

탄성균열 해석을 위한 이동최소제곱 유한차분법의 내적확장

Intrinsic Enrichment of Moving Least Squares Finite Difference Method for Solving Elastic Crack Problems

윤영철* · 이상호**

Yoon, Young-Cheol · Lee, Sang-Ho

Abstract

This study presents a moving least squares (MLS) finite difference method for solving elastic crack problems with stress singularity at the crack tip. Near-tip functions are intrinsically employed in the MLS approximation to model near-tip field inducing singularity in stress field. employment of the functions does not lose the merit of the MLS Taylor polynomial approximation which approximates the derivatives of a function without actual differentiating process. In the formulation of crack problem, computational efficiency is considerably improved by taking the strong formulation instead of weak formulation involving time consuming numerical quadrature. Difference equations are constructed on the nodes distributed in computational domain. Numerical experiments for crack problems show that the intrinsically enriched MLS finite difference method can sharply capture the singular behavior of near-tip stress and accurately evaluate stress intensity factors.

Keywords : elastic crack, moving least squares, finite difference method, stress singularity, near-tip functions, Taylor polynomial, intrinsically enriched, stress intensity factor

요 지

본 연구는 균열선단에서 응력특이성을 갖는 탄성균열문제를 해석하기 위한 이동최소제곱 유한차분법을 제시한다. 응력특이성을 유발하는 균열선단 주변장을 모형화하기 위해 근사식에 선단주변함수를 내재적으로 도입하여 이동최소제곱 근사의 틀을 그대로 유지하면서 실제 미분계산을 거의 하지 않고 미분근사를 할 수 있는 이동최소제곱 Taylor 다항식 근사의 장점을 살렸다. 균열문제 정식화시 시간소모적인 적분과정이 필요한 약정식화 대신 해석영역에 배치된 절점에서 지배 미분방정식에 대한 차분식을 직접 구성하는 강정식화를 적용하여 계산 효율성을 향상시켰다. 균열문제 해석을 통해 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법이 응력 특이성을 내포한 선단주변 변위장을 정확히 묘사할 수 있을 뿐만 아니라 응력확대계수를 정확히 계산할 수 있음을 보였다.

핵심용어 : 탄성균열, 이동최소제곱, 유한차분법, 응력 특이성, 선단주변함수, Taylor 다항식, 내적확장, 응력확대계수

1. 서 론

일반적으로 편미분 방정식을 유한차분법으로 해석하는 경우 격자(grid)를 이용한 Taylor 전개를 통해 차분식을 직접 만들기 때문에 정식화 과정이 단순하다. 그러나 유한차분법은 지배방정식의 이산화가 단순하고 계산 효율성이 우수한 반면 근사함수(approximation)를 갖고 있지 않기 때문에 임의의 위치에서 해(solution) 또는 해의 미분값을 계산하기 위해서는 추가적인 후처리 과정(post process)이 요구된다. 예를 들어, 균열문제에 대한 응력계산 후 응력확대계수(stress intensity factor) 값을 계산하기 위해서는 임의의 경로 또는 지정된 영역 내의 임의의 위치에서 응력값이 필요한데, 유한차분법으로는 이와 같은 계산이 매우 어렵다. 이런 점들이

복잡한 기하형상이나 내면경계의 처리가 어렵다는 점과 함께 불연속 경계를 갖는 고체문제에 유한차분법이 활발히 적용되지 못한 주된 이유가 되어 왔다.

유한요소법의 경우, 요소(element)를 기반으로 한 근사함수 구성의 수학적 강건성(robustness)을 바탕으로 균열선단의 특이성을 근사함수 내에 포함시키기 위한 연구가 오래 전부터 있었다. 예를 들어, Benzley(1974)와 Nash와 Peter(1978)는 특이항을 포함하는 형상함수를 갖는 변종요소(hybrid element)를 이용하여 선단주변에서의 응력의 특이성을 반영할 수 있는 확장된 근사함수를 제안했다. 균열면의 모형화가 요소망의 구성과 강하게 연관되어 있어서 임의의 균열형상을 모형화하는 것이 어려웠지만, 그 후에 개발된 유한요소 기반의 다양한 균열요소들의 이론적인 토대를 제공했다.

*정회원 · 교신저자 · 명지전문대학 토목과 조교수 · 공학박사 (E-mail : ycyoon@mjc.ac.kr)

**정회원 · 연세대학교 사회환경시스템공학부 교수 · 공학박사 (E-mail : lee@yonsei.ac.kr)

Belytschko와 Black(1999)는 요소망의 재구성을 최소화하고 불연속면 모델링을 위한 확장항 도입하여 균열문제를 해석했고, Mos 등(1999)은 'X-FEM'라 명명된 확장 유한요소법을 제안하여 요소망의 재구성 없이 탄성균열의 성장과정을 해석했다. 이 후로도 다양한 유한요소 확장기법에 대한 연구가 이루어져 오고 있으나 근본적으로 유한요소법은 약정식화에 의한 적분식의 계산을 전제로 하기 때문에 균열에 의해 요소가 임의의 크기나 형상으로 나누어 질 때 정확한 적분값을 수치적으로 얻는 것이 매우 어렵고 균열선단에서의 응력 특이성도 정확한 적분식의 산정을 어렵게 한다.

요소를 사용하지 않고 절점만을 이용하여 미분방정식을 정식화하는 무요소법(meshfree method)의 경우, 개발 초기부터 유한요소법의 요소망(mesh) 제약을 극복하기 위한 대안적인 수치기법으로서의 위상을 확보하기 위해 균열문제를 해석하기 위한 다양한 수치기법이 개발되었다. 한 예로, EFG법이라 불리는 Element-Free Galerkin method(Belytschko 등, 1994)은 초기에 다항식 기저(polynomial basis)만 이용하여 균열해석을 수행하는 것에서 발전하여 Belytschko와 Fleming(1999)이 기지의 균열주변 변위장에 대한 closed form 해로부터 기저함수를 추출하고 다항기저함수 또는 근사함수를 확장하는 기법들을 제안했다. Ventura 등(2002)은 벡터 level set 기법을 이용한 불연속 묘사법과 결합된 EFG 근사함수를 제안하였고, Lee와 Yoon(2003)은 국부적으로 확장된 EFG 근사함수를 제안하여 선단주변함수가 보조받침 상에서 국부적으로 반영될 수 있도록 하여 계산효율성을 향상시켰다. 국내에서는 윤영철 등(2005a, 2005b)이 무요소법의 계산 효율성 향상을 위해 무요소 형상함수의 미분을 고속으로 계산할 수 있는 방법에 대한 이론적 연구와 수치해석적 특성에 관한 연구를 수행하였다. 그러나 이와 같은 무요소법들은 기존의 무요소법이 정확하게 모형화하지 못하던 균열선단의 특이성을 성공적으로 모형화 했다는 장점을 부각시켰지만, 적분방정식에 의존한 정식화와 복잡한 이산화 과정, 계산 효율성에 대한 약점들이 계속적으로 지적되어 왔다.

