i_6 - q_a i_7 + (q_a - q_b) i_8 + t_1 \xi + t_3], \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (36.1)$$

$$\eta = c_4 \int \left( \frac{d\eta}{d\xi} \right) d\xi = c_4 [(m_a + p\alpha) i_5 + (r_a - p) i_6 - q_a i_7 + (q_a - q_b) i_8 + t_2 \xi + t_4] \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (36.2)$$

위의 식에서  $t_3, t_4$ 는 결정하여야 할 적분상수이고,  $i_5 = i_5(\xi), \dots, i_8 = i_8(\xi)$ 는 적분결과로 얻어지는 함수식으로 식 (37.1)~(37.4)와 같다.

$$i_5 = \int i_1(\xi) d\xi = \int \int \left( \frac{1}{g} d\xi \right) d\xi \quad (37.1)$$

$$i_6 = \int i_2(\xi) d\xi = \int \int \left( \frac{\xi}{g} d\xi \right) d\xi \quad (37.2)$$

$$i_7 = \int i_3(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \int \int \left( \frac{\xi^2}{g} d\xi \right) d\xi \quad (37.3)$$

$$i_8 = \int i_4(\xi) d\xi = \frac{1}{6} \int \int \left( \frac{\xi^3}{g} d\xi \right) d\xi \quad (37.4)$$

### 4.2 반력 및 적분상수의 결정

고정-고정 또는 고정-회전 보에 상관없이 보의 좌단( $x=0$ )은 고정지점이므로  $dw/dx=0, w=0$ 이다. 따라서 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (38)$$

$$\eta = 0, \xi = 0 \text{ 에서} \quad (39)$$

식 (38)을 식 (34.1)식에, 식 (39)를 식 (36.1)에 적용시키면  $\xi=0, i_1(0)=i_2(0)=i_3(0), i_4(0)=0$ , 이므로 적분상수  $t_1, t_3$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$t_1 = 0 \quad (40)$$

$$t_3 = 0 \quad (41)$$

고정-고정 보 및 고정-회전 보에 상관없이 집중하중  $P$ 의 작용점  $x=a$ 에서 회전각  $dw/dx$ 는 양쪽구간에서 구한 값이 서로 같아야 하므로 식 (34.1), (34.2)에  $\xi=a$ 를 대입하여 같다고 놓고 정리하면 식 (42)를 얻을 수 있다. 집중하중 작용점에서 변위  $w$ 는 양쪽구간에서 구한 값이 서로 같아야 하므로 식 (36.1), (36.2)에  $\xi=a$ 를 대입하여 같다고 놓고 정리하면 식 (43)를 얻을 수 있다. 이 때 식 (40), (41)에서  $t_1=t_3=0$ 이므로 이를 대입한다.

$$t_2 = -p[\alpha i_1(\alpha) - i_2(\alpha)] \quad (42)$$

$$t_4 = p[\alpha^2 i_1(\alpha) - \alpha i_2(\alpha) - \alpha i_5(\alpha) + i_6(\alpha)] \quad (43)$$

참고로 이상에서 산정한 적분상수  $t_1 \sim t_4$ 는 고정-고정 보 및 고정-회전 보에 모두 적용된다.

이 연구에서 보의 우단( $x=l$ )은 고정 또는 회전지점이다. 먼저, 고정-고정 보에서는 우단이 고정지점이므로  $dw/dx=0, w=0$ , 이다. 따라서 다음의 무차원 경계조건을 얻는다.

