East Asian Mathematical Journal
Vol. 25 (2009), No. 3, pp. 379-397

Renzulli 수학 영재 교수-학습 모형 적용에 관한 연구

남 영 만 · 박 동 암

ABSTRACT. In this paper we apply to Renzulli's Teaching and Learning models for mathematically gifted students based on the gifted science education center in university. Gifted students were very positive reaction in solving problems creatively using this program, and they were challenging and very confident performing new tasks.

They reacted variously in debates with their classmates, in self-initiative studying. So more positive changes are needed for the activities using the gifted learning-teaching program to let each student have full use of his or her possibility and potential.

Ⅰ. 서 론

오늘날 우리는 글로벌 시대를 극복할 수 있는 우수한 인재들을 길러내기 위하여 다양한 교육정책을 펼치고 있으며 특히, 영재교육에 대한 이론적·정책적 연구 수행과 함께 집중적인 교육투자를 아끼지 않고 있다.

이런 시대적 필요성에도 불구하고 그 동안의 우리 교육은 보편과 평등을 강조해 오면서 의무교육의 확산 및 기한 연장과 같은 양적 확대와 기회의 균등에 초점을 두어 왔다. 하지만 최근 오늘날의 교육 실태에 대한 냉철한 비판을 토대로 21세기에 대비한 교육 개혁을 추진 중에 있으며, 그 중에서도 우수한 전문 인력의 양성이라는 영재교육에 대한 관심이 고조되고 있다. 이는 보통 학생을 대상으로 하는 다수를 만족시키는 전통적인 교육방식으로는 급변하는 세계화에 능동적

2009년 9월 투고, 2009년 9월 심사 완료.
이 결과물은 2009학년도 경남대학교 학술 연구 장려금 지원에 의한 것임.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D40
Key words: 영재 수업 모형, 렌줄리 수학영재 교수-학습 모형, 수학적 성향

으로 대처할 수가 없기 때문으로 보인다.

국가적인 차원에서 체계적인 영재교육의 필요성을 인식하여 1999년 ‘영재교육 진흥법’을 마련하여 2002년부터 영재교육을 본격적으로 시행하여 재능이 뛰어난 학생을 조기에 발굴하여 타고난 잠재력을 계발할 수 있도록 능력과 소질에 맞는 교육을 실시하여 개인의 자아실현을 도모하고, 국가와 사회 발전에 기여하도록 추진하고 있다.

본 연구는 00대학교 과학영재교육원의 수학 반 학생들에게 렌줄리 수학영재 교수-학습 모형을 개발·적용한 결과를 분석하여 대학 과학 영재원에 재학 중인 수학영재 반 학생들의 지도에 참고 자료로 활용할 수 있는 방안을 모색하는 데 그 목적이 있다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 영재의 정의와 특성

영재성에 대한 초기의 연구에서는 영재성의 개념 규정이 일반적으로 지능이라는 단일 요인에 근거하여 이루어졌다. 그리고 지능검사 결과 동일 연령 집단에서 상위 1～3% 이상인 자를 영재로 정의하거나 IQ 130 또는 140 이상인 사람들을 영재로 정의하였다. 그러나 이러한 지능검사만으로는 영재의 중요한 특성인 창의력이나 사회적 능력, 예술적 능력은 측정될 수 없다는 문제가 제기되었다.

미국 국무성에 제출한 보고서에서 말랜드는 영재란 전문가에 의해 능력이 뛰어나 탁월한 성취를 보일 가능성이 있는 자로서, 그들이 자아를 실현하고 사회에 공헌하기 위해서는 정규학교 교육과정이 제공하는 것 이상의 특수한 교육프로그램과 지원을 필요로 한다고 정의하고 ① 일반적 지적능력 ② 특정교과에 대한 능력 ③ 창의적 사고 능력 ④ 지도능력 ⑤ 예능계 능력 ⑥ 운동 신경 능력의 모든 면에서 고려해야 한다고 하였다(Marland, 1972).

또한 렌줄리(Renzulli, 1978)는 실제로 사회에서 뛰어난 공헌을 한 사람들은 예외 없이 세 가지 특성, “평균 이상의 능력’, ‘높은 창의성’, ‘높은 과제 집착력’을 지니고 있다고 했다. 렌줄리는 영재는 이 세 요소를 모두 갖추고 있어야 하지만 이 세 가지 특성에서 모두 대단히 뛰어나야 할 필요는 없다고 강조한다. 한 특성에서는 적어도 상위 2% 이내에 속해야 하지만 나머지 특성에서는 상위 15% 이내면 된다는 것이다.

영재들에게 있어서 특히 두드러지게 나타나는 것은 역시 지적 특성이다. 강한 지적 욕구, 그리고 수에 대한 깊은 관심 등을 쉽게 관찰할 수 있다. 몰두하는 강한 성격과 과제 집착력을 갖고 있다. 특히 외재적인 자극에 의해서 동기가 유발되기보다는 내재적인 동기로 과제에 몰두하는 것으로 알려져 있다.