본 연구에서 제시하는 이동최소제곱 유한차분법은 유한차분법의 계산효율성과 유한요소법의 근사함수 확장방법 그리고 무요소법의 균열 모형화 방법의 장점을 결합한 새로운 수치해석방법이다. 응력의 특이성을 갖는 탄성균열문제에 대한 해석기법은 응력장 해석을 통해 응력확대계수를 산정하고 전과경로에 대한 예측하는 데에 주로 사용된다. 공용 중에 반복하중으로 인해 강구조물에 발생한 균열의 활동성이나 성장속도와 같은 거동을 수치적으로 잘 예측할 수 있다면 공학적으로 매우 활용가치가 높다. 해석결과를 통해 구조물의 손상 메카니즘이나 유지관리를 위한 의사결정에 유용한 중요 정보들을 얻을 수 있기 때문이다. 윤영철 등(2007a)은 이동최소제곱 유한차분법을 이용해 응력집중문제에 대한 수치해법을 제시한 바 있다. 그러나 응력의 특이성을 갖는 균열문제의 경우, 다항식만을 이용하여 근사식을 구성하게 되면 변위의 썩기거동이나 응력(또는 변형률)의 특이성 또는 불연속 현상을 제대로 묘사할 수 없다. 균열해석시 선단주변 변위와 응력의 정확한 묘사는 응력확대계수의 정확도와 직접적으로 연관되므로 균열거동의 정확한 묘사가 매우 중요하다. 본 연구에서는 선단주변함수(neat-tip function)를

이동최소제곱 Taylor 근사식에 도입하는 내적확장 방법을 제안하고, 이를 통해 균열선단주변 변위장을 정확히 모형화하고 엄밀한 응력확대계수의 산정을 통해 탄성균열문제를 성공적으로 해석할 수 있는 수치기법을 제안하고자 한다.

2. 이동최소제곱 Taylor 근사함수를 이용한 선단주변 변위장의 모형화

2.1 이동최소제곱 Taylor 근사함수

그림 1은 균열을 포함한 탄성체의 내부와 경계의 모습을 나타낸다. 균열선단의 영향을 어느 정도 벗어난 정규영역(regular region, Ω^R)에서의 근사는 윤영철 등(2007b)이 제시했듯이 절점(node) 기반에서 이동최소제곱법으로 계산한 Taylor 다항식의 계수를 주어진 함수에 대한 미분근사로 사용하는 방법을 그대로 적용할 수 있다. 즉, 이동최소제곱법으로 Taylor 다항식을 계산할 때 균열선단이 계산영역 내에 포함되지 않으면, 다항식만 이용해 근사식을 구성한다.

1차원 근사의 경우, 미분 가능한 함수 $u(x) \in C^m(\bar{\Omega})$ 가 주어지면 한 점 \bar{x} 를 기준으로 영향반경(ρ) 이내의 영역에 대한 $u(x)$ 의 Taylor 전개식에서 m 차 이상의 고차항을 제외하여 다음과 같은 Taylor 다항식이 얻어진다.

$$u_T^R(x, \bar{x}) = u^{(0)}(\bar{x}) + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right) \frac{\rho}{1!} u^{(1)}(\bar{x}) + \dots + \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x}) = p_m(x, \bar{x}) \cdot a_m(\bar{x}) \quad (1)$$

여기서 괄호 안의 위첨자는 미분의 차수를 나타내며, \cdot 은 스칼라 곱을 나타낸다. x 는 근사함수와 미분근사를 계산하고 싶은 임의의 위치이고, \bar{x} 는 Taylor 전개를 위한 기준 위치이다. ρ 는 근사함수가 산정되는 영역의 크기로서 이동최소제곱 계산에서 사용되는 가중함수(weight function)의 반경을 의미한다. 식 (1)에서 정의된 다항식 기저함수 $p_m(x, \bar{x})$ 와 m 차까지의 미분근사를 포함한 미지의 벡터 $a_m(\bar{x})$ 를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$p_m(x, \bar{x}) = \left(1, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right), \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^2, \dots, \left(\frac{x-\bar{x}}{\rho}\right)^m\right)^T \quad (2)$$

$$a_m(\bar{x}) = \left(u(\bar{x}), \frac{\rho}{1!} u^{(1)}(\bar{x}), \dots, \frac{\rho^m}{m!} u^{(m)}(\bar{x})\right)^T \quad (3)$$

$a_m(\bar{x})$ 를 계산하는 과정은 기존의 이동최소제곱법의 계산절차

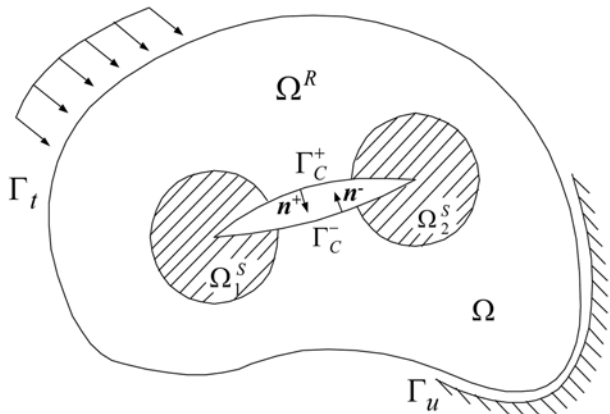


그림 1. 균열을 포함한 탄성체 ($\Omega = \Omega^R \cup \Omega^S, \Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t \cup \Gamma_c$)

를 그대로 따른다. $a_m(\bar{x})$ 로부터 원하는 차수의 미분근사를 도출하는 방법은 윤영철 등(2007a, 2007b)에 자세히 설명되어 있다. 균열을 포함한 고체문제의 해석과정을 간단히 언급하면 먼저, 해석영역 내의 각 절점에서 이동최소제곱 Taylor 근사식을 구성하고 미분근사 값을 계산한다. 다음으로 모든 절점에서 지배방정식(평형방정식과 경계조건식)에 대한 차분식을 구성하여 만든 계 방정식(system of equations)을 만든 풀면 절점해를 얻는데 이 절점해를 이용하여 임의의 위치에서 해와 해의 미분값을 계산할 수 있다.

2.2 탄성균열 모형을 위해 내적확장된 이동최소제곱 Taylor 근사함수와 재생성

균열선단에서는 응력이 무한대로 커지는 특이성(singularity)이 존재한다. 특이성의 영향을 받는 균열선단 주변영역을 특이영역(singular region, Ω^S)이라 부른다. 수치해석적 관점에서 특이영역의 구분은 이동최소제곱법 계산시 균열선단이 계산영역 내에 포함되는지 여부에 따르며, 정규영역은 자동적으로 전체영역에서 특이영역을 제외한 영역이 된다. 특이영역의 해의 거동을 대표하는 균열선단주변 변위장의 점근적 거동은 다음과 같다.

$$u_i(r, \theta) \sim r^{1/2} F_i(\theta), \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

여기서 $F_i(\theta)$ 는 기하학적 형상, 균열길이, 하중과 같은 요소들에 의해 결정된다. 본 연구에서는 무한영역에 대해 주어진 균열선단주변 변위장을 이용해 선단주변함수를 식 (5)와 같이 정의한다(Fleming 등, 1997; Belytschko와 Fleming, 1999).

$$\begin{aligned} b_{near}(x) &= \{b_c^1(x, x_{tip}), b_c^2(x, x_{tip}), b_c^3(x, x_{tip}), b_c^4(x, x_{tip})\}^T \\ &= \left\{ r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2}, r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}, r^{1/2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, r^{1/2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}^T \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 x_{tip} 는 균열선단의 좌표벡터, $r = \|x - x_{tip}\|$ 이고, θ 는 균열선단 앞쪽으로의 접선에서 측정된 각도이다. $b_{near}(x)$ 의 각 항들을 한번 미분하면 $r=0$ 일 때, 무한한 값이 되는 점을 주목할 필요가 있다.

