

분할행렬법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산

Computation of Wave Propagation over Multi-Step Topography by Partition Matrix Method

서승남*

Seo, Seung-Nam

Abstract

In order to reduce computing time significantly for a large matrix in EFEM of linear waves propagation over ripple beds, each of which is approximated to a multi-step topography, a partition method is presented to calculate reflection coefficients. By use of 10 evanescent modes in the model, the most accurate numerical solutions have been obtained up to date, which show different behaviors of computed reflection coefficient in some cases against the existing results. Both computing time and memory of the present partition model for solving a large matrix are still so much demanding that it is needed to develop an efficient method.

Keywords : wave propagation, multi-step topography, eigenfunction expansion method, partition method, reflection coefficient

요 지

다중 계단으로 근사한 시주지형 위를 지나는 선형 파랑전파에 대한 고유함수 전개법에서 크기가 큰 행렬을 풀 때 계산시간을 상당히 단축하기 위하여 분할행렬법을 사용하여 반사율을 계산하였다. 본 모형에 10개의 억류파를 사용하여 현재까지 가장 정밀한 수치해를 구하였고 구한 반사율의 거동은 몇 경우에서 기존 결과와 다름을 보였다. 크기가 큰 행렬을 풀 때 본 분할행렬법의 계산시간과 기억용량은 여전히 커서 효율적인 방법에 대한 개발이 요구된다.

핵심용어 : 파랑전파, 다중 계단지형, 고유함수 전개법, 분할행렬법, 반사율

1. 서 론

임의지형을 다수의 작은 계단지형으로 근사하면 고유함수 전개법(EFEM, eigenfunction expansion method)을 사용하여 파랑변형을 계산할 수 있다. 지배방정식을 근사적으로 유도한 환경사 파랑식(Berkhoff, 1972; Simth 등 1975; Massel, 1993; Athanassoulis 등, 1999)과 달리 Laplace 미분식과 선형 경계조건으로부터 얻어지는 고유함수를 이용하여 해를 구성하는 고유함수 전개법은 진행파(propagating wave) 성분과 억류파(evanescent wave) 성분의 결합으로 이루어져 억류파 성분의 개수를 늘리면 엄밀해로 수렴하게 된다. 이러한 특성 때문에 EFEM을 이용한 파랑변형 특히 반사율과 투과율을 계산한 기존 연구는 상당히 많다(Takano, 1960; Kirby 등, 1983; Guazzelli 등, 1992; 조 등, 1999; Bender 등 2003; 서승남 2008a). 한편 EFEM을 적용하기 위해서는 임의지형을 계단지형으로 근사하여야 하며 충분히 많은 억류파 성분을 갖는 경우 계산의 오차는 계단지형으로의 근사에 의해서만 발생하게 된다. 그러므로 계단의 개수가

충분히 많으면 계산오차는 무시할 수 있는 정밀한 값을 얻을 수 있다.

단일 계단에 EFEM을 적용하여 계산할 경우 수심이 일정한 각각의 구역에서 한 개의 진행파와 억류파의 개수는 N 개로 절단하게 되므로 $N+1$ 개의 미지수가 생긴다. 이 미지수를 정하기 위해 내부 경계에서 정합조건을 이용하며 이로부터 $2N+2$ 개의 연립방정식이 형성된다. 만일 임의의 지형을 M 개의 내부 경계를 갖는 다수의 계단으로 근사하게 되면 미지수 또는 연립방정식의 개수는 $2M(N+1)$ 개가 된다. 그러므로 M 과 N 이 증가하게 되면 미지수의 개수가 이들의 곱에 비례하여 증가하게 되고 기억용량은 미지수의 제곱에, 연산수는 3승에 각각 비례하게 됨으로 기억용량과 계산시간이 EFEM의 가장 큰 제약이 된다.

이 제약을 완화하기 위한 방법으로 변분근사법이 제안되었다(Miles, 1967; Devillard 등, 1988). 이 방법은 억류파를 진행파로 근사하기 위해 변분형태를 사용하며 따라서 미지수는 진행파의 개수만큼만 존재하므로 연립방정식의 개수가 상당히 줄어든다. 그러나 이 방법은 근사적인 기법이며 다수

*정회원 · 한국해양연구원 연안개발에너지연구부 책임연구원 (E-mail : snseo@kordi.re.kr)

계단지형에서 역류파를 포함한 결과는 현재까지 존재하지 않는다. 한편 진행파만을 사용한 변분근사법을 다수 계단지형에 적용한 연구로는 O'Hare 등(1992, 1993)과 서승남(2008b)을 들 수 있다.

인접 계단에서 생성되는 역류파의 영향을 무시할 수 없는 경우 충분한 개수의 역류파가 EFEM에 포함되어야 한다. 두 개의 정현파가 중첩된 일련의 사주지형에 대한 반사율을 계산한 Guazzelli 등(1992)이 보인 바와 같이 3개의 역류파를 포함한 결과와 역류파를 제외한 평면파 근사의 결과에는 상당한 차이가 있다. 그러므로 Guazzelli 등의 결과로부터 두 개의 정현파가 중첩된 지형의 경우 O'Hare 등의 결과는 수리실험 결과와도 상당한 차이를 보여 부정확하다. 또한 동일한 정현파 4개로 구성된 사주지형에 대해 800개 계단을 사용한 조 등(1999)과 401 계단을 사용한 서승남(2008b)은 역류파 4개를 같이 사용하여 계산한 반사율은 거의 같고 특히 사주의 파장과 입사파장이 거의 같은 부근에서 O'Hare 등의 결과와 상당한 차이를 보인다.

기존 연구를 종합하면 EFEM의 계산제약에 의해 모든 기존 연구들은 역류파의 개수를 4개 이하로 정하였다. 이를 분석하면 기존 연구에서는 계단의 개수를 늘리면 인접 계단과 수심의 차(즉 계단의 단차)가 작아 역류파의 영향이 크지 않기 때문에 작은 수의 역류파를 사용할 수 있다는 관점을 반영한 것으로 해석할 수 있다. 조 등(1999)과 서승남(2008b)의 결과를 분석하면 계단의 개수 보다는 오히려 역류파의 개수가 해의 정밀도를 좌우하는 경우도 존재함을 암시한다. 즉 일정한 개수의 역류파를 사용하나 계단의 개수를 증가시키는 경우 계단 개수가 일정 수를 넘게 되면 이로 인한 계산의 변화는 거의 없다. 한편 해에 영향을 주는 매개 변수는 계단의 수와 역류파의 수를 상징할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 역류파의 개수에 따른 결과의 변화에 초점을 둔 수치실험을 시도하였다.