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 00대학교 과학영재교육원에 다니고 있는 초등영재 수학반 학생들이며 연구기간은 2007년 과학영재교육원 학생들이 선발되어 졸업하는 2009년 2월까지의 자료를 분석한 내용이다.

3. 수학 영재교육의 교수-학습 모형

영재교육과정 모형은 영재들을 위한 효과적이고 효율적인 학습이 이루어질 수 있도록 이론적·실질적 근거를 제시하며 이를 바탕으로 영재교육과정 모형은 일곱 가지 유형으로 나눈다.

- Renzulli의 심화학습 3단계 모형 (Enrichment Triad Model)
- 학교전체 심화학습모형 (Schoolwide Enrichment Model: SEM)
- 다중메뉴모형 (Multiple Menu Model)
- Treffinger의 자기주도적 학습모형 (Self-directed Learning Model)
- Betts의 자발적 학습모형 (Autonomous Learner Model: ALM)
- Kaplan의 변별적 교육과정 모형 (Differentiated Curriculum Model)
- Clark의 통합적 교육모형 (Integrative Educational Model)

Renzulli의 심화학습 3단계 모형은 그 동안의 영재교육 발전을 저해하던 문제점들을 개선하고 소수 영재들만을 대상으로 하던 영재교육 개념에서 벗어나 다수의 학생들을 대상으로 학습 한다는 것이 다른 학습모형과의 차이점이다.

심화학습 3단계 모형은 제1단계 일반적인 탐구활동(General Exploratory Activities), 제2단계 그룹 훈련활동(Group Training Activities), 그리고 마지막으로 제3단계 심화 개인 또는 소집단의 실제문제 연구 활동(Individual & Small Group Investigations of Real Problems)으로 구성된다. 심화학습 3단계 모형의 가장 큰 장점이자 특징은 3단계 중 첫 두 단계가 교실 수업에서의 적응력을 갖고 있어 영재들뿐만이 아니라, 보다 폭 넓은 학생들을 대상으로 할 수 있다는 점이다.

위에서 언급한 일곱 가지 교육과정모형들은 그 내용이나 특성상 서로 상통하는 부분이 많으며 또한 상호보완적인 성격을 나타내기도 한다.

Ⅲ. 본 론

1. 렌줄리 수학 영재 교수-학습 모형 개발

Renzulli의 심화학습 3단계 모형 (Enrichment Triad Model)을 수학영재 교수-학습 모형 개발·적용한다.

가. 영재 교수-학습 모형 개발 단계

프로그램 개발의 과정은 단계별로 활동을 분류하고 각 단계는 예정된 교수-학습 모형을 개발하기 위해 상호 작용하도록 한다. 이러한 체제적 교수-학습 모형 개발의 주요 단계를 보면

1) 주제 선정
2) 수학적 주제에 따른 교수-학습 활동 단계
3) 각 단계별 교수-학습 활동 과정안 작성
4) 학습 활동 사항 종합기록

으로 나누었다.

1) 주제 선정

Renzulli의 심화학습 3단계 모형에서는 1단계에서 학생 스스로 수업 주제를 정하도록 되어 있으나, 실제 수업을 시작하고 학생 스스로 주제를 정하는 데는 시간상의 제약과 수업주제가 제각각이어서 수업을 진행하는 데 많은 문제점이 있다고 판단하여 본 연구자가 미리 정해놓은 주제를 학생들에게 알려주고 그 주제에 대한 여러 배경을 학생들로 하여금 인터넷을 통해 찾아보게 하여 학습에 대한 흥미를 유발하게 하였다.

2) 수학적 주제에 따른 교수-학습 활동 단계

수학적 주제에 대한 이해로써 이 단계에서는 제시된 주제에 따라 논리적 사고 활동 및 수학적 의사소통 능력을 심화시키도록 한다.

- 1단계 : 수학적 주제 탐색
- 2단계 : 수학적 주제에 대한 이해
- 3단계 : 문제 해결
- 4단계 : 평가 및 반성

단계별 수업 활동 내용

단계	주요 수업 활동	수업 형태	차시
수학적 주제 탐색	· 교사가 추천한 주제에 맞게 인터넷을 활용하여 주제를 탐색한다.	· 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	60분
수학적 주제에 대한 이해	· 탐색한 주제를 토대로 수업을 진행한다.	· 교사 수업 · 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	120분
문제 해결	· 여러 가지 방법으로 심화 문제 해결	· 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	50분
평가 및 반성	· 지식 및 개념 평가 · 학생설문지(프로그램 평가) · 모둠 활동 평가 · 산출물 평가	· 개념이해에 대한 지필고사 · 보고서 및 산출물 평가 · 수업 진행 중에 대한 평가	40분

3) 교수-학습 과정안 구안

단계별 지도 과정의 절차에 따라 각 활동에 필요한 각 단계별 교수-학습 활동 과정안을 작성한다. 교수-학습 과정안은 일제 학습, 소집단 학습, 개별 학습을 융통성 있게 운영함으로써 능력 차에 따라 학습이 되게 하였다.

4) 학습 활동 사항 종합기록

각자가 학습 내용을 발표하고, 발표한 내용을 평가 항목에 따라 객관적으로 평가하게 한다.