이제 좀 더 일반적인 2차원 문제를 고려한다. 특이영역에서의 변위를 근사하기 위해 식 (5)의 선단주변함수를 Taylor 근사식에 도입한다. 이동최소제곱 계산영역이 균열선단을 포함하는 경우, 근사함수를 다음과 같이 수정한다.

$$\begin{aligned} u_i^S(x, \bar{x}) &= p_m(x, \bar{x}) \cdot a_m(\bar{x}) + a_c^1(\bar{x}) b_c^1(x, x_{tip}) + \dots + a_c^4(\bar{x}) b_c^4(x, x_{tip}) \\ &= p_e(x, \bar{x}) \cdot a_e(\bar{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 $p_e^T(x, \bar{x}) = ((p_m(x, \bar{x}))^T, a_c^1(\bar{x}) b_c^1(x, \bar{x}), \dots, a_c^4(\bar{x}) b_c^4(x, \bar{x}))$ 는 선단주변함수를 이용하여 확장된 기저함수이고, 이에 상응하는 미지계수벡터는 $a_e(\bar{x}) = ((a_m(\bar{x}))^T, a_c^1(\bar{x}), \dots, a_c^4(\bar{x}))^T$ 이다. $a_e(\bar{x})$ 는 이동최소제곱 근사에 포함된 절점들을 이용하여 식 (7)과 같은 잔차식을 최소화하여 얻는다.

$$J = \sum_I w \left(\frac{x - \bar{x}}{\rho} \right) [p_e(x, \bar{x}) \cdot a_e(\bar{x}) - u_I]^2 \quad (7)$$

여기서 $w \left(\frac{x - \bar{x}}{\rho} \right)$ 는 임의의 가중함수이고 일반적으로 연속적이지만 미분가능할 필요는 없다(Lee와 Yoon, 2004). $a_e(\bar{x})$ 를 계산할 때, 선단주변 변위장 모형화와 연관이 있는

$a_c^1(\bar{x}), \dots, a_c^4(\bar{x})$ 도 이동최소제곱 센스(sense)로 같이 얻어진다. 결과적으로 선단주변함수로 확장된 경우에도 기존의 이동최소제곱 유한차분법에서 근사식을 계산하는 과정과 동일하기 때문에 계산량의 증가는 거의 없다는 점이 주목할 만하다. 이제 계산된 $a_e(\bar{x})$ 에 대해 \bar{x} 를 x 로 치환하면 0차 미분근사 즉, 근사함수 $u^{(0,0)}(x)$ 부터 m 차 미분근사 값까지 차례로 얻어진다. m 차까지의 미분근사식을 절점해(nodal solution) u_I 와 형상함수를 사용해 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} u_i^{(0,0)}(x) \\ \vdots \\ u_i^{(0,m)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_I \Phi_I^{(0,0)}(x) u_{iI} \\ \vdots \\ \sum_I \Phi_I^{(0,m)}(x) u_{iI} \end{pmatrix}, \quad (i=1,2) \quad (8)$$

여기서 괄호 안의 위첨자는 다중지수 표기법(multi-index notation)으로 나타낸 미분의 차수이다. 형상함수는 식 (9)와 같은 형태를 가지며 모멘트 행렬도 식 (10)으로부터 계산된다.

$$\Phi_I^\alpha(x) = \left(\lim_{\bar{x} \rightarrow x} D^\alpha p_e^T(x, \bar{x}) \right) M^{-1}(x) \sum_I w \left(\frac{x_I - x}{\rho} \right) p_e(x_I, x) \quad (9)$$

$$M(x) = \sum_I w \left(\frac{x_I - x}{\rho} \right) p_e(x_I, x) p_e^T(x_I, x) \quad (10)$$

여기서 D^α 는 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ 차 미분연산자를 의미한다. 선단주변함수로 확장된 이동최소제곱 Taylor 근사식은 형상함수를 갖고 있기 때문에 절점이 아닌 곳에서도 해와 미분값을 쉽게 계산할 수 있다. 이런 특성은 선단주변의 임의의 위치에서의 응력값 계산이 필요한 응력확대계수 계산시 매우 유용하다.

초기의 무요소법은 균열선단주변의 응력 특이성을 해석에 반영하기 위하여 유한요소법의 h-version 적응적 기법 같이 절점을 추가하는 방법을 사용했으며 이러한 방법은 절점의 추가, 삭제, 재배치 등과 관련된 번거로운 연산을 수반했다. 반면, 본 연구에서 사용하는 확장기법은 유한요소법의 p-version 적응적 기법 같이 선단주변 변위장(near-tip displacement field)를 이용해 근사함수의 정규도(regularity)를 향상시키는 것으로 볼 수 있다. 식 (9)로부터 얻어진 형상함수를 포함한 미분근사 식들은 Taylor 전개시 사용한 m 차 기저다항식 $p_m^T \left(\frac{x - \bar{x}}{\rho} \right)$ 에 대해 m 차 재생성(또는 m 차 consistency)를 가질 뿐만 아니라, 선단주변함수에 대해서도 이동최소제곱 센스에서의 재생성을 갖는다. 이에 대한 수학적 논의는 Yoon 등(2006)을 참조할 수 있으며, 본 절에서는 수치적인 방법으로 재생성 시험을 수행한다.

표 1. Westergaard 선단주변 변위장

모드	변위장
I	$u_1^I(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$
	$u_2^I(r, \theta) = \frac{K_I}{2\mu\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$
II	$u_2^{II}(r, \theta) = \frac{K_{II}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left(\kappa + 1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \right)$
	$u_2^{II}(r, \theta) = -\frac{K_{II}}{2\mu\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{r}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(\kappa - 1 + 2\sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$

