

<학술논문>

DOI:10.3795/KSME-A.2009.33.10.1163

베이지안 접근법을 이용한 입력변수 및 근사모델 불확실성 하에 서의 신뢰성 분석

안다운* · 원준호** · 김은정** · 최주호†

(2009년 7월 30일 접수, 2009년 9월 21일 수정, 2009년 9월 23일 심사완료)

Reliability Analysis Under Input Variable and Metamodel Uncertainty Using Simulation Method Based on Bayesian Approach

Dawn An, Junho Won, Eunjeong Kim and Joocho Choi

Key Words : Reliability Analysis(신뢰성 분석), Input Variable Uncertainty(입력변수 불확실성), Metamodel Uncertainty(근사모델 불확실성), Bayesian Approach(베이지안 접근법), Markov Chain Monte Carlo(마코프체인몬테카를로), Reliability Based Design Optimization(신뢰성 기반 최적설계)

Abstract

Reliability analysis is of great importance in the advanced product design, which is to evaluate reliability due to the associated uncertainties. There are three types of uncertainties: the first is the aleatory uncertainty which is related with inherent physical randomness that is completely described by a suitable probability model. The second is the epistemic uncertainty, which results from the lack of knowledge due to the insufficient data. These two uncertainties are encountered in the input variables such as dimensional tolerances, material properties and loading conditions. The third is the metamodel uncertainty which arises from the approximation of the response function. In this study, an integrated method for the reliability analysis is proposed that can address all these uncertainties in a single Bayesian framework. Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method is employed to facilitate the simulation of the posterior distribution. Mathematical and engineering examples are used to demonstrate the proposed method.

1. 서론

산업현장에서는 제품의 경쟁력을 높이기 위해, 생산비용과 불량률을 감소시키는 일에 관심을 집중하고 있다. 이러한 노력의 일환으로 과거 경험에 의한 ‘적절한’ 안전계수 기반 확정론적

(deterministic) 설계에서 탈피하여, 1970년대 초부터 확률적 기법을 이용하여 각종 변수의 불확실성(uncertainty)을 고려하고 제품의 품질을 안전확률(reliability)이나 실패확률(failure probability)로 정량화 하여 설계의 제한조건으로 이용하는 신뢰성 설계에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다.

신뢰성 설계에서는 신뢰성 분석(reliability analysis)이 수행되는데, 이는 입력변수의 불확실성(input variable uncertainty)으로 인한 반응함수의 불확실성을 규명하고 이로부터 반응치의 안전 또는 실패확률을 구하는 것이다. 초기의 신뢰성 분석 연구는 입력변수의 불확실성을 물질의 본질적(inherent) 특성으로서의 물리적 불확실성(aleatory uncertainty)으로 가정하고, 무수히 많은 샘플데이

[이 논문은 2009년도 신뢰성부문 춘계학술대회(2009. 5. 21., BEXCO) 발표논문임]

* 주저자, 회원, 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학과

** 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학과

† 책임저자, 회원, 한국항공대학교, 항공우주 및 기계공학부

E-mail : jhchoi@kau.ac.kr

TEL : (02)300-0117 FAX : (02)3158-2191

터를 통해 입력변수의 확률분포를 확실히 안다는 전제 하에서 진행하였다.⁽¹⁻³⁾ 그러나, 산업현장에서 실제로 존재하는 불확실성은 부족한 샘플데이터로 인한 통계적(statistical) 또는 인식론적 불확실성(epistemic uncertainty)이 대부분으로 기존의 방법으로는 해결이 잘 되지 않는 문제가 있었다. 최근에 이러한 불확실성을 효과적으로 고려하고 제품설계에 적용하기 위한 베이지안 접근법(Bayesian approach)의 연구가 관심을 모으고 있다.^(4,5) 그러나 지금까지의 베이지안 방법 연구는 확률변수의 불확실성 모델링을 위해 신뢰성 분석을 매우 많이 수행하였고 따라서 많은 계산시간을 요하는 문제가 있었다.^(5,6) 이로 인해 지금까지의 인식론적 불확실성을 고려한 신뢰성 분석 연구는 현실적으로 적용되기 어려운 측면이 있으며, 따라서 본 연구에서는 입력변수의 사후예측분포(posterior predictive distribution)방법을 이용하여 이러한 문제를 해결하고자 한다. 한편 신뢰성분석을 위해서는 반응함수 계산을 반복하게 되는데, 계산비용이 높은 경우(예를 들어 유한요소해석)에는 적은 수의 해석결과만을 가지고 근사모델을 구축한 후 이것을 가지고 반응값 계산을 하는 것이 계산시간 측면에서 더 효율적이다. 하지만, 근사모델에는 유한한 해석결과를 통해 실제모델을 대체함에 따른 불확실성이 존재하게 되며, 이를 근사모델 불확실성(metamodel uncertainty)이라고 한다.^(7,8)

본 연구에서는 베이지안 접근법을 통해 입력변수 불확실성에서의 물리적 및 인식론적 불확실성뿐만 아니라, 근사모델 불확실성까지 통합 고려하여 신뢰성분석을 수행하는 방법을 개발하였다. 이 과정에서 사후분포를 샘플링하기 위한 방법으로 마코프체인몬테카를로(Markov Chain Monte Carlo, MCMC) 시뮬레이션 방법을 이용하였다. 본 연구를 통하여 실제 산업현장에 존재하는 불확실성을 고려하여 현실적으로 적용이 가능한 신뢰성 분석 및 신뢰성 기반 최적설계를 위한 새로운 방향을 제시하고자 한다.