EFEM으로부터 구성된 연립방정식을 기존 연구에서는 LU decomposition과 같은 방법으로 해를 구하나 본 논문에서는 계산시간의 단축을 위해 새로운 분할 행렬기법을 적용하였다. 한편 Guazzelli 등(1992)이 밝힌 바와 같이 그들은 계산의 제약을 완화하기 위해 주어진 사주지형에서 동일한 주기를 갖는 수개의 지형으로 분리하여 풀고 이를 접합하는 근사적인 방법을 사용하였다. 그러나 본 논문에서 전체 지형을 동일한 폭의 계단으로 나누어 계산하는 보다 정밀한 방법을 사용하여 기존 결과들을 검증하고자 한다.

2. EFEM의 해

계단형 지형은 수심이 일정한 구역으로 구분할 수 있고 임의의 한 구역에서 파랑의 선형 운동은 시간의존 함수($e^{-i\omega t}$)를 분리한 속도 포텐셜 $\tilde{\phi}(x,y,z)$ 을 이용하여 Laplace 미분식의 해로 나타낼 수 있다. 좌표계의 원점은 정지해면 상에 위치하며 축은 상향을 양의 방향으로 정한 오른손 좌표계를 사용한다. 구역 i 는 경계선 x_{i-1} 과 x_i 사이에 위치하며 수심은 h 로 표기한다.

$$\nabla^2 \tilde{\phi} + \tilde{\phi}_{zz} = 0, -h < z < 0 \quad (1)$$

$$\tilde{\phi}_z - \frac{\omega^2}{g} \tilde{\phi} = 0, z = 0 \quad (2a)$$

$$\tilde{\phi}_z = 0, z = -h \quad (2b)$$

$$\tilde{\phi}_x = 0 \text{ 계단의 직벽에서} \quad (2c)$$

여기서 각주파수는 $\omega = 2\pi/T_w$ 로 정의된 주기 T_w 의 함수이며 g 는 중력가속도이다. 식 (2)는 경계조건으로 해면과 해저면에서 각각 정의된다. 그리고 한정된 크기의 속도포텐셜을 얻기 위해서는 방사조건이 부가된다.

구역 1에서 파수는 k_1 으로 표기하고 여기서 입사각 θ_1 인 사각입사의 경우 y 방향의 파수 $b = k_1 \sin \theta_1$ 이 된다. 만일 지형의 변화가 없다면 b 는 일정한 상수로 y 방향 함수는 진행파 형태인 e^{iby} ($b > 0$) 가 되므로 지배방정식은 식 (3)으로 변형된다.

$$0 = \tilde{\phi}_{xx} + \tilde{\phi}_{yy} + \tilde{\phi}_{zz} = \phi_{xx} - b^2 \phi + \phi_{zz} \quad (3)$$

식 (3)과 관련된 경계조건은 식 (2)에 $\tilde{\phi} = \phi(x,z)e^{iby}$ 를 대입하면 얻어지며 동일한 형태를 유지한다.

미분방정식 (3)과 상응하는 경계조건식 (2)는 변수분리법을 이용하여 해를 구할 수 있고 미분방정식이 선형이므로 구역에서의 해는 고유함수들의 일차결합으로 나타낼 수 있다.

$$\phi_i = \begin{cases} (p_i^+ + p_i^- e^{-2ia_{i,0}x}) e^{ia_{i,0}x} \cosh k_{i,0}(z+h) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [s_{i,j}^+ e^{-a_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{a_{i,j}(x-x_i)}] \cos k_{i,j}(z+h), k_{i,0} \neq b \\ (p_i^+ + \bar{p}_i^- x) \cosh k_{i,0}(z+h) \\ + \sum_{j=1}^{\infty} [s_{i,j}^+ e^{-a_{i,j}(x-x_{i-1})} + s_{i,j}^- e^{a_{i,j}(x-x_i)}] \cos k_{i,j}(z+h), k_{i,0} = b \end{cases} \quad (4a)$$

$$\omega^2 = \begin{cases} gk_{i,0} \tanh k_{i,0} h \\ -gk_{i,n} \tan k_{i,n} h, n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4b)$$

여기서 구역 i 의 파수 $k_{i,n}$ ($n=0, 1, 2, \dots$)는 파랑 분산식 (4b)로부터 계산한다. 식 (4a) 우변에 존재하는 진행파와 관련된 미지상수는 p , 역류파의 미지상수는 s 를 이용하여 각각 표기하였다. 따라서 해를 구하는 문제는 미지상수를 구하는 문제로 바뀌고 이는 다음의 정합조건을 이용하여 계산한다. 그리고 식 (4a)에서 역류파의 개수는 무한개이나 수치계산에서는 이를 N 개로 국한한다.

해석의 편의상 정의구역을 구분하여 구역별로 해를 분리하여 각각 구하였기 때문에 내부경계에서는 각 구역에서 구한 유속(kinematics)과 압력(dynamics)이 동일해야 하는 정합조건을 부여한다. 경계면 위에 존재하는 수입자는 경계면과 같은 운동을 하기 때문에 운동학 정합조건은 식 (5a)로 그리고 경계면에서 압력이 연속이어야 하는 동역학적 조건은 선형 Bernoulli 식을 이용한 식 (5b)로 각각 부여할 수 있다.

$$\frac{\partial \phi_{i-1}}{\partial x} = \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \quad (5a)$$

$$\phi_{i-1} = \phi_i \quad (5b)$$

본 논문에서의 입사파랑은 좌측 또는 우측 한 방향으로만 주어지는 것으로 가정한다. 만일 입사 파랑이 좌측에서 우측

으로 진행하면 좌측 첫 구간에서는 $p_1^+ = 1, s_{1,j}^+ = 0$ 로 각각 설정한다. 이 경우 마지막 구역 $M+1$ 에서는 위에서 좌로 진행되는 파랑이 존재하지 않기 때문에 $p_{M+1}^- = 0, s_{M+1,j}^- = 0$ 이 된다. 이들을 제외한 모든 구역에서의 $p_i^\pm, p_{i,j}^\pm$ 는 미지상수로 식 (5)의 정합조건을 이용하여 계산한다. 따라서 M 개 내부경계에 구성된 다수의 계단지형에는 $M(2+2N)$ 개의 미지상수가 존재한다.