① 종합적인 요소가 평가될 수 있도록 탐구과정, 학습결과, 출석 및 보고서 작성과 산출물을 평가하되 산출물은 절대평가를 실시한다.

② 학습 내용에 대한 종합 평가는 과제수행 정도, 창의적 문제해결력, 보고서 작성 및 보고 능력, 적극적 참여 태도 학습 활동을 종합적으로 기록한다.

Ⅳ. 결과

연구대상자의 수학 능력 실태를 보면 각 학교 학력 평가에서 3% 이내에 있는 학생들이며 이들의 수학학습 흥미도를 조사한 결과는 다음 표와 같다.

수학에 대한 학습 흥미도 (N＝20)

설문내용 \ 대상	남	여	계(백분율)
아주 재미있다.	12	1	13(65%)
대체로 재미있다.	4	1	5(25%)
보통이다.	2		2(10%)
별로 재미없다.	·	·	·
전혀 재미없다.	·	·	·

1. 실제 수업 적용

가. 주제선정하기 : 생활 속의 방정식

본 주제는 초등학생들의 수학적 재능의 필요성에 따라, 고대의 다양한 상황에서의 방정식 풀이의 변화과정의 고찰을 통해 고대인들의 사상과 수학적 체험을 간접 경험하게 하여 살아있는 수학의 힘을 인식시켜 줄 수 있으며, 방정식의 역사를 알아봄으로써 수학적 개념이나 알고리즘이 인간의 활동에 의해 발명되고 발견되어 개선되어 왔음을 인식시킴으로써 학생의 자발적인 수학적 활동을 장려할 수 있다. 또한 방정식의 해에 대한 여러 가지 관점에서의 분석 및 풀이(고대의 방법, 그래프를 통한 해 구하기, 작도를 통한 해 구하기)를 통해 복잡 다양한 상황에 대한 분석능력과 계산에 관한 추론 능력을 발달하도록 도움을 주는 데 있다.

각 단계별 활동 내용을 보면 1단계는 방정식의 어원과 역사, 고대인들의 방정식의 풀이방법을 알아본다. 2단계에서는 방정식의 해를 그래프, 작도를 통해 구해본다. 3단계에서는 실생활의 문제를 방정식을 통해 해결하면서 방정식의 해를 여러 가지 방법으로 구해봄으로써 수학적 유창성을 향상시키고 문제해결능력 및 추론능력의 향상에 도움이 될 것이다.

나. 교수-학습 활동 단계

방정식 지도 내용

전개 단계	활동명	주요 수업 활동	주요 수업 형태	차시 (시간)
1단계	방정식의 역사	· 방정식의 어원 및 역사 · 고대 서양의 방정식 풀잇법 · 고대 중국의 방정식 풀잇법 · 고대 인도의 방정식 풀잇법	· 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	60분
2단계	방정식 해의 기하학적 표현	· 그래프를 이용한 일차방정식, 연립방정식, 이차방정식의 해 · 작도를 이용한 일차방정식, 이차방정식의 해	· 교사 수업 · 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	120분
3단계	문제 해결	· 생활 속에서 문제를 방정식으로 해결하기 · 방정식 문제 만들기 · 방정식의 해를 여러 가지 방법으로 구하기	· 모둠 활동 · 조별 발표 · 전체 토론	50분
4단계	평가 및 반성	- 지식 및 개념 평가 - 학생설문지(프로그램 평가) - 모둠 활동 평가 - 산출물 평가	- 개념이해에 대한 지필고사 - 보고서 및 산출물 평가 - 수업 진행 중에 대한 평가	40분

다. 교수-학습 활동

1) 1단계 : 방정식의 역사

교수-학습 활동 과정 안

① 도입

이 활동에서는 방정식의 어원과 수학사 속에서의 방정식의 역사에 대하여 알아보고 또한, 고대 동서양의 방정식의 문제와 풀이방법에 대하여 알아보고 이를 현재의 방법과 비교 분석해 본다. 또한, 고대인들의 방정식의 풀이 방법대로 문제를 해결해 봄으로써 고대인들의 수학적 해결방식을 간접 경험하게 한다.

② 본 활동

<table>
<tr><td>학습
목표</td><td colspan="4">· 방정식의 역사를 말할 수 있다.
· 고대의 서양의 방정식 풀이방법을 알아보고 현재와 비교 설명할 수 있다.
· 고대 동양의 방정식 풀이방법을 알아보고 현재와 비교 설명할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교 사</td><td colspan="3">지도안, 컴퓨터와 프로젝터</td></tr>
<tr><td>학 생</td><td colspan="3">필기도구, 학습장</td></tr>
<tr><td>학습
단계</td><td colspan="2">교수-학습 활동</td><td>예상
시간</td><td>유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td colspan="2">· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발시킨다.
· 활동안내와 학습목표 이해시킨다.
· 학습 준비물을 확인한다.</td><td>5분</td><td>· 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.</td></tr>
<tr><td>본활동</td><td colspan="2">· 방정식의 어원 및 역사에 대하여 조사하여 발표하고 토론한다.
· 고대 서양의 방정식의 풀이 방법을 알아보고 현재와 비교 토론한다.
· 고대 중국의 방정식의 풀이 방법을 알아보고 현재와 비교 토론한다.</td><td>50</td><td>· 모든 학생들이 참여하도 독려한다.
· 고대의 방정식의 풀이 방법과 대수학의 발달정도를 비교 분석하여 본다.
· 동서양의 방정식의 풀이과정의 특징과 차이점, 발달 과정 등에 대하여 알아본다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td colspan="2">· 방정식의 어원과 역사를 정리하고 고대와 현재의 방정식의 풀이방법을 비교 정리하면서 수학의 발달과정을 이해한다.</td><td>5분</td><td>· 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 유도한다.
· 차시예고</td></tr>
</table>