2. 베이지안 접근법

2.1 베이즈 정리(Bayes' theorem)

확실히 알려지지 않은 인식론적 불확실성에서의 확률 파라미터를 추정하는 데에 베이지안 접근법을 이용할 수 있다. 베이지안 접근법은 확률변수 X 에 대해 조건부 확률을 이용하는 다음과 같은

베이즈 정리를 기본이론으로 한다.

$$p(\theta|\mathbf{x}) \propto p(\mathbf{x}|\theta)p(\theta) \quad (1)$$

여기서 θ 는 추정하고자 하는 확률 파라미터(X 가 정규분포를 한다면, θ 는 모집단의 평균 μ 와 모집단의 표준편차 σ 이다), \mathbf{x} 는 유한개의 측정된 샘플데이터(sample), $p(\mathbf{x}|\theta)$ 는 θ 하에서 측정된 샘플데이터의 우도(likelihood), $p(\theta)$ 는 θ 의 사전 확률밀도함수(prior Probability Density Function, prior PDF), $p(\theta|\mathbf{x})$ 는 측정된 샘플데이터 \mathbf{x} 하에서 업데이트 되는 사후확률밀도함수(posterior PDF)이다. 새로운 샘플데이터가 추가되면 사후분포 $p(\theta|\mathbf{x})$ 는 다시 사전분포 $p(\theta)$ 로 활용가능하며, 이러한 과정이 반복되면서 θ 에 대한 신뢰도를 점점 더 향상 시키게 되는데 이를 베이지안 학습효과라 한다.

2.2 마코프체인몬테카를로(MCMC)

일반적으로 사후분포 $p(\theta|\mathbf{x})$ 는 특정 확률분포 식으로 주어지지 않고 임의의 식 또는 내재적(implicit) 식으로 복잡하게 표현되는데, 이 경우 사후분포를 적분하거나 시뮬레이션으로 샘플을 생성하는 것이 쉽지 않게 된다. 마코프체인몬테카를로(Markov Chain Monte Carlo, MCMC)법은 이를 효과적으로 수행하기 위해 최근에 개발된 시뮬레이션 방법의 하나로, grid · rejection · importance sampling 방법 등에 비해 더 효율적인 샘플링이 가능하다. MCMC의 대표적인 방법으로 Metropolis-Hastings(M-H) 알고리즘이 있으며, 불확실변수가 두 개 이상일 경우에는 M-H 알고리즘의 특별한 경우로서 Gibbs sampling 방법을 이용하기도 한다. M-H 알고리즘은 식 오류! 참조 원본을 찾을 수 없습니다.와 같은 과정을 통해, 이전 샘플링 결과가 다음 샘플링에 영향을 미쳐 체인처럼 맞물리는 과정의 반복으로 이루어진다.

1. Initialise $s^{(0)}$.

2. For $i = 0$ to $N - 1$

- Sample $u \sim U_{[0,1]}$.

- Sample $s^* \sim q(s^* | s^{(i)})$.

- if $u < A(s^{(i)}, s^*) = \min \left\{ 1, \frac{p(s^*)q(s^{(i)} | s^*)}{p(s^{(i)})q(s^* | s^{(i)})} \right\}$ (2)

$s^{(i+1)} = s^*$

else

$s^{(i+1)} = s^{(i)}$

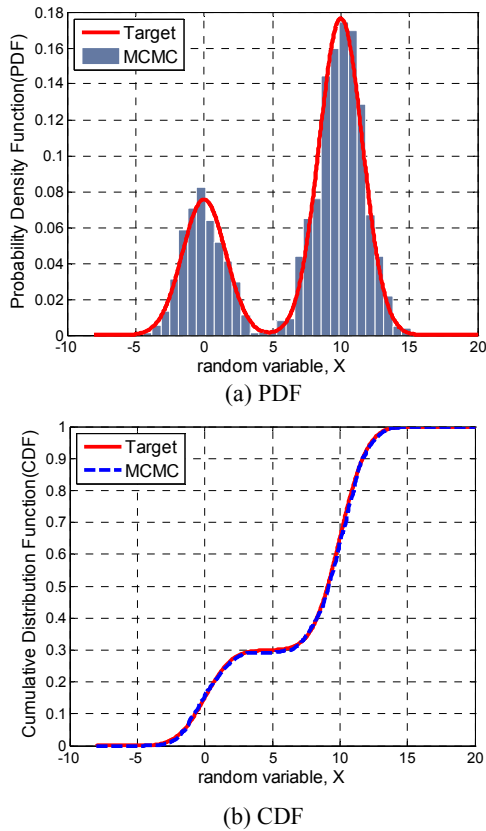


Fig. 1 Results of MCMC simulation

여기서 $s^{(0)}$ 는 추정하고자 하는 불확실변수의 초기값, N 은 불확실변수를 샘플링 할 개수, U 는 균등분포(uniform distribution), $p(s)$ 는 샘플링 하고자 하는 PDF(target PDF), $q(s^* | s^{(i)})$ 는 임의의 제안 함수(proposal PDF)로 샘플 s^* 를 추출 할 경우 가중계수 w 가 곱해지기도 한다.