연립방정식을 구성하기 위해 식 (5a)의 경우 수심이 깊은 구역의 고유함수를 곱하고 식 (5b)에는 수심이 낮은 고유함수를 곱해 이를 낮은 수심을 기준으로 하여 해면까지 적분하는 Kirby 등(1983)의 방법을 사용하였다. 운동학 정합조건인 식 (5a)에는 내부경계의 직벽에 부여된 불투과 경계조건을 이용하면 적분 하한은 깊은 수심으로 확장할 수 있다. 식 (5)로부터 $2N+2$ 개의 연립방정식이 만들어지고 이를 모든 내부경계에 적용한다. 그러면 미지상수와 동일한 개수의 연립방정식이 구성됨으로 미지상수를 얻을 수 있다.

계산된 미지상수로부터 물리적 의미가 있는 투과율 K_T 과 반사율 K_R 을 구할 수 있다. 투과율과 반사율은 진행파인 투과파고와 반사파고를 입사파고로 각각 나눈 값으로 정의되고 식 (4)로 표현된 속도포텐셜을 해면함수 η 로 나타내면 식 (6)가 된다.

$$\eta_i(x) = \frac{i\omega}{g} \phi_i(x, 0) \quad (6)$$

식 (6)에 절대값을 취하면 진폭을 얻는다. 좌측에서 입사하는 파랑의 경우 반사율과 투과율은 식 (7)이 된다($N_r=M+1$).

$$K_R = \left\{ \begin{array}{l} p_i^- \\ 1 \end{array} \right\}, K_T = \left\{ \begin{array}{l} p_{N_r}^+ \\ 0 \end{array} \right\}, \frac{\cosh k_{N_r,0} h_{N_r}}{\cosh k_{1,0} h_1}, \text{Im}(a_{N_r,0}) = 0, \text{Re}(a_{N_r,0}) = 0 \quad (7)$$

계산된 미지상수를 검증하기 위한 한 방법으로 에너지 보존을 이용한다. 이로부터 반사율과 투과율의 관계식이 얻어진다.

$$1 = K_R^2 + K_T^2 \frac{k_{1,0}^2 a_{N_r,0}^2 n_{N_r}}{k_{N_r,0}^2 a_{1,0}^2 n_1} \quad (8)$$

여기서 $n_i = Cg_i/C_i$ 로 정의되며 Cg 는 군속도, C 는 파속을 의미한다.

3. 분할 행렬법

제 2절에서 구성된 연립방정식을 행렬 A , 미지상수 벡터 x 그리고 경계조건으로부터 생성된 벡터 r 로 나타내면 식 (9)가 된다.

$$Ax=r \quad (9)$$

식 (9)의 해를 구하기 위해서 A 를 LU 분해하고 전방치환과 후방치환을 이용하는 방법은 기존의 방법이다. 한편 식 (9)의 연립방정식을 살펴보면 좌우 외곽경계에서는 $3(N+1)$ 개의 미지수와 $2(N+1)$ 개의 방정식이 형성되는 반면에 내부경계가 하나 증가하면 $4(N+1)$ 개의 미지수와 $2(N+1)$ 개의 방정식이 새로이 만들어진다. 이와 같이 새로운 미지수와 방정식이 추가되는 경우 분할행렬법을 이용하면 계산시간의 단

축되는 장점이 있다.

식 (9)의 행렬 A 에서 일부 원소들로 구성되는 행렬의 행렬(block matrix)을 식 (10)으로 표현하고 이의 역행렬 B 를 분할행렬법으로 구하고자 한다.

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (10)$$

여기서 A_{11}^{-1} 이 존재하는 것으로 간주하며 A 는 n 차 정방행렬, A_{11}, A_{22} 는 각각 p, q 차 정방행렬이고 $n=p+q$ 이다. 그러면 A_{12} 와 A_{21} 는 각각 $p \times q$ 행렬, $q \times p$ 행렬이 되고 B_{ij} 는 A_{ij} 와 동일한 개수의 행과 열을 갖는 행렬을 의미한다. 또한 가정으로부터 $AB=BA$ 이고 이들은 n 차 단위행렬이 된다. $AB=I$ 로부터 식 (11.a)와 (11.b)를 얻게 되고

$$A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} = I_p \quad (11.a)$$

$$A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} = 0 \quad (11.b)$$

$BA=I$ 로부터는 식 (11.c)와 (11.d)를 얻을 수 있다.

$$B_{21}A_{11} + B_{22}A_{21} = 0 \quad (11.c)$$

$$B_{21}A_{12} + B_{22}A_{22} = I_q \quad (11.d)$$

식 (11)에서 단위행렬의 첨자는 차수를 의미한다.

계산의 편의상 새로운 q 차 정방행렬 C 를 도입하고 $B_{22}=C^{-1}$ 라 표현하면 식 (11.b)에서

$$B_{12} = -(A_{11}^{-1}A_{12})C^{-1} \quad (12.a)$$

그리고 식 (11.c)에서 식 (12.b)가 얻어진다.

$$B_{21} = -C^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) \quad (12.b)$$

또한 식 (11.a)로부터 식 (12.c)를 얻으며

$$B_{11} = A_{11}^{-1} - A_{11}^{-1}A_{12}B_{21} = A_{11}^{-1} + (A_{11}^{-1}A_{12})C^{-1}(A_{21}A_{11}^{-1}) \quad (12.c)$$

마지막으로 식 (11.d)에 대입하면 식 (12.d)를 얻어진다.

$$C = A_{22} - (A_{21}A_{11}^{-1})A_{12} \quad (12.d)$$

식 (12.d)에서 역행렬을 구하면 B_{22} 가 구해져 모든 B_{ij} 가 A_{ij} 의 관계식으로 주어진다.

식 (12)을 이용하여 주어진 행렬 A 의 역행렬인 B 의 블록 원소를 구하는 방법은 계산시간의 단축을 위해 다음과 같은 순서를 사용하였다.

1. 행렬 D_{21} 를 $D_{21} \equiv A_{21}A_{11}^{-1}$ 으로 정의하여 계산한다.
2. 식 (12.d)에서 구한 D_{21} 를 이용하여 행렬 C 를 계산하고 이로부터 역행렬 C^{-1} 를 구하면 B_{22} 가 계산된다.
3. B_{22} 와 D_{21} 를 식 (12.b)에 대입하여 연산하면 B_{21} 이 구해진다.
4. 행렬 D_{12} 를 $D_{12} \equiv A_{11}^{-1}A_{12}$ 로 정의하여 계산한다.
5. D_{12} 를 이용하여 식 (12.a)로부터 B_{12} 를 계산한다.
6. B_{12} 와 식 (12.a)를 이용하여 B_{11} 를 계산한다.