질문 1. 방정식의 어원에 대해 찾아보고 이를 조별로 발표하고, 비교 토론하여 보자.
이 단원을 학습하기 전에 먼저 방정식의 어원과 역사에 대하여 알아보는 것을 과제로 제시하고, 수업시간에는 이를 통해 발표하고 서로 토론하는 과정을 밟는다.

질문 2. 다음 문제를 현재의 풀잇법과 그리스인들의 풀잇법을 비교해 보고 토론해 보자.
문제 : 노새와 당나귀가 밀가루가 담긴 자루를 운반하고 있습니다. 너무 무거워서 당나귀가 한탄하자, 노새가 당나귀에게 말하였습니다.
“네가 진 짐 중에서 한 자루만 내 등에 옮겨놓으면, 내 짐은 너의 짐의 배가되지. 또, 내 짐 한 자루를 네 등에 옮기면 나와 너는 같은 수의 짐을 운반하게 된다.”
그러면 노새와 당나귀는 각각 몇 자루씩 운반하고 있겠는가?
㉮ 현재의 풀잇법으로 풀이
당나귀가 진 밀가루의 부대 수를 x, 노새가 진 밀가루의 부대 수를 y라 하면 당나귀가 노새에게 한 부대 넘기면 $y+1=2(x-1)$

노새가 당나귀에게 한 부대 넘기면 $y-1=x+1$
이것을 연립방정식으로 풀면 $x=5$, $y=7$
따라서 당나귀는 5부대, 노새는 7부대의 밀을 지고 있다.
㉯ 그리스인들의 풀잇법

그리스인들은 미지수를 하나만 사용하여 풀이하였다.

노새의 짐 한 자루를 당나귀에게 옮기면 같은 수가되므로 노새는 당나귀보다 짐이 2자루 많다. 당나귀가 y자루 운반하고 있다면 노새는 $(y+2)$자루를 운반하고 있다. 당나귀의 짐에서 1자루를 노새에게 옮기면 노새의 짐은 당나귀의 짐의 2배가되므로 $(y+2)+1=2(y-1)$이다. 이것을 풀면 $y=5$ 그러므로 당나귀는 밀가루를 5자루, 노새는 7자루 운반하고 있다.

질문 3. 두 수가 있다. 그 합은 20이고, 그 제곱의 차는 80이다. 두 수를 구하여라. 이 이차방정식 문제를 풀어보고 그리스의 유명한 수학자 디오판토스는 어떻게 풀었는지 비교하고 토론해 보자.

㉮ 현재의 풀잇법

풀이) 이것을 연립방정식 { $y+1=2(x-1)$ ········· ㉠

$y-1=x+1$ ············ ㉡ 두 수를 x, y라 두면

$$\begin{cases} x+y=20 \cdots ㉠ \\ x^2-y^2=80 \cdots ㉡ \end{cases}$$

이라는 이원이차연립방정식을 세울 수 있다. 대입법으로 하여 풀면

㉠에서 $y=-x+20$를 ㉡ 에 대입하면 $2x^2-40x+320=0$. $x=12$, $x=8$

따라서 두 수는 각각 12, 8이다.

㉯ 디오판토스가 풀이한 방법

풀이) 두 수를 $x+10$, $10-x$로 놓고, 각각 제곱하여 빼면

$$(x+10)^2-(10-x)^2=40x$$
$$40x=80$$
$$x=2$$

따라서 구하는 두 수는 각각 12, 8이다.

기발하지만 이차방정식의 일반해를 구할 수 없었기 때문에 이런 방법을 택했을 것이다. 이렇게 이차방정식을 풀어야 한다면 보통 사람은 이차방정식에 접근하는 것조차 어려울 것이다.

질문4. 280년과 473년으로 추정되는 손자산경(孫子算經)에는 다음과 같은 문제가 있다. “꿩과 토끼가 모두 35마리 있다. 다리의 수는 모두 94이다. 꿩과 토끼는 각각 몇 마리인가?” 이 문제를 풀어 보고 손자산경에서는 어떻게 풀었는지 알아보

자.

㉮ 현재의 풀잇법

풀이) 꿩과 토끼의 수를 각각 x, y 라 두고 식을 세우면

$$\begin{cases} x+y=35 \\ 2x+4y=94 \end{cases}$$

이 방정식을 풀면 꿩은 23마리, 토끼는 12마리임을 알 수 있다.