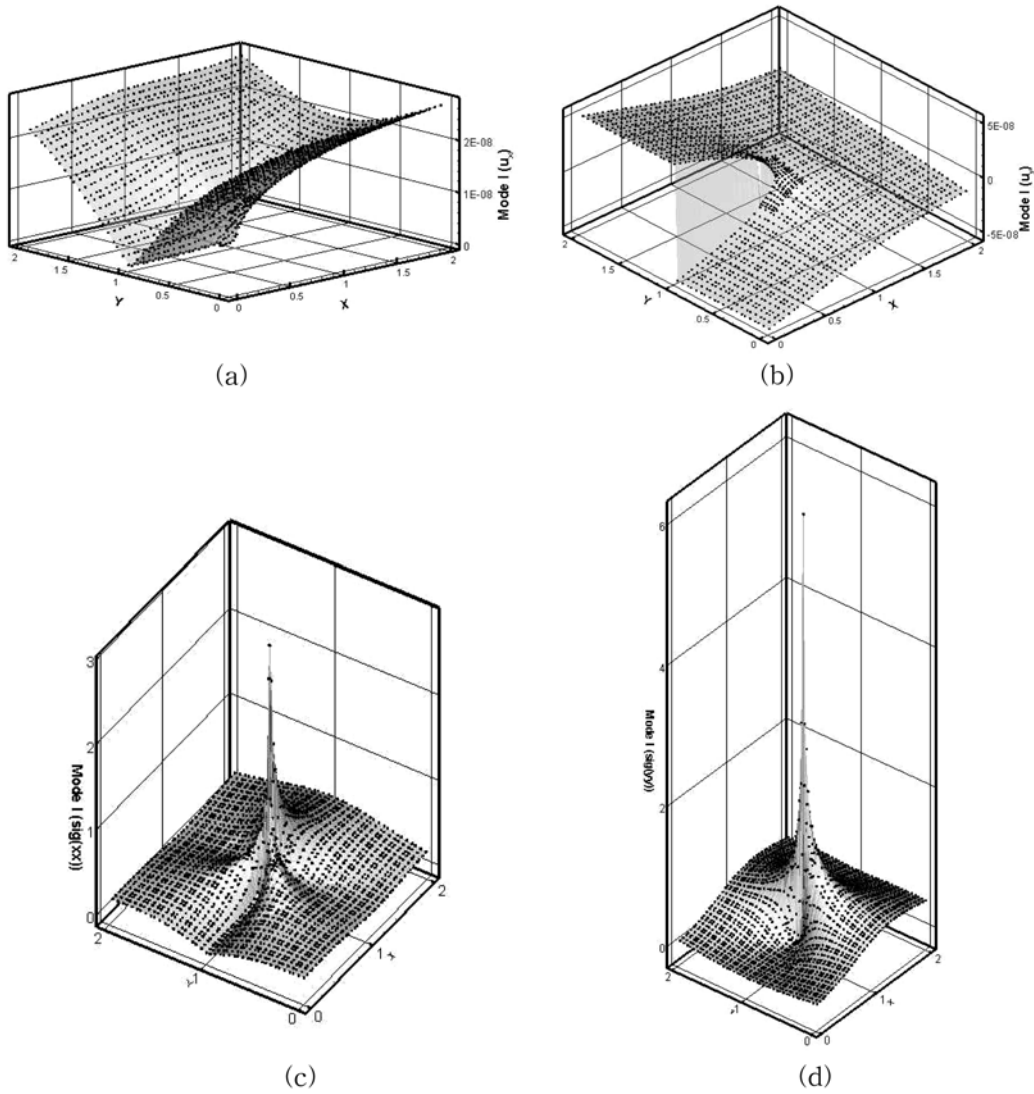


그림 2. (a) 재생된 $u_1^I(x) \left(\sum_K \Phi_K^{(0,0)}(x) u_{1K}^I \right)$, (b) 재생된 $u_2^I(x) \left(\sum_K \Phi_K^{(0,0)}(x) u_{2K}^I \right)$, (c) 재생된 $\sigma_{xx}^I(x)$, (d) 재생된 $\sigma_{yy}^I(x)$

표 1에 제시된 이미 알려진 Westergaard 변위장으로부터 절점해 u_{II} 값을 정의하면, 이동최소제곱 Taylor 근사식을 이용해 변위, 변형률, 응력을 계산할 수 있다. 이 때, 필요한 응력확대계수는 단위값 1로 미리 정했다. 수치계산을 위해 225개의 절점을 등간격으로 배치한 사각형 패치를 사용했다. 그림 2(a)~2(b)은 확장된 이동최소제곱 Taylor 근사식으로 재생한 변위불연속을 갖고 있는 모드 I의 y방향 변위와 쉘기형상을 갖는 모드 I의 x방향 변위를 도시한 것이다. 그림 2(c)~2(d)에는 모드 I의 x방향 응력과 y방향 응력에 대한 결과로서 선단에 가까이 갈 때 응력값이 무한히 커지려는 것을 확인할 수 있다. 각 절점에서 확장된 이동최소제곱 Taylor 근사함수로 재생된 변위와 Westergaard 변위장과의 차이 즉, L^∞ 상대오차를 조사한 결과, 그 값이 10^{-16} 보다 작아 기계오차보다 작은 것을 확인할 수 있었고, 결과적으로 선단 주변 변위장이 정확하게 재생된다는 것을 확인했다.

3. 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 균열문제의 정식화

경계 $\Gamma = (\Gamma_u \cup \Gamma_t)$ 로 둘러싸인 영역 Ω 즉, 균열을 포함한 탄성체에 대해 선형탄성 구성방정식과 미소변형을 가정하면

지배 미분방정식은 다음과 같다.

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad (11)$$

차분식 구성을 위해 변위 \mathbf{u} 와 체적력 \mathbf{b} 를 이용하여 식 (11)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$(\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = -\mathbf{b} \text{ in } \Omega \quad (12)$$

이와 같이 응력 대신 변위로 표현된 평형방정식을 ‘Navier 방정식’이라 부른다. $\nabla^2 (= \nabla \cdot \nabla)$ 는 Laplace 연산자이며, λ 와 μ 는 Lamé 상수이다. 자연경계조건(natural boundary condition)은 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma_t \quad (13)$$

여기서, \mathbf{n} 은 자연경계 Γ_t 에서의 단위수직벡터, $\bar{\mathbf{t}}$ 은 자연경계 상에 규정된 표면력이다. 자연경계조건도 다음과 같이 변위만의 방정식으로 표현할 수 있다.

$$2\mu(\nabla_{sym} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{1} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ on } \Gamma_t \quad (14)$$

여기서 $\mathbf{1} = \delta_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ 은 2차 단위텐서, ∇_{sym} 은 그라디언트 연산자의 대칭부분이다. 균열해석시 균열표면은 자연경계에 포함되며 식 (14)의 자연경계조건을 이용하여 표면력이 0인

조건(traction-free condition, $\sigma \cdot n = 0$)을 부여한다. 필수경계 조건(essential boundary condition)은 다음과 같다.

$$u = \bar{u} \text{ on } \Gamma_u \quad (15)$$

여기서 위첨자 ‘-’는 미리 규정된 값임을 나타낸다.

미소변형을 갖는 등방성 탄성재료에 대한 kinematic 관계식과 구성방정식은 다음과 같다.

$$\varepsilon = \nabla_{sym} u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T), \quad (16)$$

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(tr\varepsilon)\mathbf{1} \quad (17)$$

여기서 $tr\varepsilon$ 은 변형률 텐서 ε 의 트레이스(trace)이다.

균열의 수치적인 묘사는 윤영철 등(2007b)에서 제안한 방법을 따라 균열을 표현하는 직선 세그먼트 양쪽에 절점을 놓아 균열면(Γ_c^\pm)를 묘사했다. 균열이 성장하는 경우, 직선 세그먼트를 추가로 연결시키면서 세그먼트 양쪽에 충분히 가까운 거리로 절점을 배치한다. 또한 균열선단 주변에서 불연속성의 효과가 과장되는 것을 방지하고 부드러운 근사식을

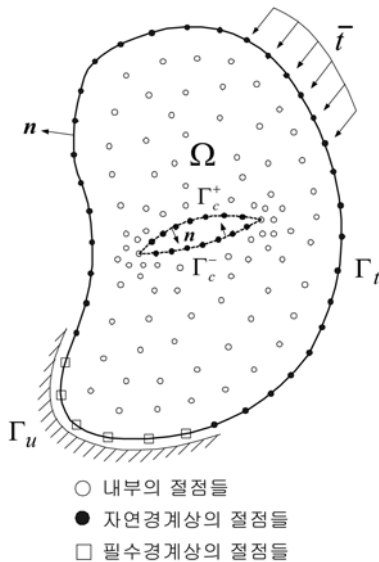


그림 3. 해석대상의 절점을 이용한 이산화 (내부영역 Ω , 경계영역 $\Gamma = \Gamma_t \cup \Gamma_u$)

구성하기 위해 Fleming 등(1997)등이 제안한 가중합수 수정법을 적용했다.