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi = 1 \text{ 에서} \quad (44)$$

$$\eta = 0, \xi = 1 \text{ 에서} \quad (45)$$

식 (34.2) 및 (36.2)에 각각 식 (44), (45)를 적용시키면 다음 식 (46), (47)을 얻을 수 있다.

$$i_1(1)m_a + i_2(1)r_a + d_1 = 0 \quad (46.1)$$

$$d_1 = p[\alpha i_1(1) - i_1(\alpha)] - p[i_2(1) - i_2(\alpha)] - q_a[i_3(1) - i_3(\alpha)] \quad (46.2)$$

$$i_5(1)m_a + i_6(1)r_a + d_2 = 0 \quad (47.1)$$

$$d_2 = p\alpha[(\alpha-1)i_1(\alpha) + i_5(1) - i_5(\alpha)] - p[(\alpha-1)i_2 + i_6(1) - i_6(\alpha)] - q_a i_7(1) + (q_a - q_b) i_8(1) \quad (47.2)$$

다음, 고정-회전 보에서는 우단이 회전지점이므로  $w=0, M_b=0$ 이다. 따라서 위의 식 (47)은 고정-회전 보에서도 만족

한다.  $M_b=0$ 의 조건은 식 (28.2)에  $\xi=1$ 을 대입하고 “0”이라 놓으면 다음과 같은 식으로 얻을 수 있다.

$$r_a + m_a + p(\alpha - 1) + d_3 = 0 \quad (48.1)$$

$$d_3 = -\left(\frac{1}{3}q_a + \frac{1}{6}q_b\right) \quad (48.2)$$

이상의 경계조건으로부터 고정-고정 보의 수직반력  $r_a$ , 모멘트 반력  $m_a$ 는 식 (46), (47)의 연립방정식을 풀어 산출할 수 있고, 고정-회전 보의  $r_a$ ,  $m_a$ 는 식 (47), (48)의 연립방정식을 풀어 산출할 수 있다. 이상과 같이 산출한 반력  $r_a$ ,  $m_a$ 를 지점조건 별로 정리하면 다음과 같다.

• 고정-고정 보

$$r_a = \frac{d_1 i_5(1) + d_2 i_1(1)}{i_1(1) i_6(1) - i_2(1) i_5(1)} \quad (49)$$

$$m_a = -\frac{d_1 + i_2(1) r_a}{i_1(1)} \quad (50)$$

• 고정-회전 보

$$r_a = \frac{d_2 + d_3 i_5(1)}{i_5(1) - i_6(1)} \quad (51)$$

$$m_b = -(r_a + d_3) \quad (52)$$

### 4.3 수치해석 순서

보의 기하적 조건 즉, 변단면 종류(선형 또는 포물선형 또는 정현형 변단면), 지점조건(고정-고정 또는 고정-회전), 정다각형 변수  $n$ , 단면비  $e$  및 하중조건 즉, 집중하중 크기와 작용위치 ( $p$ ,  $\alpha$ ), 사다리꼴 분포하중의 하중강도 ( $q_a$ ,  $q_b$ )가 주어지면,  $i_1 \sim i_8$ 의 적분을 Simpson 공식(신, 2001)을 이용하여 계산하고, 적분상수  $t_1 \sim t_4$  및 수직반력  $r_a$ , 모멘트 반력  $m_a$ 를 구할 수 있다.

따라서 식 (34)로부터 회전각  $\theta = d\eta/d\xi$ 를 구할 수 있고, 식 (36)으로부터 변위  $\eta$ 를 산정할 수 있다. 한편 휨 모멘트  $m$ 은 식 (28)로부터 구할 수 있으므로  $m$ 식을 포함하고 있는 식 (29)의 연응력  $\varepsilon$ 은 대수적으로 산정할 수 있다. 이러한 보의 거동값을 이용하면 이 연구에서 최종 목표로 하는 최강보의 최적단면비를 산정할 수 있다. 이를 위하여 수치해석 과정을 FORTRAN어로 컴퓨터 프로그램하였다.

## 5. 수치해석 예 및 토의

작성된 프로그램을 이용하여 보의 기하적 조건 및 하중조건에 대한  $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\varepsilon$ 을 산정하였다. 이 결과를 이용하면 최강단면비를 산정할 수 있다. 먼저, “선형 변단면, 고정-고정 보, 정사각형 단면( $n=4$ ), 집중하중  $p=1$ , 하중위치  $\alpha=0.4$ ”인 보의 최강단면비 산정과정을 그림 3, 4를 통하여 수치적으로 설명한다.