이와 같은 MCMC 시뮬레이션방법은 사후분포가 임의의 수식으로 표현되거나 또는 명시적 식으로 표현되지 못한 경우에도 적용 가능하기 때문에, 사후분포가 특정 확률분포로만 표현되는 경우에만 적용 가능한 차원감소법(Dimension Reduction Method, DRM)⁽²⁾에 비해 범용성을 갖는 장점이 있다. 그러나, MCMC에서는 가중계수 w 의 크기에 따라 결과가 달라지는 문제가 있기 때문에 신뢰성 분석 도구로써 범용성과 함께 효율성도 갖추기 위해서는 아직 개선할 부분이 많다고 할 수 있다. MCMC 시뮬레이션의 한 예로써, M-H 알고리즘을 이용하여 다음과 같은 임의의 수식으로 표현되는 확률밀도함수를 샘플링하였다.

$$p(x) \propto 0.3 \exp(-0.2x^2) + 0.7 \exp(-0.2(x-10)^2) \quad (2)$$

$N=5000$ 개의 샘플링 과정을 통한 결과 0(a)와

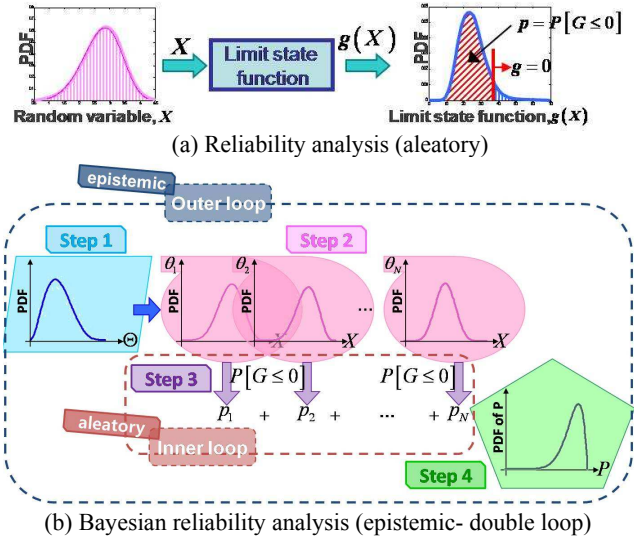


Fig. 2 Reliability analysis procedure

(b)에 확률밀도함수(PDF) 및 누적분포함수(CDF) 분포를 각각 해석해와 함께 도시하였고, 시뮬레이션 결과가 실제함수와 잘 일치함을 확인할 수 있다.

3. 입력변수 및 근사모델 불확실성

3.1 입력변수 불확실성

3.1.1 물리적 불확실성에서의 신뢰성 분석

무수히 많은 샘플데이터에 기반한 물리적 불확실성의 경우에는 확정값으로 주어지는 입력 확률변수의 파라미터 θ 를 통해 확률분포를 알 수 있고 이로부터 반응치 확률값을 하나의 값으로 구할 수 있다. 이것이 기존의 신뢰성 분석프로세스로서 0(a)에 이 과정이 개략적으로 표현되어 있고, 여기서의 결과값은 확률값 p 가 된다. 하지만 산업현장에서 실질적으로 존재하는 불확실성은 부족한 샘플데이터로 인하여 θ 가 확정값으로 주어지지 않는 인식론적 불확실성이기 때문에 물리적 불확실성에서의 신뢰성 분석과는 다른 방법이 요구된다.

3.1.2 인식론적 불확실성에서의 신뢰성 분석

인식론적 불확실성을 위한 기존의 베이저안 신뢰성 분석은 내측(inner) 및 외측(outer)의 이중(double) loop 과정^(5,6)을 거쳐 수행되며, 0(b)에 이 과정이 나타나 있다. 이를 살펴보면, 외측 loop에서 부족한 데이터에 기반하여 확률변수의 파라미터 Θ (이것 역시 확률변수가 되므로 θ 대신 Θ 로 표시)의 분포를 추정하고(Step 1), 이로부터 N 개의 θ 를 샘플링 하여 각 θ 에 해당하는 입력변수의 분포를 구한다(Step 2). 입력변수의 분포가 구해지면

내측 loop 에서 0(a)와 같은 물리적 불확실성에서의 신뢰성 분석과 같은 과정을 통해 확률값 p 를 구한다. 이 과정에서 N 개의 θ 로부터 N 개의 p 가 얻어진다(Step 3). 마지막으로, 다시 외측 loop 에서 $p_i (i=1, \dots, N)$ 을 이용하여 확률 p 에 대한 확신 정도(degree of belief)로써 확률의 확률분포를 얻게 된다(Step 4). 따라서, 이중 loop 를 통한 인식론적 불확실성에서의 신뢰성분석에서는 샘플데이터의 부족으로 인해 확률값이 확정값이 아닌 신뢰구간(Confidence Interval, CI)으로 제시된다. 만일 안전을 고려한다면 확률의 용도에 따라 하한 또는 상한값이 설계의 제한조건으로 사용되어야 한다.

이중 loop 방법을 이용하면 신뢰성 분석 결과에 대한 믿음의 정도를 통해 설계의 기준을 세울 수 있지만, 앞서 설명한 것처럼 분석과정이 복잡하고 계산시간 또한 오래 걸리기 때문에 현실적인 적용을 위해서는 보다 효율적인 방법의 고려가 필요하다. 본 연구에서는 이를 위해 입력변수의 사후예측분포(posterior predictive distribution)를 직접 구하고, 물리적 불확실성에서와 같은 과정을 통해 반응치의 확률값을 구하는 방법을 고려한다.