본 연구에서는 유한차분법에서 Taylor 전개식을 이용하여 차분식을 구성하는 것과 동일한 방법으로 지배 미분방정식을 이산화한다. 단, 그림 3에서 보듯이 격자가 아닌 절점에서 차분식을 구성한다는 것이 다르다. 차분식으로 이산화하는 강 정칙화에서는 미분에 대한 재생성(reproducing property)만이 필요충분조건이며, 사용하는 미분 값이 수학적으로 엄밀한 값일 필요가 없기 때문에 이동최소제곱 Taylor 근사합수를 사용하는 것은 매우 효과적인 선택이다.

표 2에는 해석영역 내의 각 절점에서 이산화방정식을 구성할 때 필요한 평형방정식, 자연경계 조건식, 필수경계 조건식에 대한 차분식을 정리해 놓았다.

식(18a)~(18f)을 조합하면 최종적으로 다음과 같은 전체 계방정식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}^\Omega \\ \mathbf{K}^{\Gamma_t} \\ \mathbf{K}^{\Gamma_u} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u}^h = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^\Omega \\ \mathbf{f}^{\Gamma_t} \\ \mathbf{f}^{\Gamma_u} \end{pmatrix} \quad (19)$$

여기서 $\mathbf{K}^\Omega, \mathbf{K}^{\Gamma_t}, \mathbf{K}^{\Gamma_u}$ 는 각각 내부영역 절점에 대한 평형방정식, 자연경계상 절점에 대한 조건식, 필수경계상 절점에 대한 조건식을 차분식으로 만들고 절점해에 붙게 되는 계수들을 정리한 행렬식이다. $\mathbf{u}^h = (u_{x1}, u_{y1}, u_{x2}, u_{y2}, \dots)^T$ 는 절점해 벡터를 나타내고, $\mathbf{f}^\Omega, \mathbf{f}^{\Gamma_t}, \mathbf{f}^{\Gamma_u}$ 는 $\mathbf{K}^\Omega, \mathbf{K}^{\Gamma_t}, \mathbf{K}^{\Gamma_u}$ 에 상응하는 일반화된 힘벡터들이다. 이와 같이 구성된 계방정식은 어느 정도 밴드화(banded)되어 있으나 대칭은 아니다. 각 차분식이 선형독립이라면 계수행렬은 특이성을 나타내지 않을 것이다. 본 연구에서는 지배방정식의 미분차수에 따라 팽창계수 ρ 를 적절하게 곱해주는 조작을 통해 계방정식의 강성행렬의 특성을 개선했다.

4. 수치예제

4.1 선단주변장을 갖는 사각형 패치시험(patch test)

내적확장된 이동최소제곱 유한차분법의 성능을 평가하기 위해 균열을 포함한 사각형 패치에 기지의 모드 I과 모드

표 2. 평형방정식, 자연경계조건식, 필수경계조건식에 대한 차분식

지배방정식	차분식
평형방정식	$\sum_I \{(\lambda+2\mu)\Phi_I^{(2,0)}(x_K) + \mu\Phi_I^{(0,2)}(x_K)\}u_{xI} + \sum_I (\lambda+\mu)\Phi_I^{(1,1)}(x_K)u_{yI} = b_x(x_K) \quad (18a)$
	$\sum_I (\lambda+\mu)\Phi_I^{(1,1)}(x_K)u_{xI} + \sum_I \{\mu\Phi_I^{(2,0)}(x_K) + (\lambda+2\mu)\Phi_I^{(0,2)}(x_K)\}u_{yI} = b_y(x_K) \quad (18b)$
자연경계조건식	$\sum_I \{n_x(\lambda+2\mu)\Phi_I^{(1,0)}(x_K) + n_y\mu\Phi_I^{(0,1)}(x_K)\}u_{xI} + \sum_I \{n_y\mu\Phi_I^{(1,0)}(x_K) + n_x\lambda\Phi_I^{(0,1)}(x_K)\}u_{yI} = \bar{t}_x(x_K) \quad (18c)$
	$\sum_I \{n_y\lambda\Phi_I^{(1,0)}(x_K) + n_x\mu\Phi_I^{(0,1)}(x_K)\}u_{xI} + \sum_I \{n_x\mu\Phi_I^{(1,0)}(x_K) + n_y(\lambda+2\mu)\Phi_I^{(0,1)}(x_K)\}u_{yI} = \bar{t}_y(x_K) \quad (18d)$
필수경계조건식	$\sum_I \Phi_I^{(0,0)}(x_K)u_{xI} = \bar{u}_x(x_K) \quad (18e)$
	$\sum_I \Phi_I^{(0,0)}(x_K)u_{yI} = \bar{u}_y(x_K) \quad (18f)$

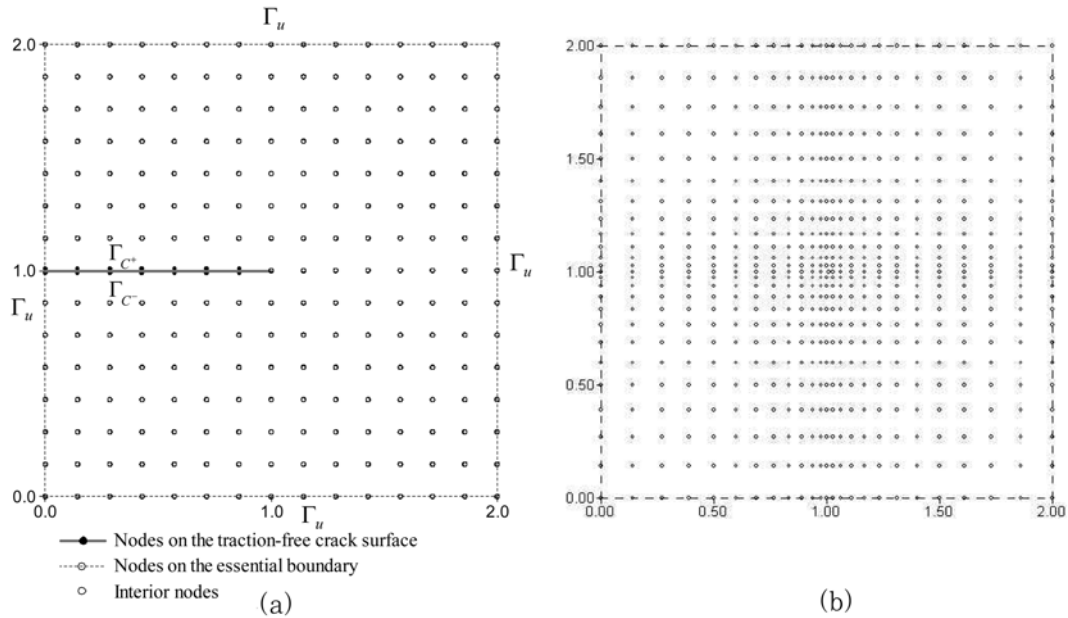


그림 4. (a) 232개 절점이 균등하게 분포된 균열 패치, (b) 637개의 절점을 이용한 적응적 절점분포를 갖는 균열 패치

표 3. 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법으로 계산된 응력확대계수의 오차

절점간 거리(절점수)	재계산된 모드 I 응력확대계수	상대오차 % (모드 I)	재계산된 모드 II 응력확대계수	상대오차 % (모드 II)
h=0.250 (81)	1.0002	0.02	1.0007	0.07
h=0.143 (225)	1.0003	0.03	1.0002	0.02
h=0.083 (625)	1.0001	0.01	0.9999	0.01