위에서 정의된 보의 단면비를  $e=2$ 로 채택하고 변위  $\eta$ , 회전각  $\theta$  및 연응력  $\varepsilon$ 의 거동값을 계산하고 이를 “( $\eta$ ,  $\theta$  및  $\varepsilon$ )- $\xi$  곡선”으로 나타내면 그림 3과 같다. 이 그림에서는 거동값의 최대값을 판정하기 위하여  $\eta$ 를 수평축( $\xi$ )의 위쪽에 표시하였고,  $\theta$ ,  $\varepsilon$ 은 절대값을 취하여 “-”값도 모두 “+”값으로 표시하였다. 이 그림으로부터  $\blacksquare$ 로 표시한 최대거동값을 읽으면  $\eta_m=0.00714$ ,  $\theta_m=0.0266$ ,  $\varepsilon_m=0.0334$ 이다.

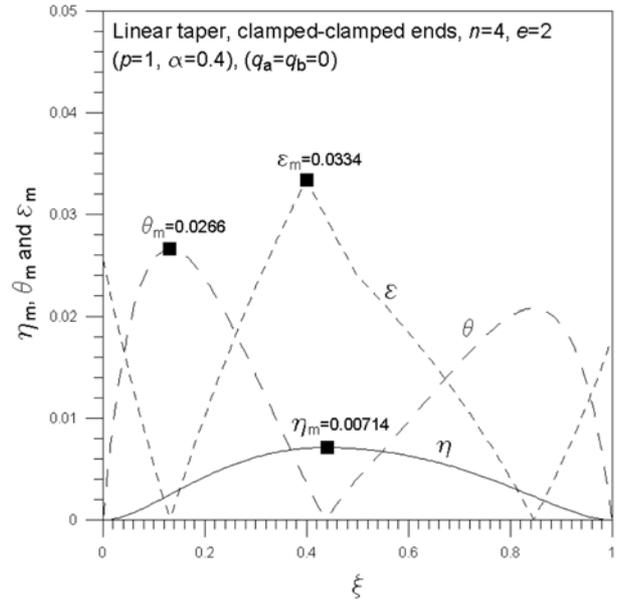


그림 3. ( $\eta$ ,  $\theta$  및  $\varepsilon$ ) -  $\xi$  곡선

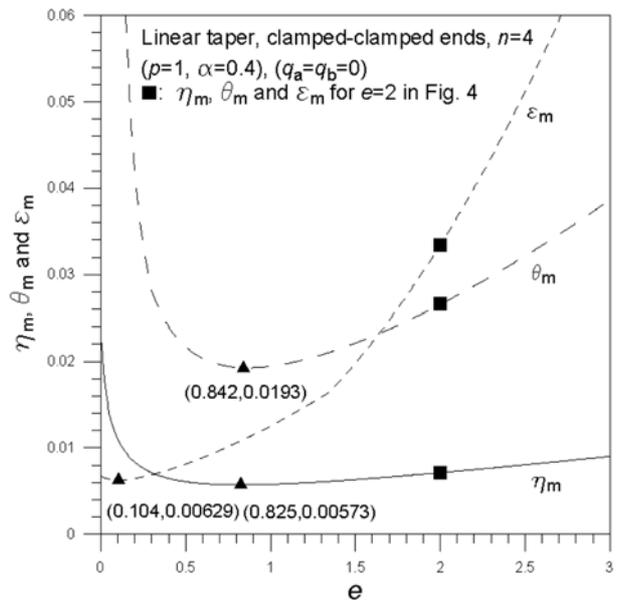


그림 4. ( $\eta_m$ ,  $\theta_m$  및  $\varepsilon_m$ ) -  $e$  곡선

이상과 같은 방법으로 찾은 최대거동값 ( $\eta_m$ ,  $\theta_m$ ,  $\varepsilon_m$ )을 단면비  $e$ 값을 변화시키면서 산정하고 이를 “( $\eta_m$ ,  $\theta_m$  및  $\varepsilon_m$ )- $e$  곡선”으로 나타내면 그림 4와 같다. 그림 3에서  $\blacksquare$ 로 표시한  $e=2$ 에서 최대거동값 ( $\eta_m$ ,  $\theta_m$ ,  $\varepsilon_m$ )을 그림 4에서도 역시  $\blacksquare$ 로 표시하였다. 