베이저안 접근법에 기반한 입력변수 X 의 사후예측분포는 다음과 같이 표현될 수 있다.⁽⁷⁾

$$p(\tilde{x} | \mathbf{x}) = \int p(\tilde{x} | \theta) p(\theta | \mathbf{x}) d\theta \quad (3)$$

여기서 \sim 는 예측값을 의미하며 우측 둘째 항은 식 (1)에서 구해진 사후분포를, 첫째 항은 θ 가 주어진 조건에서의 X 의 확률분포를 나타낸다. 두 항의 표현식을 구하고 나면 해석적 적분을 통해 사후예측분포함수를 식 (3)를 통해 구할 수 있다. 그러나 실제로는 이렇게 어렵게 하는 대신 단순히 샘플링으로 얻은 N 개의 θ 데이터를 이용하여

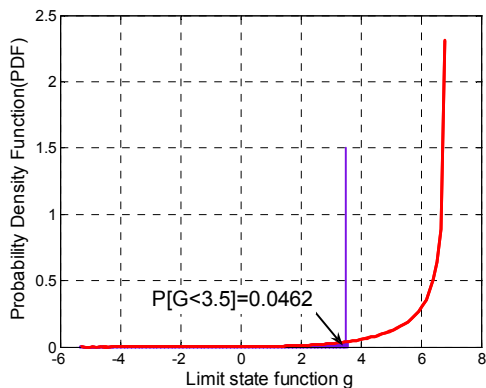


Fig. 3 PDF of limit state function $g(X)$

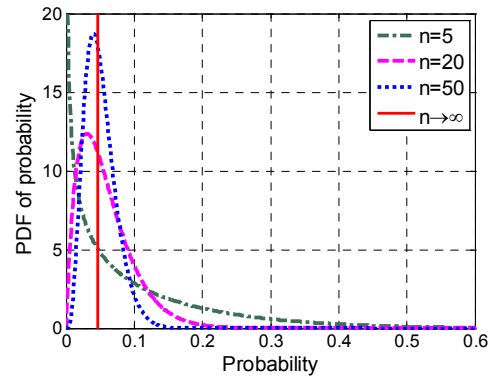
3.1.3 입력변수 불확실성의 신뢰성 분석 결과
물리적 및 인식론적 불확실성 하에서 이중 loop 및 사후예측법을 통한 신뢰성 분석의 특성을 파악하기 위해 다음과 같은 수치예제를 고려한다.⁽⁸⁾

$$g(X) = X + 3\sin(X/2) \quad (4)$$

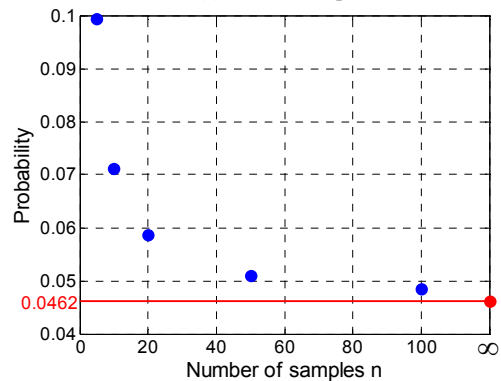
여기서 입력변수 X 는 물리적 불확실성, 즉 무한개의 샘플데이터를 통해 모평균 μ 가 3.5, 표준편차 σ 가 1.2 인 정규 분포를 따른다고 하자. 이를 토대로 확률값 $P[G < 3.5]$ 을 구하기 위해 신뢰성 분석을 실시하면 그 값은 0.0462 로 얻어진다. 본 연구에서는 이를 위해 샘플 수 $N=10^6$ 의 몬테카를로 법을 이용하였다. 이것은 0에 보듯이 입력변수의 확률분포로 인해 형성된 반응함수 g 의 확률밀도함수(PDF)로부터 3.5 보다 작은 확률을 구한 것이다.

Table 1 Reliability analysis results

	5%	95%	interval		prctile	p	predictive
double	0.0024	0.3329	0.3305	$n=5$	65.05	0.0994	
	0.0066	0.2108	0.2042	$n=10$	60.89	0.0712	
	0.0118	0.1350	0.1232	$n=20$	58.74	0.0586	
	0.0206	0.0935	0.0729	$n=50$	56.40	0.0509	
aleatory $p=0.0462$							