㉯ 손자상경의 풀잇법

풀이) 1) 발의 수를 반으로 해라 → 94÷2=47

2) 그것에 머리의 수를 빼라. 이것이 토끼의 수이다. → 47-35=12

3) 그것을 머리의 수에서 빼라. 이것이 꿩의 수이다. → 35-12=23

③ 정리

· 방정식의 어원과 역사와 고대와 현재의 방정식의 풀이방법을 비교 정리하면서 수학의 발달과정을 이해한다.

· 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 유도한다.

2) 2단계: 방정식의 기하학적인 표현

교수- 학습 활동 과정 안

<table>
<tr><td>학습
목표</td><td colspan="4">· 일차방정식, 이차방정식, 연립방정식의 해를 그래프를 이용하여 구할 수 있다.
· 일차방정식, 이차방정식의 해를 작도 할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교 사</td><td colspan="3">지도안, 자, 컴퓨터</td></tr>
<tr><td>학 생</td><td colspan="3">자, 컴퍼스, 필기도구, 학습장</td></tr>
<tr><td>학습
단계</td><td colspan="2">교수-학습 활동</td><td>예상
시간</td><td>유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td colspan="2">· 전체 주제에 대한 소개 및 동기를 유발시킨다.
· 활동안내와 학습목표 이해시킨다.
· 학습 준비물을 확인한다.</td><td>5분</td><td>· 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.</td></tr>
<tr><td>본활동</td><td colspan="2">· 그래프를 이용하여 일차방정식, 이차방정식의 해를 구해본다.
· 그래프를 이용하여 연립방정식의 해를 구해본다.
-활동지 [그래프 이용한 방정식의 해]
· 일차방정식과 이차방정식 해를 작도해 본다.
-활동지 [방정식의 해 작도]</td><td>110분</td><td>· 모든 학생들이 참여하도록 독려한다.
· 학생들의 활동이 문제의 본질에서 벗어나지 않도록 유의한다.
· 그래프를 이용하여 방정식의 해를 구해보기에서는 그래프를 그리는 게 목적이 아니기 때문에 그래프 마법사나 GSP 등을 이용해서 방정식의 해를 찾아본다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td colspan="2">· 그래프, 작도를 이용한 방정식의 해 구하기를 통해 방정식의 기하학적인 의미를 정리한다.</td><td>5분</td><td>· 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 유도한다. 다음 시간까지 할 것에 대하여 충분히 주지시킨다.</td></tr>
</table>

① 도입

방정식의 해를 구하는 방법은 대수적 해법 이외에 자와 컴퍼스를 이용하여 해

를 작도할 수 있음을 주지한다.

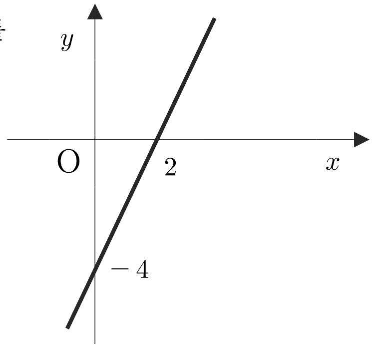
② 본활동

가) 그래프를 이용한 방정식의 해 구하기 [그래프 이용한 방정식의 해]

본 활동에서는 방정식의 해를 그래프를 이용한 풀이를 통해 방정식의 해의 기하학적인 의미를 알아보게 하고 방정식과 함수의 그래프 사이의 관계를 이해하게 한다.

질문1. 일차방정식 $ax+b=0$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하는 방법에 대하여 알아보아라.

① 일차방정식 $2x-4=0$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.



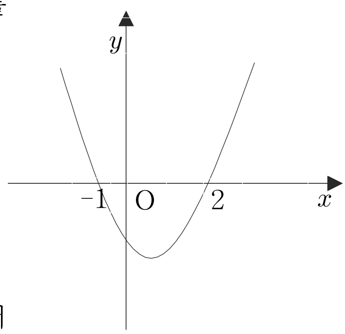
풀이1) ㉠ 그래프 마법사를 이용하여 $y=2x-4$ 의 그래프를 그린다.

㉡ 근 찾기를 이용하여 근을 구해보면 2임을 알 수 있다.

㉢ $2x-4=0$ 의 양변을 y 라 두고 $y=2x-4$, $y=0$ (x 축)의 그래프를 그려서 그 교점의 x 좌표(즉 x 절편)이 해임을 알 수 있다.

② $2x-4=0$를 대수적으로 해를 구하여 ①에서 구한 해와 비교하여 보자.

질문2. 이차방정식 $x^2-x-2=0$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.



풀이1) ㉠ 그래프 마법사를 이용하여 $y=x^2-x-2$ 의 그래프를 그린다.

㉡ 근 찾기를 이용하여 근을 구해보면 -1, 2 임을 알 수 있다.

㉢ $x^2-x-2=0$ 양변을 y 라 두고 $y=x^2-x-2$, $y=0$ (x 축)의 그래프를 그려서 그 교점의 x 좌표(즉 x 절편)이 해임을 알 수 있다.