위의 과정 6을 마치면 다음 내부경계에서 구성되는 새로운 행렬 A 의 A_{11}^{-1} 은 전 단계에서 구한 역행렬 B 이 되며 이를 이용하여 1-6까지 과정을 마지막 내부경계까지 반복한다. 이 과정에서 $2(N+1)$ 차 정방행렬 C 의 역행렬 C^{-1} 이 한

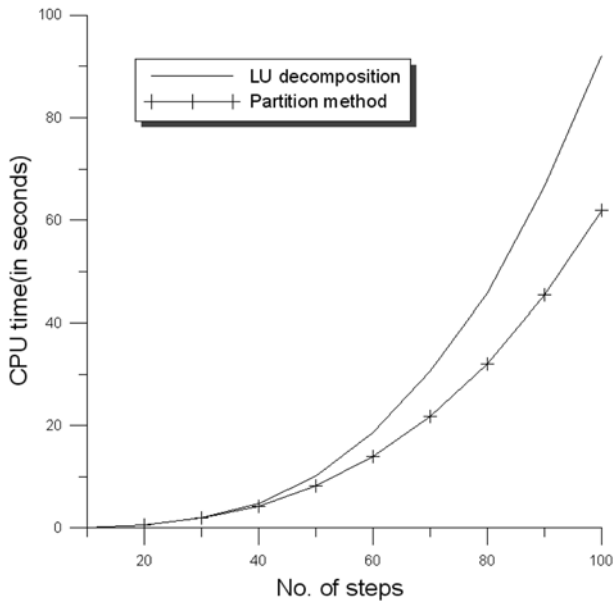


Fig. 1 Elapsed CPU times on a PC with Intel Core2 Extreme (3.0 GHz) between two matrix solving methods for different number of steps; Number of evanescent modes = 10.

번 구해져야 하며 이 행렬의 크기는 상당히 작아 쉽게 구할 수 있다.

첫 내부경계에서는 A_{11}^{-1} 만을 구하며 이는 단일 계단의 해로 존재한다. 이 후 단계에서는 위 1-6과정을 통해 단계적으로 역행렬 A_{11}^{-1} 을 구한다. 현 단계에서는 사용되지 않으나 정합조건으로부터 얻어진 $2(N+1) \times (N+1)$ 행렬은 별도로 기억장치에 저장하여 다음 단계의 A_{12} 로 사용한다. 그렇기 때문에 마지막 내부경계에서는 A_{12} 가 존재하지 않고 위 1-6과정을 수행하면 최종 연립방정식의 역행렬 A^{-1} 을 구하게 된다. 그 후 구한 A^{-1} 와 저장된 벡터 r 를 곱하면 해가 얻어진다.

분할 행렬법에서도 기억용량이 더 큰 제약 요소로 작용할 수 있기 때문에 단계별로 구한 역행렬 A^{-1} 와 다음 단계에 사용할 A_{12} 그리고 벡터 r 만을 저장한다. 그러면 이는 LU 분해법과 동일한 용량의 기억장치가 필요하나 계산시간은 대상 행렬이 커질수록 감소하게 된다. 이를 보이기 위해 Booij(1983)의 사면 경사지형을 대상으로 계단의 개수를 달리한 실험을 수행하였다.

Fig. 1에서 역류파의 개수는 10개이므로 내부계단의 수 M 인 경우 미지수는 $22M$ 개가 된다. 최소 220×220 행렬에서 최대 2200×2200 행렬로부터 해를 구하기 위해 기존 방법인 LU분해법과 분할행렬법을 사용하였고 인텔 Core2 Extreme (3.0 GHz)를 장착한 PC의 CPU 계산 소요시간을 나타내었다. 이로부터 본 연구에 사용된 LU분할행렬법은 미지수가 증가할수록 분해법에 비해 계산시간이 단축되는 것을 알 수 있다. 주어진 행렬을 분할하는 분할행렬법과 LU분해법의 해는 동일해야 하며 이는 수치실험에서도 확인하였다.

4. 수치실험

분할행렬법을 이용하여 Booij(1983)의 사면경사 지형, 동일한

Table 1. Experimental setup of Davies 등(1984)

Case	A (cm)	λ (cm)	x_r (cm)	h_0 (cm)
DH1	5	100	200	15.6
DH2	5	100	400	15.6
DH3	5	100	1000	31.3

한 개의 정현파로 이루어진 사주지형(Davies 등, 1984) 그리고 두 개의 정현파로 이루어진 사주지형(Guazzelli 등, 1992)에 대해 수치실험을 실시하였다. 본 수치실험은 역류파의 개수를 기존 연구보다 많은 10개로 정하였기 때문에 기억용량이 더 큰 제약 요인으로 작용한다. 본 수치실험에 가용한 기억용량(약 8G)을 감안하여 본 실험 대상지형에는 지형의 한 주기 당 계단 수는 50개를 기준으로 정하였고 총 계단의 개수는 101개-501개에 달한다.

사면경사 지형의 실험은 입사구역의 수심은 0.6 m, 투과 구역은 0.2 m이고 사면의 폭(또는 경사 S)은 변수이며 입사파의 주기는 2초이다. Davies 등(1984)의 사주지형은 동일한 하나의 정현파가 2, 4 그리고 10개로 구성되었고 수심은 식 (13)으로 표현되며 h_0 는 일정 수심을, x_r 은 사주가 존재하는 길이를 그리고 A 와 λ 는 정현파 지형의 진폭과 파장을 각각 의미한다. 그리고 Table 1에 식 (13)의 매개변수를 나타내었다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \leq 0 \\ h_0 - A \sin(2\pi x / \lambda), & 0 \leq x \leq x_r \\ h_0, & x \geq x_r \end{cases} \quad (13)$$

두 개의 상이한 정현파로 구성된 Guazzelli 등(1992)의 지형은 식 (14)로 나타낼 수 있고 여기서 λ_1 과 λ_2 는 구성 사주의 파장이며 Table 2에 지형의 제원을 나타내었다.