(a) Double loop



(b) Predictive

Fig. 4 Results of two methods

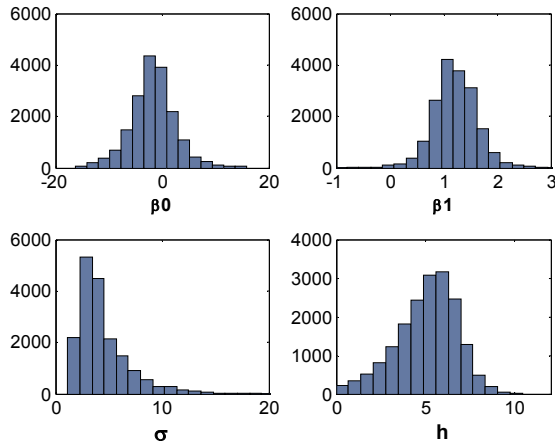


Fig. 5 Posterior distribution of Kriging model variables when data=6

이번에는 입력변수 x 가 샘플데이터 부족으로 인해 인식론적 불확실성을 가지며 샘플데이터 개수에 상관없이 항상 샘플평균과 표준편차가 3.5, 1.2 라고 가정하자. 샘플데이터 개수 n 의 증가에 따라 이중 loop 방법을 이용하여 해를 구한 결과가 Table 1의 좌측 세열에 있다. n 의 증가에 따라 신뢰구간이 줄어들면서 물리적 불확실성에서의 확률값(0.0462)에 수렴한다. 또한 이를 0(a)에도 도시하였는데, n 이 증가하면서 PDF 커브가 점점 붉은 수직선으로 수렴한다. 본 예제가 실패확률을 다루는 것이라면 안전을 위해 95% 상한값을 적용하고, n 의 증가에 따라 0.3329, 0.2108 등으로 정해야 한다. 한편 동일한 문제를 사후예측법을 이용하여 해를 구한 결과가 Table 1의 최우측 열에 있다. 본 결과 역시 n 이 작을 때는 확률값이 비교적 크다가 n 의 증가에 따라 물리적 불확실성에서의 확률값(0.0462)에 점점 수렴하며 이는 0(b)를 통해서도 잘 알 수 있다. 본 결과를 이중 loop 로 구한 확률의 확률분포 중에서의 백분위수로 환산한 결과가 Table 1의 prctile 열에 있으며, 65%에서 출발, 50%(메디안)로 수렴함을 알 수 있다. 두 방법 모두 안전을 고려하여 샘플데이터 부족 시에는 더 높은 확률을 제시하는 점에서는 공통적이나, 사후예측법으로 구한 확률값은 이중 loop 의 95% 상한값에 비해 값이 훨씬 작으므로 설계측면에서 덜 보수적인 결과를 만들 것으로 예상된다.

3.2 근사모델 불확실성

근사모델에는 반응표면모델(Response Surface Method, RSM), 이동최소자승(Moving Least Square,

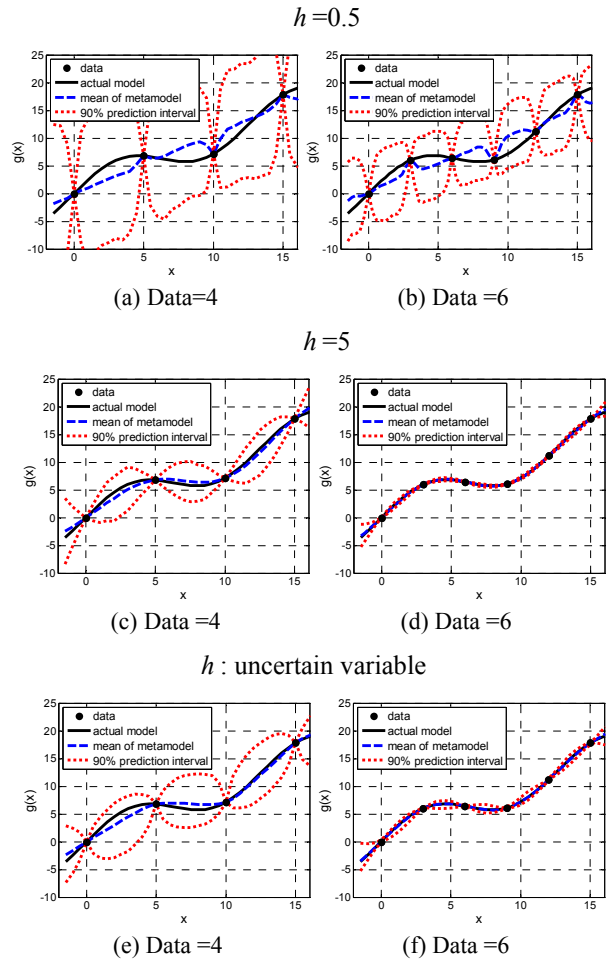


Fig. 6 Metamodel uncertainty

MLS) 및 크리깅(Kriging) 모델 등이 있으며, 본 연구에서는 컴퓨터 실험데이터를 가지고 모델을 만들기 때문에 실험점(data)을 지나가면서 비교적 정확한 근사가 가능한 크리깅 모델을 이용하고자 한다. 그러나 이러한 근사모델링으로 인해 불확실성이 발생하므로 본 절에서는 이를 다루는 방법을 서술한다(자세한 내용은 문헌 (7) 참조). 크리깅 모델 변수들의 사후분포는 식 (5)과 같이 표현되며, 이들의 사후분포를 구하고 나면 반응함수의 사후예측분포는 식 (6)로부터 구할 수 있다.

$$\beta, \sigma^2, h | g \propto (\sigma^2)^{\frac{n_g+2}{2}} |Q_g|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(g-X\beta)' Q_g^{-1}(g-X\beta)\right),$$

$$Q = \exp\left[-(d/h)^2\right], \quad d = |x' - x^j|$$
(5)

$$\tilde{g} | \beta, \sigma^2, h \sim N\left(\tilde{X}\beta + Q_{\tilde{g},g} Q_g^{-1}(g-X\beta), (Q_{\tilde{g}} - Q_{\tilde{g},g} Q_g^{-1} Q_{g,\tilde{g}}) \sigma^2\right)$$
(6)

여기서 β 는 근사모델의 계수(기울기, 절편 등), σ 는 근사모델의 에러를 표현하는 표준편차, Q 는 상관함수(correlation function), h 는 상관함수에 포함되는 계수, $X(=[1 x])$, g 는 주어진 실험점, n_d 는 실험점의 개수, $\tilde{X}(=[1 \tilde{x}])$, \tilde{g} 는 예측값이다.