II 선단주변 변위장을 경계조건으로 부여하고 패치내부의 변위, 응력을 계산한다. 길이 a 의 균열을 포함하는 $2a \times 2a$ 크기의 사각형 패치에 대해 해석결과로부터 얻은 변위와 응력을 정확해와 비교한다. 균열선단은 패치의 중심에 위치하고 수렴률 조사를 위해 85, 232, 637개 절점이 균등하게 배치된 패치를 고려한다. 그림 4(a)는 232개의 절점을 배치한 패치의 예이다. 그림 4(b)에는 637개의 절점을 절점간 거리의 비(h_{max}/h_{min})가 10이 되도록 선단주변에 집중하여 배치한 균열패치의 모습을 도시했다. 이것은 내적확장이 없는 경우 균열선단 근방에서 응력을 묘사하는 성능을 내적확장을 사용한 경우와 비교하기 위한 것이다. 균열선단 주변장에 대한 이론해는 표 1에 이미 주어졌으며, 균열선단 주변장의 정의를 위해 필요한 모드 I과 모드 II 응력확대계수는 단위값으로 규정했다. 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법으로 계산한 응력값을 이용하여 교차적분법(interaction integral; Moran과 Shih, 1987)으로 계산된 응력확대계수 값과 균열선단 주변장의 정의를 위해 미리 규정한 값을 비교했다. 파괴모드에 상관없이 응력확대계수들은 모두 0.1% 이내의 상대오차 범위 내에서 계산되었고, 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법이 탄성균열문제를 정확히 해석할 수 있음을 확인했다.

수렴률 조사를 위해 식 (20)과 같이 에너지 놈에 대한 상대오차를 정의한다.

$$|E|_{energy} = \frac{\left[\int_{\Omega} (\epsilon_{ex} - \epsilon_{num}) : (\sigma_{ex} - \sigma_{num}) \right]^{1/2}}{\left[\int_{\Omega} \epsilon_{ex} : \sigma_{ex} \right]^{1/2}} \quad (20)$$

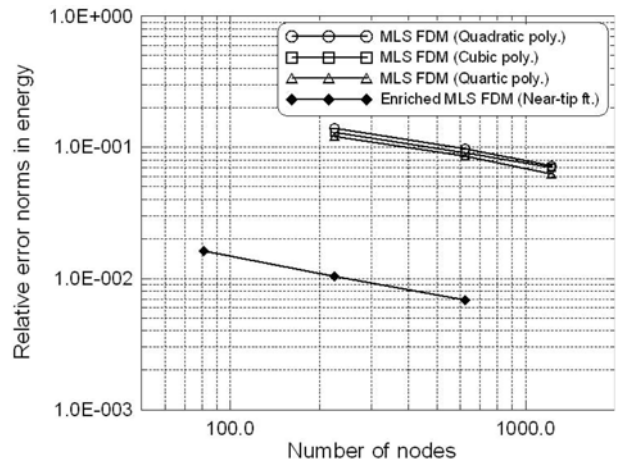


그림 5. 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법의 에너지 놈 수렴률 (선단주변함수를 포함하지 않고 다항식 기저의 차수를 높인 경우와 비교)

여기서 아래 첨자 'ex'와 'num'은 각각 이론해와 수치해를 가리킨다. 상대오차 계산시 배경 요소망(background mesh)을 구성하고 수치적분을 수행했다.

내적확장 없이 다항식의 차수를 증가시키는 경우, 그림 4(b)와 같이 균열선단 주변에 절점의 밀도를 높인 패치를 사용했다. 그림 5는 균열을 포함한 패치 경계값문제에 대한 에너지 놈 오차의 수렴률을 나타낸다. L^2 오차의 수렴률은 약 1 정도의 값을 갖는 것으로 나타났으며, 선단주변함수의 도입에 의해 수렴률 기울기가 특이성이 없는 문제와 비슷한 수준으로 개선되었다. 그림 6에는 무차원 값으로 표기된 균

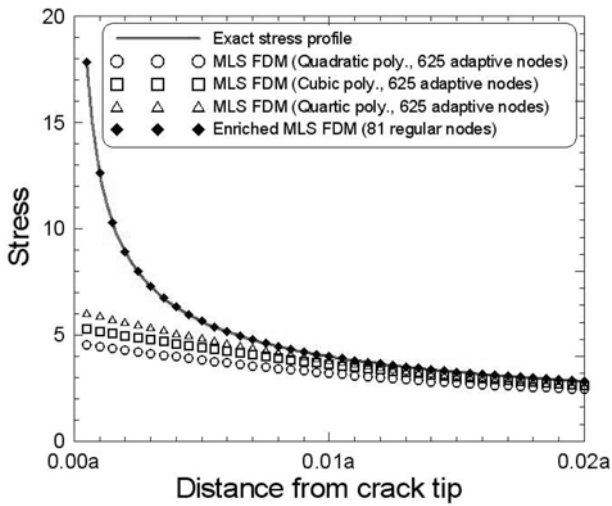


그림 6. 계산된 선단주변 응력의 profile들 (선단주변함수를 포함하지 않고 다항식 기저의 차수를 높인 경우와 비교)

열선단 앞쪽의 응력 profile을 도시했다. 선단주변함수를 포함하지 않는 경우에는 625개의 절점을 균열선단 주변에서 밀도가 높아지도록 하여 절점간 거리의 비(h_{max}/h_{min})가 10이 되도록 유지했고, 선단주변함수를 사용하는 경우에는 단지 81개의 절점만을 균등하게 분포시켜 얻은 결과이다. 다항식 기저의 차수를 늘리는 것은 특이성을 갖는 탄성균열 문제에서 효과적이지 못한 반면, 내적 확장된 이동최소제곱 유한차분법은 2차 다항식만 사용해도 오차를 획기적으로 감소시키면서 특이거동을 갖는 응력 특성을 정확하게 묘사했다.

4.2 인장하중을 받고 성장하는 편측균열 문제

본 절에서는 그림 7과 같이 상단에 인장하중($\sigma_y=1$)을 받는 판부재 내에서 편측균열이 성장하는 문제를 고려한다. 부재는 평면응력상태이고, 탄성계수와 포와송비는 각각 $E=3 \times 10^7$, $\nu=0.25$ 로 주어진다. 수치계산을 위해 495개의 절점을 균열선단주변에서 밀도를 높여 배치했다. 균열은 $a=2.0$ 에서 $a=5.0$ 까지 매 해석단계마다 씩 성장시켰다. 그림 8에는 각 해석단계에서 계산된 응력확대계수를 Tada 등

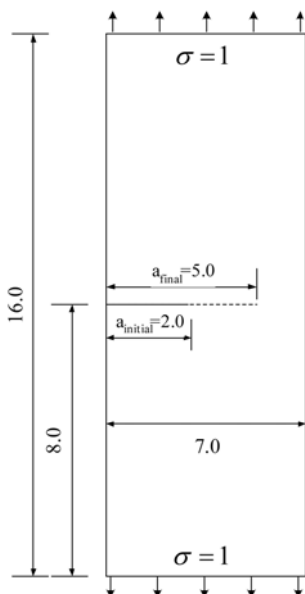


그림 7. 인장하중을 받는 편측균열을 갖는 직사각형판

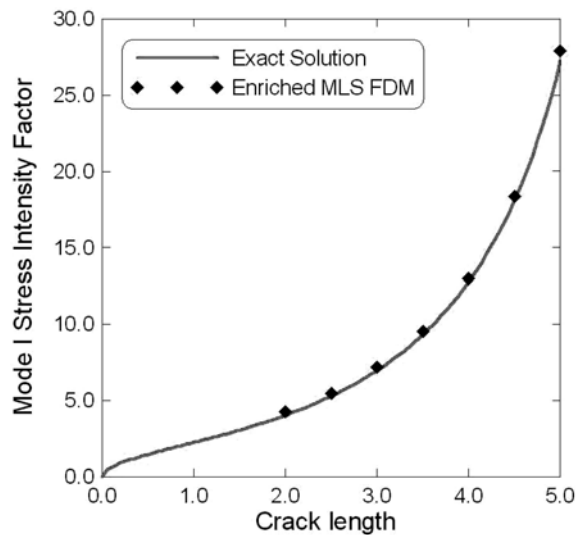


그림 8. 균열길이에 따른 모드 I 응력확대계수(인장하중을 받는 편측균열)

(1973)이 제시한 이론해와 비교하여 도시했으며, 계산된 응력확대계수 값은 이론해와 매우 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다.