이 그림에서 최대거동값이 최소가 되는 단면비 및 최대거동값의 최소값을 찾을 수 있다. 이러한 조건을 만족하는 보를 “최강보”라 하며(이 등, 2009), 이때의 단면비를 “최강단면비”라 하고  $e_{st}$ 로 표시한다.  $e_{st}$ 에 대응하는 최대거동값의 최소값을 각각 ( $\eta_{m,m}$ ,  $\theta_{m,m}$ ,  $\varepsilon_{m,m}$ )으로 표시한다. 이후 이를 간단히 “최소거동값”으로 표기한다. 이 그림에 최강보에 대한  $e_{st}$ 와 최소거동값을  $\blacktriangle$ 로 표시하였다. 따라서  $\blacktriangle$ 로 표시한 좌표값을 읽으면 최강보의  $e_{st}$  및 ( $\eta_{m,m}$ ,  $\theta_{m,m}$ ,  $\varepsilon_{m,m}$ )을 얻을 수 있다. 즉, 그림 4의 상단에 표시한 “선형 변단면, 고정-고정 보, 정사각형 단면( $n=4$ ),  $p=1$ ,  $\alpha=0.4$ ”인 보의 변위( $\eta$ )에 대한  $e_{st}=0.825$ , 회전각( $\theta$ )에 대한  $e_{st}=0.842$ , 연응력( $\varepsilon$ )에 대한  $e_{st}=0.104$ 이며, 이  $e_{st}$ 들에 대응하는  $\eta_{m,m}=0.00573$ ,  $\theta_{m,m}=0.0193$ ,  $\varepsilon_{m,m}=0.00629$ 이다.

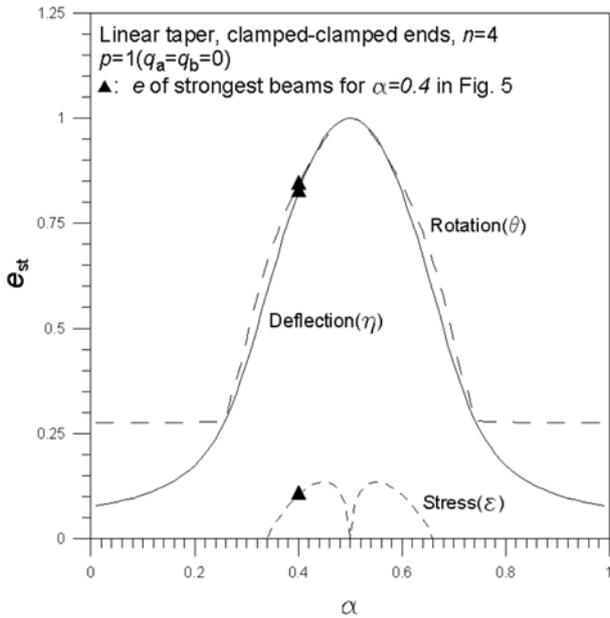


그림 5.  $e_{st} - \alpha$  곡선(선형 변단면)