보조질문1. 이차방정식 $x^2-x-2=0$ 의해를 대수적인 방법으로 구하여 ①에서 구한 해와 비교하여 보아라.

보조질문2. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의해를 그래프를 이용하여 구하는 일반적인 방법에 대하여 말해 보아라.

참고 : 이차방정식도 일차방정식과 같이 함수의 그래프의 교점이 방정식의 해임을 이해시킬 수 있도록 한다.

질문3.연립방정식 $\begin{cases} x+y=4 \ldots ㉮ \\ x-2y=-2 \ldots ㉯ \end{cases}$ 의 해를 그래프를 이용하여 구하여라.

풀이) ㉠ 연립방정식에서 ㉮를 $y=-x+4$, ㉯를 $y=\frac{1}{2}x+1$ 로 고친다.

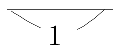
㉡ 그래프마법사를 이용하여 ㉠의 결과를 그래프로 그린다.

㉢ 그래프마법사의 교점 찾기를 이용하여 두 그래프의 교점(2, 2)을 찾는다.

㉣ 구하는 해가 교점의 좌표$x=2$, $y=2$ 임을 알 수 있다.

나) 방정식의 해 작도하기

본 활동에서는 자와 컴퍼스를 이용하여 해의 작도를 한다.
여기서는 목적이 작도를 통한 방정식의 해를 구하는 것이기 때문에 기존의 작도의 지식과 도형의 성질들을 활용하여 방정식의 해를 작도함으로써 응용력과 문제해결력을 기르는 데 좋은 기회가 될 수 있도록 유도한다.
질문1.단위 길이 1이 다음과 같이 주어져 있을 때, 방정식 $3x-5=0$의 해를 작도하여 보아라.

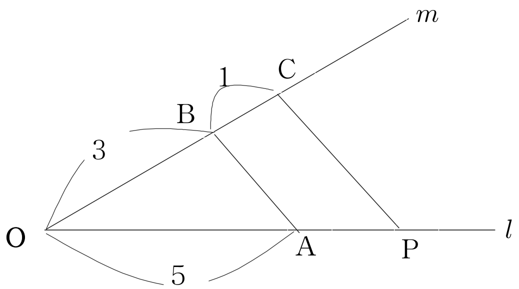


참고 : $3x-5=0$의 해를 작도하는 것은 $\frac{5}{3}$를 작도하는 것과 같음을 알고, 일반적으로 일차방정식의 해도 작도 할 수 있음을 알게 한다.

풀이) ㉠ 점 O 를 지나는 반직선 l 을 그리고, l 위에 OA = 5 를 만족하는 점 A 를 작도한다.

㉡ 점 O 를 지나는 또 다른 반직선 m을 그리고, m 위에 $\overline{OB}=3$ 인 점 B 와 $\overline{BC}=1$ 인 점 C 를 작도한다.

㉢ 점 C 지나고 AB 와 평행한 직선을 작도하여, 이 직선이 l 과 만나는 점을 P 라 하자.



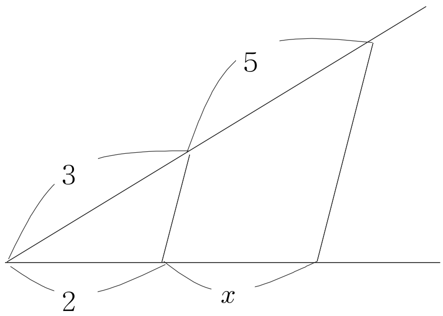
㉣ $\triangle$OAB 와 $\triangle$OPC 는 닮은꼴 이므로$\overline{\mathrm{AP}} = \dfrac{5}{3}$ 이다.

즉, $3x-5=0$의 해는 AP 의 길이와 같다.

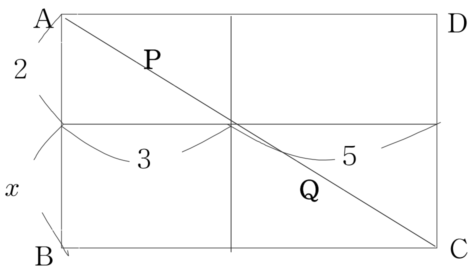
질문2. 일차방정식 $3x=10$의 해를 여러 가지 방법으로 구하여라.
보조질문1. 대수적 방법으로 풀어보아라.

풀이) $3x=10$에서 양변을 3로 나누어 $\therefore x = \dfrac{10}{3}$

보조질문2. 선분을 이용한 비례 방법으로 작도하여 보아라.
풀이) 아래 그림처럼 $2:3=x:5$ 이므로 닮은 도형의 성질을 이용하여 길이 x를 나타내는 선분을 작도하면 된다.