4.3 경사진 편측균열 문제

본 절에서는 혼합모드 상태에 있는 경사진 편측균열 문제를 다룬다(그림 9 참조). 판의 폭과 길이는 각각 8과 16이며, 균열의 경사각은 45° 이고, 양단에서 단위크기의 인장하중을 받고 있다. 다양한 길이를 갖는 경사균열에 대해 모드 I과 모드 II 응력확대계수를 계산한 후, Murakami(1986)가 제시한 응력확대계수 핸드북의 값과 비교했다. 근사식 구성을 위해 선단주변함수를 포함한 2차 다항식을 사용했으며, 871개의 절점을 사용하여 모델을 구성했다. 교차적분의 영역은 2×2 로 고정했다. 그림 10에는 판의 폭으로 정규화된 균열길이 a/W 에 대한 정규화된 모드 I, II 응력확대계수 값

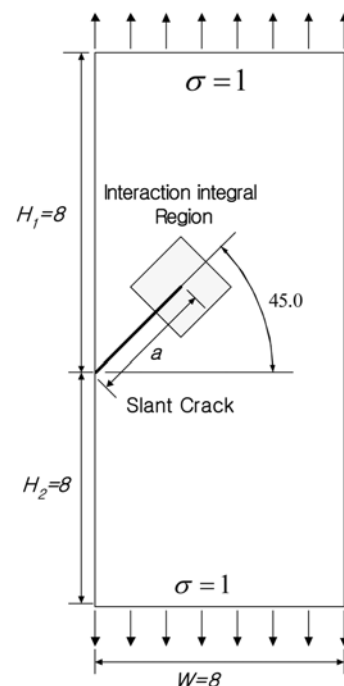


그림 9. 인장하중을 받는 경사진 편측균열 문제

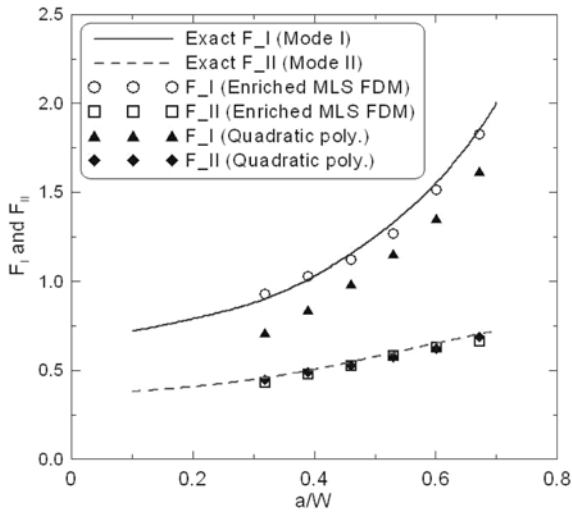


그림 10. 다양한 길이를 갖는 편축균열문제에 대한 정규화된 모드 I, 모드 II 응력확대계수

즉, $F_I = K_I / \sigma \sqrt{\pi a}$, $F_{II} = K_{II} / \sigma \sqrt{\pi a}$ 를 도실했다. 내적확장에 의한 모드 II 응력확대계수의 정확도 향상은 기대에 미치지 못했지만, 모드 I 응력확대계수 값의 정확도는 크게 향상된 것을 확인할 수 있다.