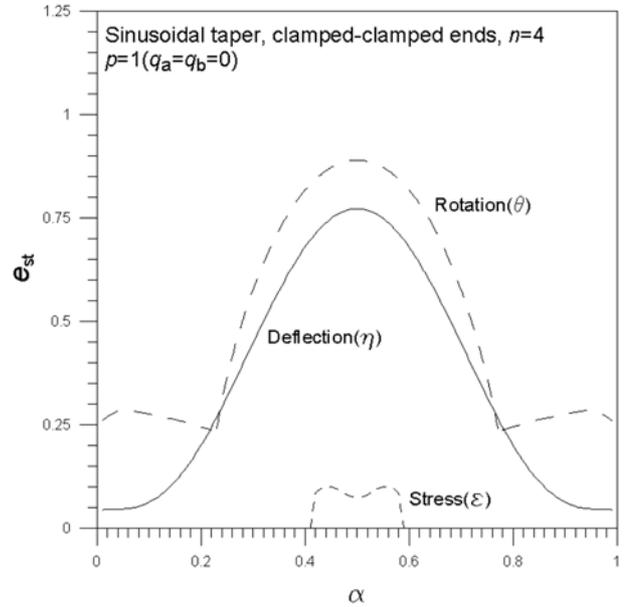


그림 7.  $e_{st} - \alpha$  곡선(정현형 변단면)

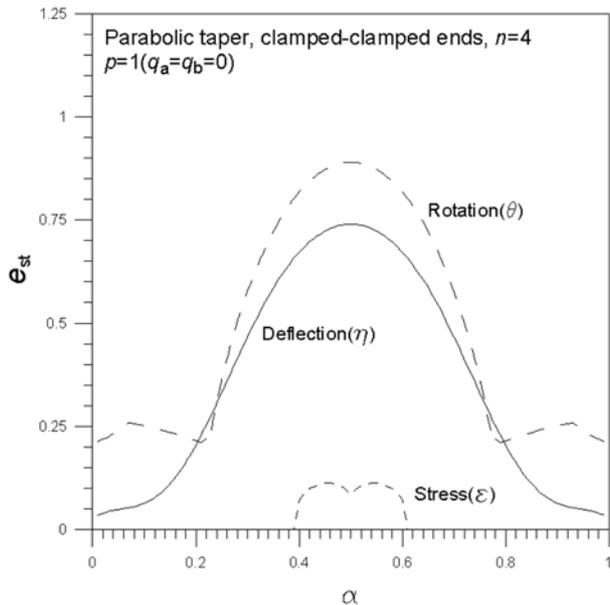


그림 6.  $e_{st} - \alpha$  곡선(포물선형 변단면)

이 연구에서는 미소처짐 이론을 이용하여 탄성곡선식을 유도했기 때문에 중첩의 원리가 적용된다. 따라서 그림 4에서 적용하중이 “ $p=1$ ”임에도 최강단면비  $e_{st}$ 는  $p$ 의 크기에 상관없이 모두 같고, ( $\eta_{m,m}$ ,  $\theta_{m,m}$ ,  $\epsilon_{m,m}$ )값은 위에서 기술한 값에 단순히 새로운  $p$  값을 곱해주면 된다.

이와 같은 방법으로 정사각형 단면( $n=4$ ), 고정-고정 보, 집중하중  $p=1(q_a=q_b=0)$ 의  $e_{st}$ 를 값을 변화시키며 산정하고 이를 그림 5(선형 변단면), 그림 6(포물선형 변단면) 및 그림 7(정현형 변단면)에 각각 “ $e_{st}-\alpha$  곡선”으로 나타내었다. 독자의 이해를 돕기 위하여 앞의 그림 4에서 ▲로 표시한  $\alpha=0.4$ 의  $e_{st}$ 값을 그림 5(선형 변단면)에서도 역시 ▲로 표시하였다. 최강단면비  $\alpha=0.4$ 는 일반적으로 하중위치  $\alpha$ 가 보 중앙에 위치할수록 더 큰 값을 가지며 중앙에서 최대가 된다. 그러나 연응력  $\epsilon$ 의  $e_{st}$ 는 보의 중앙에서 오히려 감소한다. 연응력의  $e_{st}$ 는 이론적으로 “0”의 값이 존재하는데 이는 실제 구조물에서는 실용적이지 못하다. 따라서 다른 제약조