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & x \leq 0 \\ h_0 - A[\sin(2\pi x / \lambda_1) + \sin(2\pi x / \lambda_2)], & 0 \leq x \leq x_r \\ h_0, & x \geq x_r \end{cases} \quad (14)$$

Table 2에서 보인 바와 같이 Guazzelli 등(1992)의 실험에는 3개의 조건에서 상이한 수심 h_0 3개가 존재하여 총 9개의 실험으로 구성되었다.

사면경사 지형을 등간격의 101개 계단으로 구성한 본 수치실험 결과는 기존 결과와 동일함으로 본 연구에서는 제시하지 않았다(서승남, 2008b). 사주지형에 대한 수치실험은 지형이 급변하기 때문에 충분한 수의 계단으로 구성하였고 앞에서 기술한 바와 같이 역류파는 10개로 정하였다. 기억용량이 허용되는 최대의 계단 개수를 기준으로 각 경우에 거의 같은 비율의 계단 개수를 사용하고 계산속도가 PC보다 월등히 빠른 Workstation에서 실험한 계산시간을 Table 3에 나타내었다.

Table 2. Experimental setup of Guazzelli 등(1992)

Case	A (cm)	λ_1 (cm)	λ_2 (cm)	x_r (cm)	h_0 (cm)		
					a	b	c
G1	1	12	6	48	2.5	3	4
G2	0.5	6	4	48	2.5	3	4
G3	1	6	4	48	2.5	3	4

Table 3. Elapsed CPU time for the present numerical experiments

Case	No. of steps	No. of wave conditions	Ave. CPU time per a wave condition (sec)	Total CPU time
DH1	101	201	9.462	0.53 hours
DH2	201	201	82.359	4.60 hours
DH3	501	201	5421.926	302.72 hours/ 12.6 days
G1	201	391	82.05	8.91 hours/ 0.37 days
G2	401	391	1933.892	210.04 hours/ 8.75 days
G3	401	391	1942.135	210.94 hours/ 8.79 days

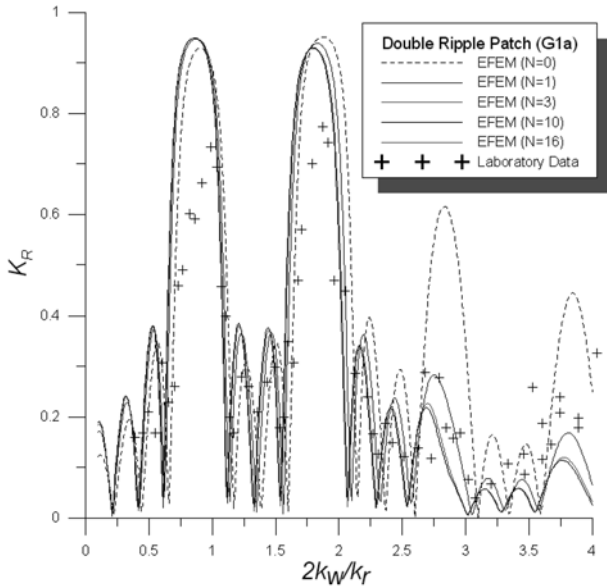


Fig. 2 Convergence test of reflection coefficient for waves normally incident on a double ripple patch, G1a.

Table 3에 보인 바와 같이 본 수치결과는 한 달에 걸쳐 계산한 결과를 나타낸 것이다. 최대 행렬(DH3 경우)은 11022×11022로 구성되며 하나의 파랑자료로부터 반사율과 투과율을 계산하는 데는 대략 1.5 시간이 필요하다.

본 수치실험의 결과는 역류파를 무시한 평면파 근사해 (Plane-wave approximation, PA)와 가용한 수치실험 자료와 비교하였다. PA의 해를 구하기 위해서 연립방정식을 역변환 (inversion)하는 것이 일반적이다. 그러나 서승남(2008a)의 산란체법을 사용하면 모든 내부계단에서 해석적으로 계산되는 단일 계단의 해를 이용하여 해석적으로 해를 구할 수 있으며 본 논문에서는 산란체법을 사용하였다. 결과 비교를 위해 제시한 모든 반사율에 대한 그림에서 수치실험 자료는 + 부호를 이용하여 나타내었다.

역류파의 개수에 따른 반사율의 수렴도를 조사하기 위한 수치실험 결과를 Fig. 2에 나타내었다. 뒤에 제시한 반사율 계산결과를 참고하여 역류파의 영향이 뚜렷이 보이는 두 개의 상이한 정현파 4개로 지형이 구성된 G1a 경우를 대상으로 하였다. 역류파 1개만 존재하여도 계산된 반사율은 진행파만의 것과 현저하게 다르며 이는 진행파와 역류파간의 상호작용으로 파랑의 위상이 변하기 때문인 것으로 분석된다. 역류파 3개를 사용한 결과는 실험의 최대 개수인 16개의 결과에 비해 약간 차이를 보이나 본 실험에서 기준으로 정한 10개의 결과는 16개의 결과와 그림의 해상도에서는 같다. 따

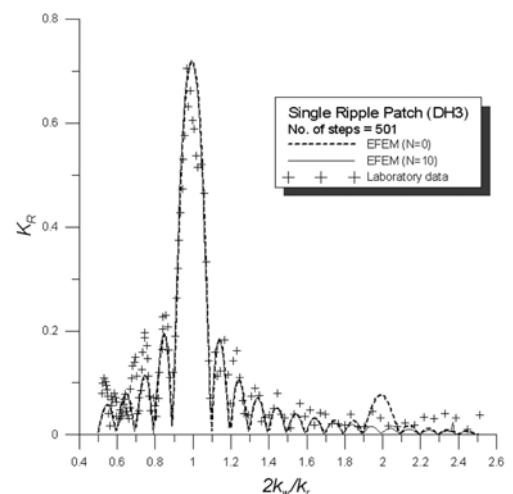
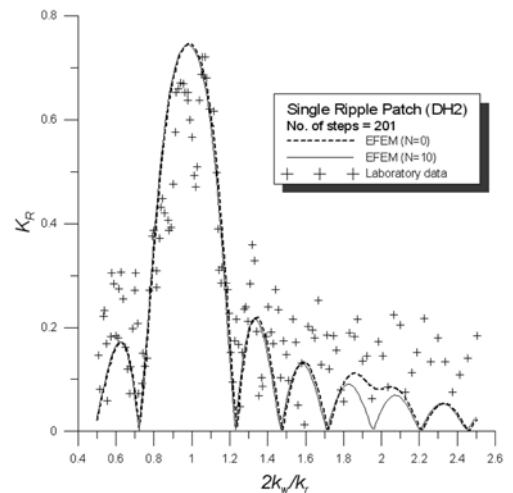
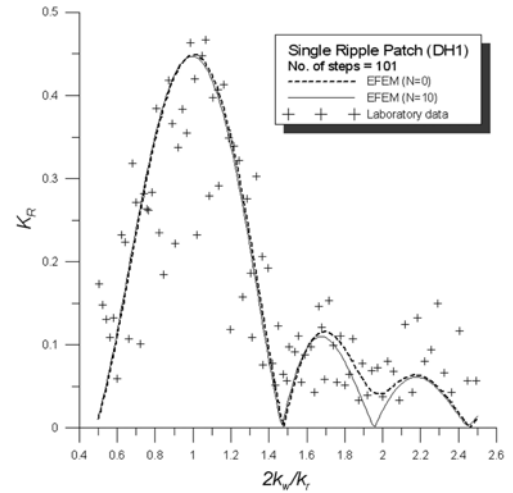