그림 11(a)는 2차 다항식만 사용한 이동최소제곱 유한차분

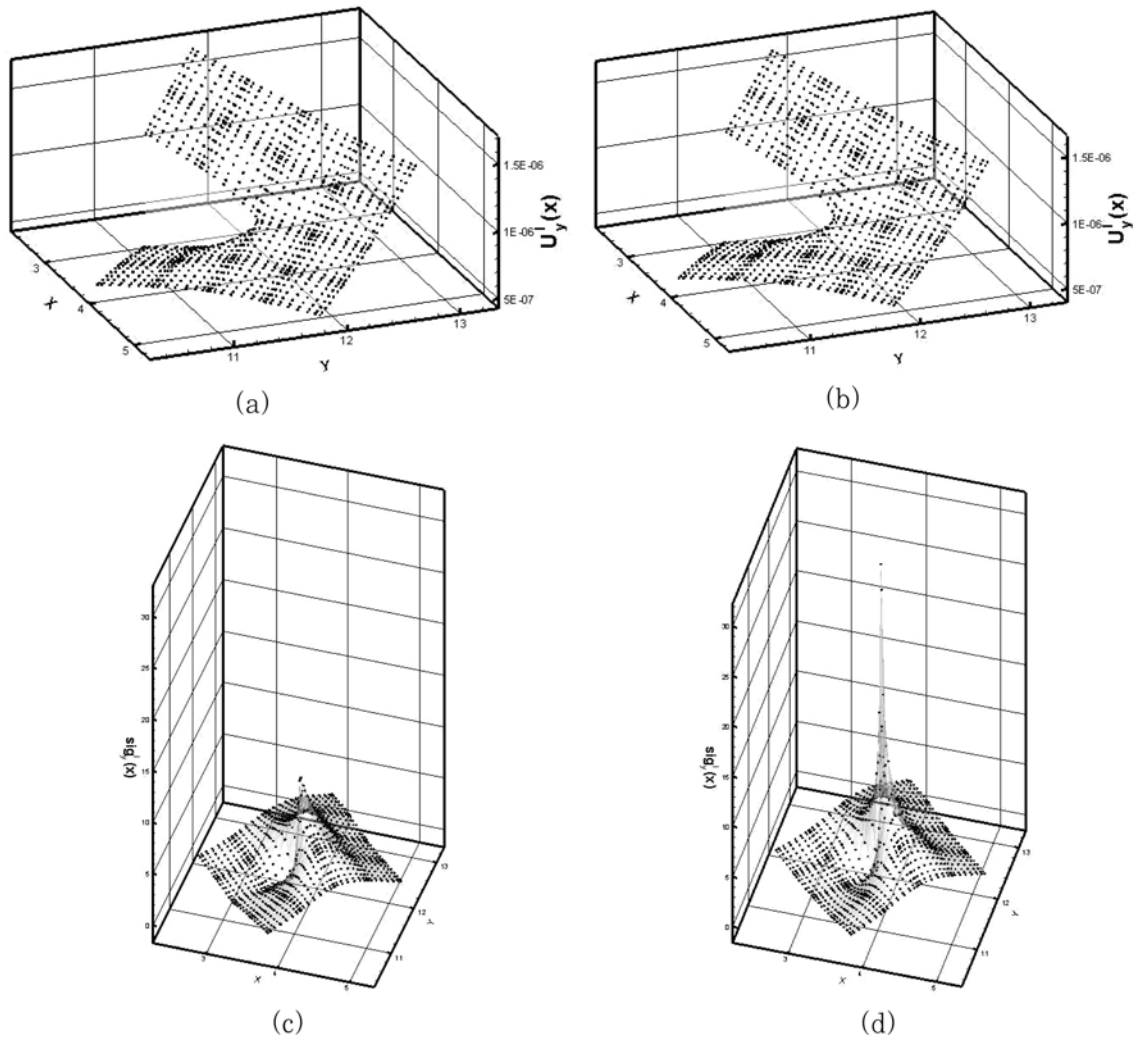


그림 11 (a) 확장되지 않은 이동최소제곱 유한차분법에 의한 $u'_y(x)$ 계산결과, (b) 내적 확장된 이동최소제곱 유한차분법에 의한 $u'_y(x)$ 계산결과, (c) 확장되지 않은 이동최소제곱 유한차분법에 의한 $\sigma'_{yy}(x)$ 계산결과, (d) 내적 확장된 이동최소제곱 유한차분법에 의한 $\sigma'_{yy}(x)$ 계산결과

5. 결 론

본 연구는 균열로 인한 선단응력의 특이성을 잘 묘사하면서도 계산 효율성에 있어서는 기존의 이동최소제곱 유한차분법과 비교될 수 있는 새로운 기법을 제시했다. 이동최소제곱 유한차분법은 유한요소법과 유한차분법이 지배방정식의 이산화시 요소망 또는 격자를 구성하는 것과 달리 절점만을 이용해 근사식을 구성하고 지배방정식을 차분한다. 본 연구

에서는 선단주변 변위장을 정확히 묘사하기 위해 이동최소제곱 Taylor 다항식에 근거한 미분근사에 Westergaard 해로부터 추출한 선단주변합수를 이동최소제곱 센스로 추가한 내적확장된 근사식을 제시했다. 이 근사식은 미분시 특이성을 갖기 때문에 균열선단에서 응력장을 정확히 묘사할 수 있다. 내적확장된 근사식 구성시 선단주변합수의 도입으로 인한 계산량의 증가가 미미하고, 전체 계방정식에 추가적으로 도입되는 미지계수가 없기 때문에 계산효율이 뛰어나다. 더욱이, 고체문제에서의 일반적인 평형방정식과 경계조건식 뿐만 아니라 균열면에 대한 추가적인 조건까지 절점에서 직접 차분식을 구성해 이산화했기 때문에 계산량도 상대적으로 매우 작다.

내적확장된 근사식에 대한 재생성 시험을 통해 본 연구에서 제안한 미분근사 방법이 균열면 변위의 불연속성과 균열선단의 응력 특이성을 정확히 묘사하는 것을 보였다. 이동최소제곱 Taylor 다항식 기저의 차수를 높이는 방법으로 묘사할 수 없는 응력 특이성을 정확히 묘사했다. 균열을 포함한 패치문제를 해석하고 조사한 에너지 높 상대오차의 수렴률로부터 수렴률 기울기 자체의 향상은 기대에 미치지 못하지만, 오차 자체의 크기를 획기적으로 줄일 수 있었다. 또한, 모드 I과 혼합모드 균열의 성장해석을 통해 기존의 이동최소제곱 유한차분법과 비교하여 내적확장된 이동최소제곱 유한차분법이 응력확대계수 계산의 정확도를 향상시키는 것을 보였다. 제안된 근사식은 경사진 편축 균열의 경우에도 균열개구변위의 형태를 정확히 묘사한다. 결론적으로 본 연구에서는 응력의 특이성을 갖는 탄성균열문제에 대한 정확하고 효율적인 수치기법을 제시했다. 개발된 해석법은 추후 실제 구조물에서 발생하는 복잡한 균열의 거동을 해석하고 예측할 수 있는 보다 범용적인 해석기법 개발에 대한 기초가 될 뿐 아니라, 손상된 구조물을 상태를 평가하고 유지관리하는 기술과 접목될 때 그 공학적인 활용도 범위는 더 넓어진다. 더 나아가 균열문제 뿐만 아니라 복합재료에서 발생하는 계면경계 문제와 같이 다양한 형태의 특이해 또는 해의 미분 특이성을 갖는 공학문제들에도 확장되어 적용될 수 있을 것으로 기대된다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구되었음 (KRF-2007-313-D00779).

참고문헌

윤영철, 서창범, 김명원, 이상호(2005a) 무요소법의 약정식화와 강정식화를 위한 일관된 분산미분근사 (1): 수학적 이론배경 및 이산화, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제25권, 제5A호, pp. 909-914,

- 윤영철, 서창범, 김명원, 이상호(2005b) 무요소법의 약정식화와 강정식화를 위한 일관된 분산미분근사 (2): 수치예제 중심으로, **대한토목학회 논문집**, 대한토목학회, 제25권, 제5A호, pp. 915-922.
- 윤영철, 김동조, 이상호(2007a) 탄성균열해석을 위한 그리드 없는 유한차분법. **한국전산구조공학회 논문집**, 한국전산구조공학회, 제20권 제3호, pp. 321-327.
- 윤영철, 김효진, 김동조, 윙 캄 리우, 테드 벨리체코, 이상호(2007b) 이동최소제곱 유한차분법을 이용한 응력집중문제 해석 (I): 고체문제의 정식화. **한국전산구조공학회 논문집**, 한국전산구조공학회, 제20권 제4호, pp. 493-499.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y., and Gu, L. (1994) Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256.
- Belytschko, T. and Black, T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.45, No. 5, pp. 601-620.
- Belytschko, T. and Fleming, M. (1999) Smoothing, enrichment and contact in the element-free galerkin method, *Computer and Structures*, Vol. 71, pp. 173-195.
- Benzley, S.E. (1974) Representation of singularities with isotropic finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 8, pp. 537-545.
- Fleming, M., Chu, Y.A., Moran, B., and Belytschko, T. (1997) Enrichment Element-Free Galerkin methods for crack tip fields, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 1483-1504.
- Lee, S.-H. and Yoon, Y.-C. (2003) An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 56, pp. 1291-1314.
- Lee, S.-H. and Yoon, Y.-C. (2004) Meshfree point collocation method for elasticity and crack problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 61, No. 1, pp. 22-48.
- Moes, N., Dolbow, J., and Belytschko, T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, No. 1, pp. 131-150.
- Moran, B. and Shih, C.F. (1987) Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 27, pp. 615-641.
- Murakami, Y. (1986) Stress intensity factors handbook, Oxford, New York, Pergamon.
- Nash, L.G. Jr. and Peter, D.H. (1978) Stress intensity factors by enriched finite elements. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 10, pp. 485-496.
- Tada, H, Paris, P.C., and Irwin, G.R. (1973) The stress analysis of cracks handbook. Del Research Corporation, Hellertown, Pa.
- Yoon, Y.-C., Lee, S.-H., and Belytschko, T. (2006) Enriched mesh-free collocation method with diffuse derivatives for elastic fracture, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 51, No. 8, pp. 1349-1366.
- Ventura, G, Xu, J.X., and Belytschko, T. (2002) A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 923-944.

(접수일: 2009.5.1/심사일: 2009.6.12/심사완료일: 2009.7.20)