표 1. 정다각형 변수( $n$ ) 별 최강단면비 및 최소거동값 (선형 변단면, 고정-고정 보)

(1) 집중하중 ( $p=1, \alpha=0.4$ )

	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\epsilon$ )	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\epsilon_{m,m}$
3	0.825	0.00496	0.842	0.01669	0.104	0.00676
4	0.825	0.00573	0.842	0.01927	0.104	0.00629
5	0.825	0.00590	0.842	0.01985	0.104	0.00594
$\infty^*$	0.825	0.00600	0.842	0.02018	0.104	0.00526

(2) 등분포하중( $q_a=q_b=1$ )

	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\epsilon$ )**	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\epsilon_{m,m}$
3	0.625	0.00258	0.647	0.00783	0.000	0.00226
4	0.625	0.00298	0.647	0.00905	0.000	0.00210
5	0.625	0.00307	0.647	0.00931	0.000	0.00198
$\infty^*$	0.625	0.00312	0.647	0.00947	0.000	0.00175

(3) 삼각형분포하중( $q_a=0, q_b=1$ )

	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\epsilon$ )**	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\epsilon_{m,m}$
3	0.622	0.00129	0.619	0.00406	0.000	0.00150
4	0.622	0.00149	0.619	0.00469	0.000	0.00140
5	0.622	0.00154	0.619	0.00482	0.000	0.00132
$\infty^*$	0.622	0.00157	0.619	0.00491	0.000	0.00117

(4) 조합하중( $p=1, \alpha=0.4, q_a=0.5, q_b=1$ )

	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\epsilon$ )	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\epsilon_{m,m}$
3	0.758	0.00689	0.824	0.02263	0.0630	0.00849
4	0.758	0.00795	0.824	0.02613	0.0630	0.00790
5	0.758	0.00819	0.824	0.02691	0.0630	0.00746
$\infty^*$	0.758	0.00833	0.824	0.02736	0.0630	0.00660

\* $n=\infty$ : 원형 단면

\*\*분포하중: 연응력( $\epsilon$ )에 대한 최강단면비는 “0”이어서 실용적이지 못함.

건을 만족하는 범위에서  $e_{st}$ 를 “0”에 가깝게 설계하는 것이 합리적이다.

그림 5-7에서는 정삼각형 단면( $n=4$ )에 대한 집중하중의  $e_{st}$ 만을 나타내었으나, 정사각형 단면 이외의 정다각형 단면, 등분포하중, 삼각형 분포하중의  $e_{st}$ 와 ( $\eta_{m,m}$ ,  $\theta_{m,m}$ ,  $\varepsilon_{m,m}$ )도 매우 중요하다. 이러한 관점에서 표 1에 선형 변단면, 고정-고정 보에 대한 집중하중( $p=1$ ,  $\alpha=0.4$ ), 등분포하중( $q_a=q_b=1$ ), 삼각형분포 하중( $q_a=0$ ,  $q_b=1$ ) 및 조합하중( $p=1$ ,  $\alpha=0.4$ ,  $q_a=0.5$ ,  $q_b=1$ )의  $e_{st}$ 와 ( $\eta_{m,m}$ ,  $\theta_{m,m}$ ,  $\varepsilon_{m,m}$ )을 정다각형 변수( $n$ ) 별로 수록하였다. 이 표 1에서와 같이 정다각형의 변수  $n$ 은  $e_{st}$ 값에 영향을 미치지 않는다. 즉,  $n$ 값 이외의 다른 조건이 같으면  $e_{st}$ 값은 모두 동일하다. 그러나 최소거동값에는 큰 차이를 보이고 있다. 예로서 (1)의 집중하중에서 원형 단면( $n=\infty$ )의  $n_{m,m}$ 은 정삼각형 단면( $n=3$ )에 비하여 1.21(=0.00600/0.00496)로 약 21%의 변위( $\eta$ )의 증가를 초래한다. 즉,  $n$ 값이 작을수록 변위에 대하여 유리하다. 회전각( $\theta$ )도 마찬가지로  $n$ 값이 작을수록 유리하다. 그러나 연응력( $\varepsilon$ )에 대해서는  $n$ 값이 클수록 유리하다. 즉, 정삼각형 단면의  $\varepsilon_{m,m}$ 은 원형 단면에 비하여 1.29(=0.0067/0.00526)로 약 29%의 연응력의 증가를 초래한다. 따라서 변위와 회전각을 기준으로