보조질문3. 면적을 이용하여 해의 작도 방법에 대하여 알아보아라.
풀이) ㉠ 먼저 x의 계수인 3의 길이를 가진 선분을 그리고 그 옆에 넓이가 10인 직사각형을 그린다.
㉡ 다음 직사각형의 연장선과 3의 길이의 끝점과 연결하여 직사각형 P를 만든다.
㉢ 직사각형 P의 대각선을 그어 넓이가 10인 직사각형의 연장선과 만나는 직사각형 Q를 만들면 그 직사각형B의 세로의 길이가 구하는 길이 x이다.



㉣ 삼각형ABC과 삼각형ADC에서 사각형P와 Q의 반을 뺀 넓이가 그림에서 꼭지점 B, D 쪽의 사각형이므로 그 넓이가 같음을 알 수 있다.
③ 정리
· 그래프, 작도를 이용한 방정식의 해 구하기를 통해 방정식의 기하학적인 의미를 정리한다.

3) 3단계 : 문제 해결

교수-학습 활동 과정 안

<table>
<tr><td>학습
목표</td><td colspan="4">· 주어진 상황을 해결하기 위하여 방정식으로 식을 세울 수 있다.
· 일차, 이차방정식, 연립방정식을 대수적 방법, 그래프를 이용한 방법, 작도를 이용한 방법을 이용하여 해를 구할 수 있다.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">준비물</td><td>교 사</td><td colspan="3">지도안, 컴퓨터</td></tr>
<tr><td>학 생</td><td colspan="3">자, 필기도구</td></tr>
<tr><td>학습
단계</td><td colspan="2">교수-학습 활동</td><td>예상
시간</td><td>유의점</td></tr>
<tr><td>도입</td><td colspan="2">· 전체 주제에 대한소개 및 동기를 유발시킨다.
· 활동안내와 학습목표 이해시킨다.
· 학습 준비물을 확인한다.</td><td>5분</td><td>· 프로젝트 전체 과정에 대해서 설명하고, 이를 이해하도록 한다.</td></tr>
<tr><td>본활동</td><td colspan="2">· 주어진 문제를 해결하기 위하여 방정식으로 식을 세운다.
· 문제를 대수적, 그래프, 작도 등을 이용하여 풀이한다.
· 여러 방법들의 장단점과 가장 적합한 방법에 대하여 서로 토론한다.</td><td>30분</td><td>· 모든 학생들이 참여하도록 독려한다.
· 주어진 상황을 해결하기 위하여 방정식을 사용하여 식을 세울 때, 적합한 방정식을 선택할 수 있도록 한다.
· 여러 가지 문제해결 방법의 장단점을 스스로 파악하여 최선의 방법을 찾는 과정임을 인식하게 한다.</td></tr>
<tr><td>정리</td><td colspan="2">· 이차방정식과 연립방정식의 여러 가지 풀이방법을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있음을 확인한다.</td><td>5분</td><td>· 학생들이 적극적으로 참여할 수 있도록 유도한다.</td></tr>
</table>

① 도입

생활 속의 복잡 다양한 문제를 해결하는 한 방법으로 방정식 해법의 필요성을 일깨워 준다.

② 본 활동

본 활동에서는 실생활의 문제를 방정식을 사용하여 해결하는 과정에서 여러 가지 방법으로 해를 구해봄으로써 수학의 다양성을 경험하고 가장 합리적으로 문제를 해결하는 방법을 경험해볼 수 있도록 한다. 여러 가지 방법으로 해를 구해보고 각 방법의 장단점에 대한 서로간의 토론을 통해 문제해결력을 향상시킬 수 있도록 한다.

질문1. 어떤 정사각형의 가로의 길이를 3cm, 세로의 길이를 2cm 길게 하여 만든 직사각형의 넓이는 처음 정사각형의 넓이의 2배와 같다. 처음 정사각형의 한 변의 길이를 x라 할 때, x를 구하는 방정식을 세워라.

질문2. 50명이 시험을 본 결과 그 중 20명이 불합격이었다. 최저 합격 점수는 50명의 평균보다 2점이 낮고, 합격자의 평균보다는 20점이 낮으며 불합격자의 평균의 2배보다 5점이 낮았다. 최저 합격 점수를 구하여라.

질문3. 갑이 300m 걷는 동안에 을은 200m를 걷는 속도로 갑과 을이 1200m 떨어진 지점에서 서로 마주 보고 걸었더니 12분만에 만났다. 갑, 을이 1분 동안에 걸은 거리를 각각 구하여라.

질문4. 두 자리의 자연수가 있는데 각 자리 숫자의 합을 8배하면 이 자연수와 같아지고, 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자를 바꾸면 처음 수보다 45만큼 작은 수가 된다고 한다. 처음의 자연수를 구하여라.

질문5. A, B 두 사람이 어떤 일을 함께 하는데 A가 3일, B가 4일하여 완성하였다. 그 후 똑같은 일을 A가 6일, B가 2일에 완성하였다면, 이 일을 A 혼자 한다면 며칠 걸리겠는가?

질문6. 물속에서 금은 그 무게의 $\frac{1}{19}$이 가벼워지고, 은은 $\frac{2}{21}$가 가벼워진다. 무게 162g인 금과 은의 합금을 물속에서 달았더니 149g이었다고 한다. 이 합금에는 금과 은이 각각 몇 g씩 섞여 있는가?