Fig. 3 Comparison of results from PA, EFEM(N=10) and laboratory data of Davies and Heathershaw(1984): depth of case (a) $h_1=15.6$ cm; (b) $h_0=15.6$ cm; (c) $h_0=31.3$ cm.

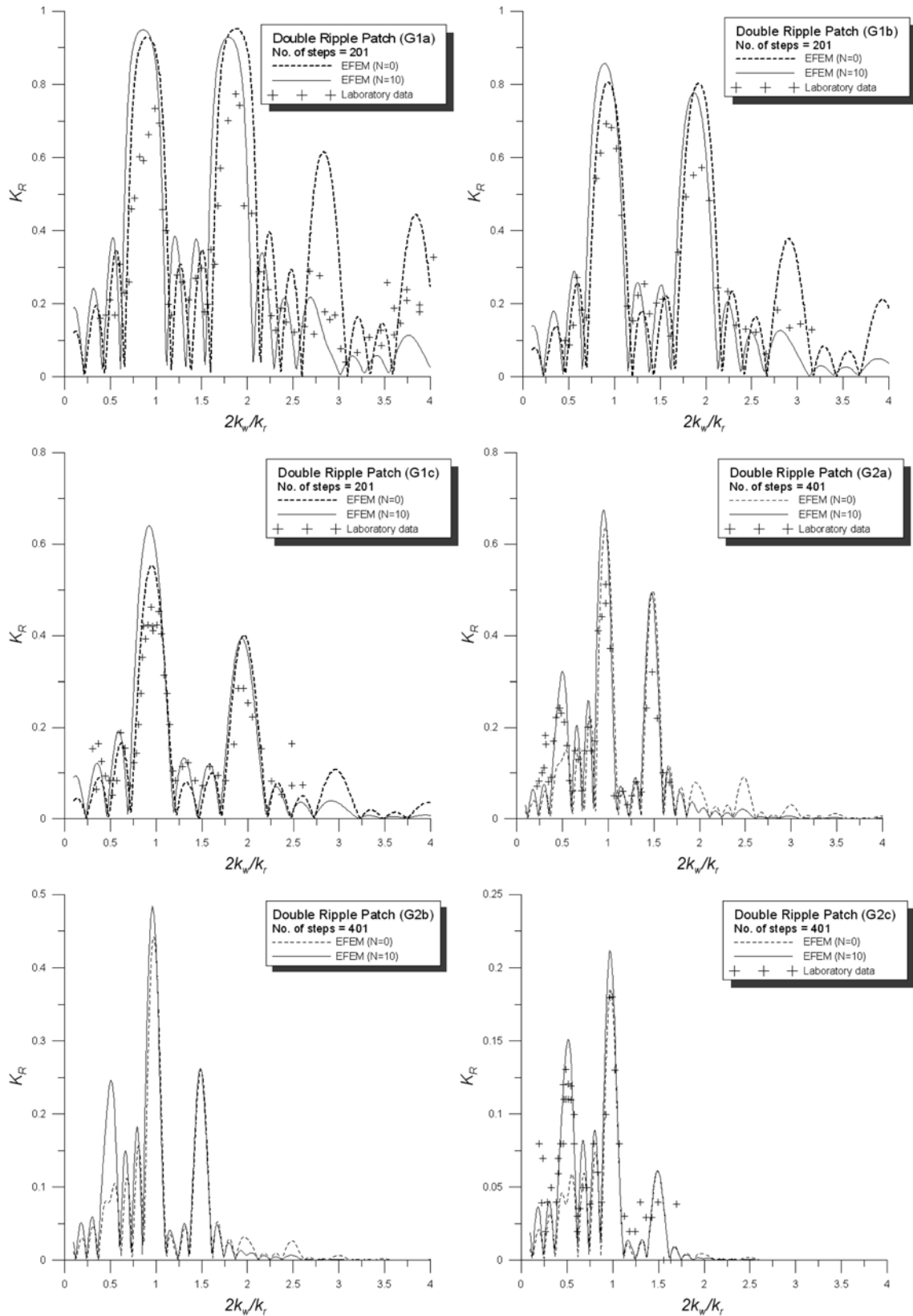


Fig. 4 Comparison of results from PA, EFEM(N=10) and laboratory data of Guazzelli *et al.* (1992): depth of case (a) $h_0=2.5$ cm; case (b) $h_0=3$ cm; case (c) $h_0=4$ cm

라서 10개의 역류파는 본 실험의 모든 대상 지형에 충분히 정밀한 결과를 보이는 것으로 판단된다.

Fig. 3은 Davies 등(1984)의 시주지형에 대한 결과 비교이다. 본 분할행렬법의 결과(실선)과 PA의 해(점선)는 입사 파수(k_w)와 지형파수(k_r)의 비가 1인 부근을 제외하면 거의 같다. 이는 기존의 연구와 일치하나 역류파의 개수를 늘린 본 연구의 반사율은 $2k_w/k_r=2$ 보다 조금 작은 점에서 0이 된

다. 한편 해저면에서 경계조건을 만족하기 위해 stream function으로부터 수정 환경사파랑식을 유도한 Kim 등(2004)의 DH2 결과도 0을 보인다. 그러나 이 부근의 수리실험 자료는 0보다 큰 반사율을 보이며 변형된 PA방법을 사용한 O'Hare 등(1992, 1993)의 결과는 이 부근에서 수리실험 결과에 보다 근접하기 때문에 그들의 모형이 우수하다는 분석 하였으나 이는 재평가되어야 한다.