하는 설계에서는 정삼각형 단면이 유리하고, 연응력에 대해서는 원형 단면이 유리하다.

표 2는 변단면 종류가  $e_{st}$  및 최소거동값에 미치는 영향을 보이기 위하여 변단면 종류 별로  $e_{st}$  및 최소거동값을 산정하고 이를 수록한 표이다. 보의 기하적 조건은 고정-회전 보, 정사각형 단면( $n=4$ )이고 하중조건은 모두 4가지이다. (4)번째 하중은 조합하중의 예를 보이기 위하여 집중하중( $p=1$ ,  $\alpha=0.5$ )과 사다리꼴 분포하중( $q_a=1$ ,  $q_b=0.5$ )이 동시에 재하되는 예를 채택하였다. 이 표와 같이 변위( $\eta$ )의  $e_{st}$ 는 선형>정현형>포물선형 변단면의 순서로 크고, 연응력( $\varepsilon$ )에 대하여는 그 반대이다. 변위( $\eta$ )의 최소거동값( $\eta_{m,m}$ )은 선형<정현형<포물선형 변단면의 순서로 작고, 연응력( $\varepsilon_{m,m}$ )에 대하여는 그 반대이다. 따라서 변위를 기준으로 하는 설계에서는 선형 변단면이 유리하고, 연응력을 기준으로 하는 설계에서는 포물선형 변단면이 유리하다.

## 6. 결 론

이 논문은 일정체적의 정다각형 중실 단면을 갖는 최강보에 관한 연구이다. 이러한 보에 집중하중과 만재 사다리꼴 분포하중이 작용할 때 탄성곡선의 미분방정식을 유도하고 이를 수치해석하여 보의 정적거동을 산정하였다. 수치해석 예에서는 고정-고정 보 및 고정-회전 보를 채택하였고, 단면깊이의 형상함수로는 선형, 포물선형 및 정현형 함수를 채택하였다.

이 연구에서 얻은 수치해석 예를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

1. 변단면 종류가 같을 때 정다각형의 변수( $n$ )에 상관없이 최강단면비는 모두 같다.
2. 변위( $\eta$ )와 회전각( $\theta$ )에 대한 최강보는 정다각형의 변수가 작을수록 유리하고, 연응력에 대해서는 변수가 클수록 유리하다.
3. 변위에 대한 최강보는 선형, 정현형, 포물선형 변단면의 순서로 유리하다. 이 결과는 일정체적 단순지지 최강보(이 등, 2009)의 결과와는 반대가 되는 경향을 보이는 것이다.
4. 연응력에 대한 최강보는 포물선형, 정현형, 선형 변단면의 순서로 유리하다.
5. 연응력에 대한 최강단면비는 “0”이거나 “0”에 가까운 경우에는 실용적이지 못하므로 다른 제약조건을 만족하는 범위에서 “0”에 가까운 값을 채택하는 것이 바람직하다.

이 논문의 결과는 집중하중, 등분포, 삼각형 분포, 사다리꼴 분포하중 및 조합하중이 작용하는 보의 최소중량 설계에 유용한 자료를 제공할 수 있다.