불확실변수 β, σ^2, h 의 사후분포를 구하기 위해 MCMC 시뮬레이션(30,000 회)을 이용하였다. 식 (4)를 예제로 하여, 실험점이 0에서 data=6 케이스와 같을 때 MCMC 를 수행한 결과 각 변수들의 히스토그램이 0에 있다. 이렇게 구해진 샘플을 가지고 사후예측분포를 구하고, 그 결과로부터 평균(mean) 및 90% 예측신뢰구간을 도출할 수 있는데, 0의 (e), (f)에 그 결과가 있다. 실선이 실제모델, 점선이 근사모델의 90% 예측구간(Prediction Interval, PI), 파선(dashed line)이 평균커브이다. 실험점 증가(data=4 에서 6)에 따라 불확실성(즉 예측구간)이 줄어들어 더 정확한 모델이 됨을 알 수 있다. 한편, h 는 크리깅 모델의 매끄러운 정도를 결정하는 계수인데, 본 예제에서는 h 를 상수로 가정하고 $h=0.5$ 및 $h=5$ 두 케이스에 대해 불확실성 분석을 각각 추가 수행하여 그 결과를 0에 보였다. 이에 의하면 실험점 증가(data=4 에서 6)에 따라 예측구간이 줄어드는 것은 h 에 상관없이 동일하며, h 가 큰 것(0(c), (d))이 작은 것(0(a), (b))보다 더 매끄럽고 불확실성도 작다. 그러나 크리깅 모델에서는 계수 h 가 너무 커지면 특이성(singularity)이 발생할 수도 있기 때문에 이를 무한히 증가시킬 수는 없으며, 실제 문제에서 원함수에 가장 근접한 결과를 만드는 최적의 h 를 찾는 일도 쉽지 않다. 본 연구에서는 이러한 문제점에 착안하여, h 를 불확실 변수로 정하고 사후분포를 통해 예측모델을 구하는 새로운 시도를 하였고, 그 결과 매끄러운 근사모델이 구축된 $h=5$ 에서의 결과와 유사한 수준의 결과를 얻을 수 있었다. 다만, 동일 실험점 수의 결과를 비교할 때 h 의 불확실성 때문에 0(e)와 (f)가 0(c)와 (d)에 비해 예측

구간이 조금 더 넓게 나타나고 있다. 이러한 결과로 미루어 볼 때, h 에 대한 불확실성을 고려함으로써 최적의 h 를 찾기 위한 시행착오를 줄이고, 모델을 확인 할 수 없는 현실문제의 반응함수 근사에 효과적으로 적용될 수 있으리라 판단된다.

3.3 불확실성의 통합

실제 존재하는 불확실성을 제대로 고려하고 현실에 적용 가능한 신뢰성기반 설계 최적화의 수행을 위해서는 입력변수와 근사모델 불확실성의 통합에 대한 연구가 필요함을 앞서 언급하였다.

불확실성의 통합 과정은 식 (6)의 $\tilde{X}=[1 \tilde{x}]$ 에서 \tilde{x} 가 하나의 확정값이 아니라, 입력변수 \tilde{x} 의 불확실성을 고려하여 시뮬레이션 된 값들로 고려됨으로써 이루어진다. 이러한 통합과정에서의 신뢰성 분석을 식 (4)를 예제로 하여 수행하였다. 유한개의 실험점으로부터 만든 크리깅 근사모델 \tilde{g} 을 가지고 불확실성을 가진 입력변수 ($\bar{x}=3.5, s=1.2$) 하에서 확률 $P[\tilde{G}<3.5]$ 을 구한 결과를 Table 2와 0에 나타내었다. 0에 의하면 실험점 개수가 적을수록 근사모델 불확실성 때문에 높은 확률값이 계산되며, 특정 실험점 조건 하에서는 입력변수 샘플데이터 n 이 증가함에 따라 확률값이 감소하면서 특정값으로 수렴함을 알 수 있다.

Table 2 Results of uncertainty integration under uncertainty variable h

aleatory $p=0.0462$	$n=5$	$n=10$	$n=20$	$n=50$
data=4	0.4024	0.3729	0.3657	0.3599
data=5	0.2951	0.2494	0.2329	0.2252
data=6	0.0999	0.0963	0.0796	0.0711

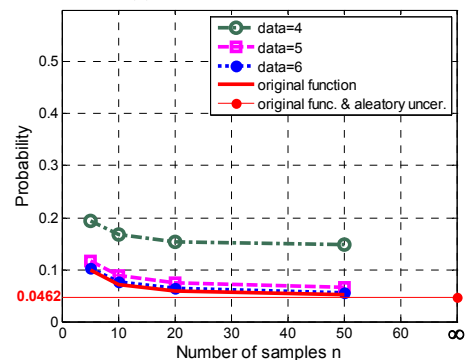
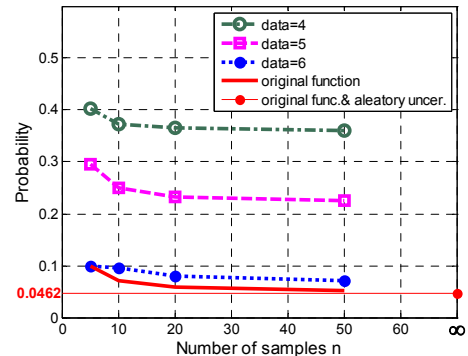