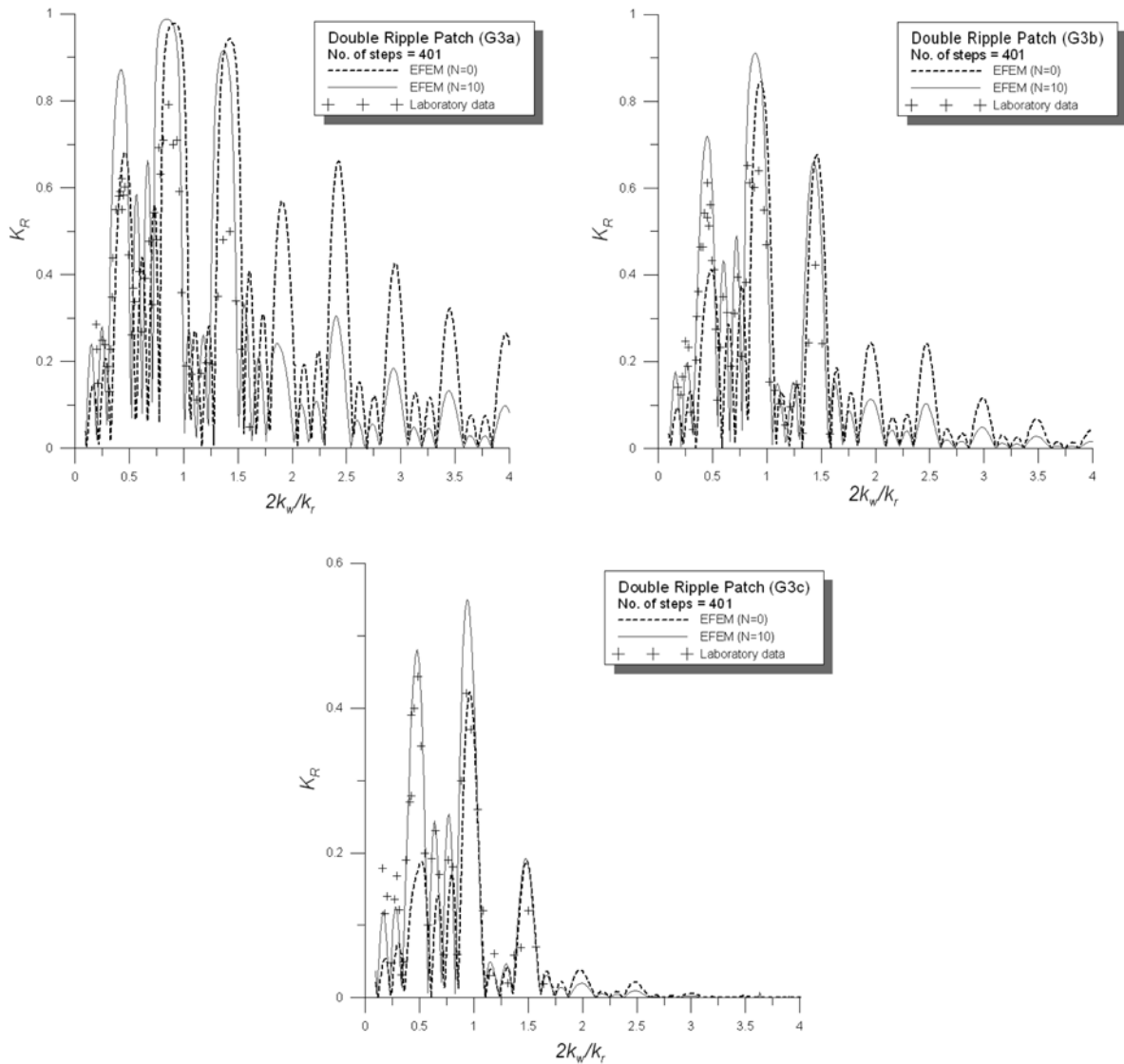


Fig. 4 계속

이론적으로 PA 모형과 O'Hare 등의 역류파를 무시한 변 환행렬법(transfer matrix method)는 같음을 보일 수 있다. EFEM에서 역류파의 개수를 늘리면 수치해는 수렴하며 이는 엄밀해가 됨을 이론적으로 입증할 수 있고 역류파에 따른 수렴성을 조사한 기존 연구가 이를 보여준다. 그리고 본 수치실험의 경우 수조내의 반사파가 10% 정도 상존하는 것으로 보고되었고 측정결과의 산재 또한 감안되어야 한다. 이를 종합하면 O'Hare 등의 분석은 제한적인 실험을 통해 얻은 결과를 분석한 것이며 에너지 손실을 무시한 선형과 이론이 성립하는 경우 본 분할행렬법의 결과가 올바른 해로 판단된다.

Fig. 4에 Guazzelli 등(1992)의 지형에 대한 결과의 비교를 나타내었다. 두 개의 상이한 정현파가 중첩된 본 사주지형에서 분할행렬법과 PA의 해는 상당히 다르며 이는 기존 연구결과와 유사하다. Guazzelli 등의 수치실험에도 수조 내 반사파에 의한 영향이 존재한다. 즉 G1의 경우 $2k_w/k_r \approx 1$, G2와 G3의 경우 $2k_w/k_r \approx 0.5$ 보다 큰 경우에는 반사율은 무시할 수 있으나 이보다 작은 경우 반사율은 0.1~0.2에 해당한다고 밝혔다.

분할행렬법의 본 수치실험 결과는 횡축의 값이 G1의 경우 1.8, G3의 경우 1.4를 기준으로 이보다 작으면 계산된 반사율은 증가하고 크면 감소하는 경향을 보인다. 또한 계산된

반사율의 위상은 횡축 좌표의 작은 쪽으로 이동하고 PA 보다 분할행렬법의 해가 수치실험 결과에 더 일치한다. 이러한 현상은 Guazzelli 등(1992)과 Athanassoulis 등(1999)의 수치실험 결과에서도 동일하다.

5. 결 론

EFEM으로부터 구성되는 연립방정식의 해를 구할 때 계산 시간의 단축을 위해 LU 분할법 대신 분할행렬법을 사용함으로써 가장 정밀한 반사율을 계산하고 이를 평면파 근사해와 수치실험 자료와 비교하였다. 또한 수치해의 정밀도를 높이기 위해 역류파의 개수를 10개로 늘린, 비록 모든 결과의 산출에 한 달의 계산시간이 걸렸지만, 본 결과와 기존 연구 결과의 차이점을 분석하였다.