## 참고문헌

- 신성철(2001) 변단면 연속보의 자동화 해석, 석사학위논문, 원광대학교 대학원.
- 이병구, 이태은, 김영일(2009) 일정체적 단순지지 최강보. **대한토목학회논문집**, 대한토목학회, 제29권, 제2A호, pp. 155-162.
- Atanackovic, T.M. and Simic, S.S. (1999) On the optimal shape of a Pflüger column. *European Journal of Mechanics A-Solid*, Vol. 18, pp. 903-913.
- Carnahan, B., Luther, H.A., and Wilkes, J.O. (1969) Applied

표 2. 변단면 종류 별 최강단면비 및 최소거동값  
(고정-회전 보,  $n=4$ )

(1) 집중하중( $p=1$ ,  $\alpha=0.5$ )

종류	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\varepsilon$ )*	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\varepsilon_{m,m}$
선형	1.450	0.01080	0.907	0.03784	0.000	0.00839
포물선형	1.187	0.01123	0.869	0.03763	0.106	0.00458
정현형	1.267	0.01115	0.876	0.03767	0.094	0.00509

(2) 등분포하중( $q_a=q_b=1$ )

종류	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\varepsilon$ )*	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\varepsilon_{m,m}$
선형	1.139	0.0655	0.744	0.02443	0.000	0.00420
포물선형	0.979	0.0658	0.775	0.02446	0.023	0.00203
정현형	1.015	0.0658	0.773	0.02443	0.010	0.00239

(3) 삼각형분포하중( $q_a=0$ ,  $q_b=1$ )

종류	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\varepsilon$ )*	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\varepsilon_{m,m}$
선형	1.173	0.00367	0.754	0.01468	0.000	0.00210
포물선형	1.070	0.00370	0.800	0.01479	0.061	0.00115
정현형	1.099	0.00369	0.796	0.01475	0.047	0.00126

(4) 조합하중( $p=1$ ,  $\alpha=0.5$ ,  $q_a=1$ ,  $q_b=0.5$ )

종류	변위( $\eta$ )		회전각( $\theta$ )		연응력( $\varepsilon$ )*	
	$e_{st}$	$\eta_{m,m}$	$e_{st}$	$\theta_{m,m}$	$e_{st}$	$\varepsilon_{m,m}$
선형	1.344	0.01558	0.851	0.05513	0.000	0.01154
포물선형	1.100	0.01601	0.833	0.05480	0.081	0.00605
정현형	1.164	0.01595	0.837	0.05484	0.058	0.00674

\*연응력( $\varepsilon$ )에 대한 최강단면비는 “0”이거나 “0”에 가까운 실용적이지 못함.

- numerical methods. *John Wiley & Sons*, USA.
- Cox, S.J. and Overton, M.I. (1992) On the optimal design of columns against buckling. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, Vol. 23, pp. 287-325.
- Haftka, R.T., Grudal, Z., and Kamat, M.P. (1990) Elements of structural optimization. *Klüwer Academic Publisher*, Dordrecht.
- Keller, J.B. (1960) The shape of the strongest column. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 5, pp. 275-285.
- Keller, J.B. and Niordson, F.I. (1966) The tallest column. *Journal of Mathematics and Mechanics*, Vol. 16, pp. 433-446.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Ahn, D.S. (2005) Elastics and buckling loads of shear deformable tapered columns. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.
- Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E., and Kim, I.J. (2006) Buckling loads of columns with constant volume. *Journal of Sound and Vibrations*. Vol. 294, Issues. 1-2, pp. 381-387.
- Lee, B.K. and Oh, S.J. (2000) Elastica and buckling loads of simple tapered columns with constant volume. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, Issue 18, pp. 2507-2518.
- Taylor, J.E. (1967) The strongest column-energy approach. *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 34, pp. 486-487.
- Wilson, J.F., Holloway, D.M., and Biggers, S.B. (1971) Stability experiments on the strongest columns and circular arches. *Experimental Mechanics*, Vol. 11, pp. 303-308.

(접수일: 2009.2.25/심사일: 2009.4.15/심사완료일: 2009.4.26)