Fig. 7 Integration of uncertainty

Table 3 Results of reliability analysis for I-beam example

uncertainty classification	aleatory	epistemic (n=10)
Input variable	0.9570	0.9368
Input + Metamodel (data=10)	0.9389	0.9066

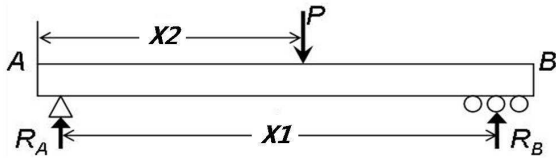


Fig. 8 I-beam model illustration

한편, h 의 불확실성을 고려한 결과 0(a)와 $h=5$ 에서의 결과 0(b)의 비교를 통해서 3.2절의 연구를 통해 기대할 수 있었던 결과가 나타났다. 3.2절의 결과에서는 h 의 불확실성이 고려된 경우 근사모델의 예측구간이 $h=5$ 일 때 보다 좀더 넓게 나타났는데, 이러한 원인으로 0(a)의 확률값이 0(b)보다 더 높게 나타났다. 불확실성의 통합에 대한 신뢰성 분석 결과가, 입력변수 및 근사모델 불확실성을 각각 고려했을 때 나타난 결과와 같은 성격으로 도출되었으며, 이를 통해 본 연구에서 제시하는 불확실성의 통합과정에 대한 논리성이 뒷받침 된다고 할 수 있다.

4. 설계 문제에서의 적용

4.1 I-beam 예제

0과 같은 단순지지 된 I-beam의 설계 제한 함수는 다음과 같이 표현된다.

$$g(\mathbf{X}) = \frac{27000X_2(X_1 - X_2)}{0.0822 \times 59^3 X_1} - 1170 \quad (7)$$

각 변수는 독립적인 변수로서, X_1 은 인식론적 불확실성을 갖고 $n=10$ 개의 샘플데이터로부터의 평균이 3000 mm , 표준편차가 25 mm 인 정규분포를 따르며, X_2 는 물리적 불확실성으로 $N(1830, 25)\text{ mm}$ 인 분포를 따른다. 본 예제는 한계응력 1170 MPa 을 넘지 않는 I-beam의 안전확률, $P[G < 0]$ 을 계산하는 문제로, 그 결과가 Table 3에 나타나 있다. 이 결과를 통하여, 물리적으로 인식론적 불확실성(0.9570→0.9368, 0.9389→0.9066)으로 갈수록, 입력변수 불확실성에서 입력변수+근사모델 불확실성(0.9570→0.9389, 0.9368→0.9066)으로 갈수록, 증가하는 불확실성으로 인해 신뢰도가

Table 4 Uncertain variables of clutch

	$X_1 \sim \text{Beta}$		$X_2 \sim N$		$X_3 \sim N$	$X_4 \sim \text{Ray}$
n	\bar{x}	55.29	μ	22.86	22.86	101.6
=10	s	0.0793	σ	0.0043	0.0043	0.0793

Table 5 Results of reliability analysis for Fortini's clutch example

uncertainty classification	aleatory	epistemic (n=10)
Input variable	0.9981	0.9960
Input + Metamodel (data=30)	0.9765	0.9704

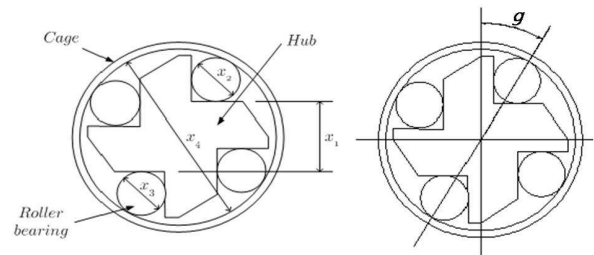


Fig. 9 Fortini's clutch model illustration

떨어짐을 알 수 있다.

4.2 Fortini's clutch 예제

0에서 접촉각도 g 는 서로 독립적인 설계변수 $X_1 \sim X_4$ 에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$g(\mathbf{X}) = \arccos\left(\frac{X_1 + 1/2(X_2 + X_3)}{X_4 - 1/2(X_2 + X_3)}\right) \quad (8)$$

설계사양으로 g 는 $5^\circ \sim 9^\circ$ 에 놓여야 하며, 각 설계변수의 분포는 Table 4에 정의되어 있다. 본 예제에 대해 수행한 신뢰성 분석 결과를 Table 5에 나타내었고, 이를 통해 입력변수와 근사모델 불확실성을 통합했을 때의 결과가 I-beam 예제에서와 같은 특징을 나타냄을 알 수 있다.

5. 토 의

본 연구를 통해 크게 세 가지의 새로운 연구내용을 제시하였으며, 이에 대한 결과를 요약하면 다음과 같다.