연립방정식의 행렬이 커질수록 분할행렬법은 LU 분할법에 비해 약 50% 계산시간의 감소(계단수 400개)를 보이며 하나의 동일한 정현파로 구성된 사주지형에서는 분할행렬법의 반사율은 $2k_w/k_r = 2$ 보다 조금 작은 점에서 0이 된다. 이 부근을 제외하면 평면파 근사해와 분할행렬법의 해는 거의 같고, Booij의 사면경사에서 대한 실험에서도 평면파 근사해와 분할행렬법의 해는 거의 같다.

그러나 두개의 상이한 정현파로 구성된 시주지형에서는 분할행렬법의 해와 평면파 근사해는 현격한 차이가 있다. 이로부터 EFEM의 해는 구성계단의 개수와 역류파의 개수에 영향을 동시에 받으며 다음과 같은 결과를 도출할 수 있다. 즉 지형의 특성과 파랑의 특성에 따라 이 변수들의 한계치가 존재하며 이 가운데 하나가 한계치 보다 작으면 다른 하나의 변수를 늘려도 계산된 해에는 큰 변화가 없다. 따라서 충분한 개수의 변수들이 필요하며 본 연구에서 사용된 변수의 값들이 하나의 기준이 된다.

최근의 연구(Magne 등, 2007)에서 지적한 바와 같이 EFEM은 해저면 부근에서 유속이 불연속이 되어 문제가 되나 EFEM의 해는 다수의 기존 연구를 통해 정밀한 반사율을 보여 파고계산에는 유용한 기법으로 평가된다. 분할행렬법은 상당한 계산시간의 단축을 가져오나 임의 지형을 계단 지형으로 근사하여 구하는 해를 구하기에는 본 연구에서 보인 바와 같이 기억용량과 계산시간은 여전히 상당한 제약이 되기 때문에 이를 해결하기 위한 연구가 필요하다.

감사의 글

본 연구는 한국해양연구원의 기본연구사업인 “연안 국지해일 정밀예보 지원체제 현업화 기술”, “해일침수범람지역 예측 기술 및 재해도(Hazard Map) 작성기술 개발 : 부산, 마산, 여수”과 “해상파랑 관측 및 조사” 연구에서 수행된 결과의 일부이며 연구비 지원에 감사를 드립니다.

참고문헌

서승남(2008a) 산란체법에 의한 다중 계단지형에서의 파랑변형 계산. 한국해양학회논문집, 한국해양학회, 제20권 제5호, pp. 439-451.
 서승남(2008b) 변분근사식과 연계된 산란체법에 의한 파랑변형 계산. 한국해양학회논문집, 한국해양학회, 제20권 제6호, pp. 553-563.
 조용식, 이창훈(1998) 수심이 변하는 지형을 통과하는 파랑의 반사율과 통과율 산정. 대한토목학회논문집, 대한토목학회, 제18권 제II-4호, pp. 351-358.
 Athanassoulis, G.A. and Belibassakis, K.A. (1999) A consistent coupled-mode theory for the propagation of small-amplitude water waves over variable bathymetry regions. *J. Fluid Mech.*, Vol. 389, pp. 275-301.
 Bender, C.J. and Dean, R.G. (2003) Wave transformation by two-

dimensional bathymetric anomalies with sloped transitions. *Coastal Eng.*, 50, pp. 61-84.
 Berkhoff, J.C.W. (1972) Computation of combined refraction-diffraction. *Proc. 13th Coastal Eng. Conf.*, Vol. 1, pp. 471-490.
 Booij, N. (1983) A note on the accuracy of the mild-slope equation. *Coastal Eng.*, Vol. 7, pp. 191-203.
 Chamberlain, P.G. and Porter, D. (1995) The modified mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 291, pp. 393-407.
 Davies, A.G. and Heathershaw, A.D. (1984) Surface-wave propagation over sinusoidally varying topography. *J. Fluid Mech.*, Vol. 144, pp. 419-443.
 Devillard, P., Dunlop, F., and Souillard, B. (1988) Localization of gravity waves on a channel with a random bottom. *J. Fluid Mech.*, Vol. 186, pp. 521-538.
 Guazzelli, E., Rey, V., and Belzons, M. (1992) Higher-order Bragg reflection of gravity surface waves by periodic beds. *J. Fluid Mech.*, Vol. 245, pp. 301-317.
 Kim, J.W. and Bai, K.J. (2004) A new complementary mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 5111, pp. 24-40.
 Kirby, J.T. (1986) A general wave equation for waves over rippled beds. *J. Fluid Mech.*, Vol. 162, pp. 171-186.
 Kirby, J.T. and Dalrymple, R.A. (1983) Propagation of obliquely incident water waves over a trench. *J. Fluid Mech.*, Vol. 133, pp. 47-63.
 Magne, R., Belibassakis, K.A., Herbers T.H.C., Arhuin, F., O'Reilly, W.C., and Rey, V. (2007) Evolution of surface gravity waves over a submarine canyon. *J. Geophys. Res.*, 112, C01002, doi:10.1029/2005JC003035.
 Massel, S.R. (1993) Extended refraction-diffraction equation for surface waves. *Coastal Eng.*, Vol. 19, pp. 97-126.
 Miles, J.W. (1967) Surface-wave scattering matrix for a shelf. *J. Fluid Mech.*, Vol. 28, pp. 755-767.
 O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1992) A new model for surface-wave propagation over undulating topography. *Coastal Eng.*, Vol. 18, pp. 251-266.
 O'Hare, T.J. and Davies, A.G. (1993) A comparison of two models for surface-wave propagation over rapidly varying topography. *Applied Ocean Res.*, Vol. 15, pp. 1-11.
 Porter, D. (2003) The mild-slope equations. *J. Fluid Mech.*, Vol. 494, pp. 51-63.
 Porter, D. and Staziker, D.J. (1985) Extension of the mild-slope equation. *J. Fluid Mech.*, Vol. 300, pp. 367-382.
 Smith, R. and Sprinks, T. (1975) Scattering of surface waves by a conical island. *J. Fluid Mech.*, Vol. 72, pp. 373-384.
 Takano, K. (1960) Effets d'un obstacle parallépipédique sur la propagation de la houle. *La Houille Blanche*, Vol. 15, pp. 247-267.

(접수일: 2009.2.24/심사일: 2009.3.20/심사완료일: 2009.5.1)