우선, 인식론적 불확실성을 보다 효과적으로 고려하기 위해 제시한 사후예측법과 기존의 이중 loop 방법의 비교·검토한 내용을 정리해 보면, 이중 loop 방법에서의 확률값(확률의 확률분포로 나타나는 결과에 신뢰구간의 상한 또는 하한값)이 사후예측법에서의 값보다 보수적인 성향을 나타내었으며, 샘플데이터 개수 증가에 따라 사후예측법에서의 값이

이중 loop 방법을 이용한 결과 분포의 50 백분위수에 수렴하는 결과를 나타내었다. 이는 샘플데이터 개수 증가에 따라 두 방법을 통한 확률값 모두 물리적 불확실성에서의 확률값에 수렴하는 측면에서 볼 때 당연한 결과라고 볼 수 있다.

다음으로, 유한개의 데이터로 실제모델을 대체하는 데에서 필연적으로 발생하는 근사모델의 불확실성에 대한 연구를, 상관함수 계수 h 에 따라 모델의 매끄러운 정도가 달라지는 크리깅 모델을 이용하여 진행 하였다. 과거에 h 를 확정값으로 사용함에 있어서, h 의 증가에 따라 크리깅 모델의 정확도가 높아지지만 특이성이 발생할 수 있는 문제와 실제 문제에서는 원함수에 가장 근접한 결과를 만드는 최적의 h 를 찾는 일이 쉽지 않다는 점을 고려하여, h 를 불확실변수로 하는 새로운 접근을 시도하였다. 이를 적용하여 구축된 근사모델은, 예제로 사용된 함수에서 최적의 값으로 볼 수 있는 $h=5$ 에서의 모델보다는 예측구간이 조금 더 넓지만, 원함수에 가까운 결과를 나타내었다.

마지막으로, 본 연구의 최종 목적이라고 할 수 있는 입력변수 및 근사모델 불확실성의 통합에 대한 연구를 통해서 다음과 같은 결과를 얻었다. 고정된 실험점 개수 하에서는 입력변수의 샘플데이터 개수가 증가함에 따라 확률값이 특정값에 수렴하였으며, 이 특정값은 실험점 개수가 증가하여 근사모델 불확실성이 줄어들수록 입력변수 불확실성의 물리적 불확실성만 고려했을 경우의 확률값에 가까워 졌다. 또한, h 의 불확실성이 고려된 경우가 $h=5$ 에서의 결과보다 좀더 많은 불확실성을 포함하기 때문에, 더 높은 실제확률값을 나타내었다. 본 연구에서의 신뢰성 분석 결과는 불확실성의 증감에 따라 기대되는 결과에 위배됨 없이 나타났으며, 이를 통해 불확실성의 통합에 대한 연구의 타당성이 뒷받침 되었다.

6. 결 론

본 연구에서는 부족한 데이터에서의 인식론적 불확실성을 보다 효과적으로 고려하기 위해 계산 시간이 오래 걸리고 과정이 복잡한 이중 loop 방법대신, 입력변수의 사후예측분포를 통해 반응치 확률값을 바로 구하는 사후예측법을 이용하였다.

또한, 신뢰성 최적설계를 할 때, 계산시간을 고려하여 효율성을 높이기 위한 방안으로 근사모델을 구축하여 사용하며, 이에 따르는 불확실성을 고려해야 유용성이 있는 설계가 될 수 있음을 강조하였다. 이에 대한 연구를 위해, 크리깅 모델을

사용하였으며, 크리깅 모델의 매끄러운 정도에 영향을 미치는 상관함수 계수 h 를 불확실변수로 하는 새로운 접근을 시도하였다.

마지막으로, 입력변수 및 근사모델 불확실성의 통합에 대한 새로운 신뢰성 분석 방법을 연구·제시하였고, 이에 대한 결과 양상을 설명하였다.

이러한 연구결과를 토대로 공학예제에 적용하여 물리적 및 인식론적 불확실성과 입력변수 및 근사모델 불확실성 각각에 대한 신뢰성 분석 결과를 비교하였다. 결과적으로 본 연구를 통해 산업현장에 실제 존재하는 불확실성을 실질적 측면에서 고려하기 위한 새로운 신뢰성 설계 방법을 제시하였다.

후 기

“ 이 논문은 2009 년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2008-02-010, No. 2009-0081438). ”

참고문헌

- (1) Haldar, A. and Mahadevan, S., 2000, *Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- (2) Rahman, S. and Xu, H., 2004, "A Univariate Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, pp. 393~408.
- (3) Won, J.H., Choi, C.H. and Choi, J.H., 2009, "Improving the Dimension Reduction Method (DRM) in the Uncertainty Analysis and Application to the Reliability Based Design Optimization," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 23, no. 5, pp. 1249~1260.
- (4) Gunawan, S. and Papalambros, P.Y., 2006, "A Bayesian Approach to Reliability-Based Optimization With Incomplete Information," *ASME*, Vol. 128, pp. 909~918.
- (5) Cruse, T.A. and Brown, J.M., 2007, "Confidence Interval Simulation for Systems of Random Variables," *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power ASME*, Vol. 129, pp.836~842.
- (6) Eduard, H., Martina, K., Bernard, K.H., Jörg, P. and Martin, W., 2002, "An Approximate Epistemic Uncertainty Analysis Approach in the Presence of Epistemic and Aleatory Uncertainties," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 77, pp. 229~238.
- (7) Gelman, A., Carlim, J.B., Strern, H.S. and Rubin, D.B., 2003, *Bayesian Data Analysis*, CHAPMAN & HALL/CRC, Inc., New York.
- (8) O'Hagan, A., 2006, "Bayesian Analysis of Computer Code Outputs: A Tutorial," *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 91, pp.1290~1300.