③ 정리

· 이차방정식과 연립방정식의 여러 가지 풀이방법을 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있음을 확인한다.

4) 4단계 : 반성 및 평가

-. 각자가 학습 내용을 발표하고, 발표한 내용을 평가 항목에 따라 객관적으로 평가하게 한다.

-. 종합적인 요소가 평가될 수 있도록 탐구과정, 학습결과, 출석 및 보고서 작성과 산출물을 평가하되 산출물은 절대평가를 실시한다.

-. 학습 내용에 대한 종합 평가는 과제수행 정도, 창의적 문제해결력, 보고서 작성 및 보고능력, 적극적 참여태도 등 평가 결과는 표와 같다.

2. 개발된 교수-학습 모형 적용 후 학생들의 반응 결과

영재 교수-학습 모형 적용 후에 대한 학생들의 반응은 다음과 같이 나타났다.

학습활동사항 종합기록

주요학습 내용	생활 속의 방정식													
순	학생 이름	과제수행 정 도			창 의 적 문제해결력			보 고 서 작 성 및 보고능력			적 극 적 참여태도			특기 사항
		상	중	하	상	중	하	상	중	하	상	중	하	
1	A	○			○			○			○			
2	B		○			○			○				○	적극적인 태도가 요망됨
3	C	○			○			○			○			
4	D	○			○			○				○		
5	E	○			○			○			○			
6	F			○			○		○				○	주의 산만, 집중력 부족
7	G	○			○			○				○		발표력이 뛰어남
8	H	○			○			○			○			
9	I	○			○			○			○			전반적 양호함
10	J		○			○			○		○			
11	K		○		○			○			○			과제수행력 부족
12	L	○			○				○			○		주의 산만, 적극성 결여
13	M	○			○			○			○			
14	N	○			○			○			○			과제수행력은 양호함
15	O		○				○		○			○		
16	P	○			○			○			○			과제수행정도가 높고, 보고능력 뛰어남
17	Q		○		○			○			○			
18	R	○			○			○			○			창의적이고 모든 면에서 뛰어남
19	S	○			○			○			○			
20	T	○			○				○			○		창의적 사고력은 좋으나 적극성이 결여

* 각 과정에서 학생의 수준에 따라 " ○"표시를 한다. 또 아동 개인 관찰 일지를 만들어 특이한 행동이나 과정을 기술하여 추후 종합 평가에 반영하도록 한다.

가. 수학적 성향과 학습태도의 변화

(N=20)

영 역	평 균		유의 수준	비 고
	사전 검 사	사후 검 사		
수학적 호기심	2.74	3.82	0.03	
수학적 자신감	3.04	3.98	0.05	
수학적 융통성	2.94	3.76	0.04	
수학적 인식	2.98	3.92	0.03	

학생들은 수학적 성향과 태도가 긍정적으로 나타났다.

나. 영재 교수-학습 모형 적용의 좋은 점

(N=20)

구 분	친구들과의 토론 수업	자기 주도적 학습	선생님과 함께 하는 학습
영재 교수-학습 모형 적용	35.00% (7명)	35.00% (7명)	30% (6명)

학생들은 35.00%(7명)이 '친구들과의 토론 수업'에 35.00%(7명)이 '자기 주도적 학습'에 30.00%(6명)가 '교사와 함께 하는 학습'에 응답하여 학생들의 학습 취향에 따라 편중됨이 없이 다양한 반응을 한 것으로 나타나, 학생 개인의 특성을 고려한 영재 교수-학습 모형 적용이 학생들의 학습 활동에 적절하다고 판단된다.

다. 영재 교수-학습 모형 적용에의 교수-학습방법의 적절성

(N=20)

구 분	매우 좋다.	조금 좋다.	그저 그렇다.	조금 안 좋다.	매우 좋지 않다.
영재 학습 모형 적용한 교수-학습방법의 적절성	25.00% (5명)	40.00% (8명)	25.00% (5명)	5.00% (1명)	5.00% (1명)

영재 학습 모형 적용 교수-학습방법은 '매우 좋다'에 25.00%(5명). '조금 좋다'에 40.00%(8명)이 반응하여 전체적으로 65.00%(13명)가 좋다는 것으로 보아 영재 학습 모형 적용 교수-학습방법을 선호하는 것으로 분석되었다.

라. 영재 학습 모형 적용 교수-학습방법의 학습 과정 이해

(N=20)

구 분	매우 잘 이해하고 있다.	조금 이해하고 있다.	그저 그렇다.	이해하지 못하고 있다.	전혀 이해하지 못하고 있다.
영재 학습 모형 적용 교수-학습방법의 학습과정 이해도	30.00% (6명)	55.00% (11명)	15.00% (3명)	0.00% (0명)	0.00% (0명)

위 표에서 영재 학습 모형 적용 교수-학습방법의 학습과정에 대하여'매우 잘 이해하고 있다'가 20.00%(6명), '조금 이해하고 있다'가 50.00%(11명),전체적으로 70.00%(14명) 학생이 영재 학습 모형 적용 교수-학습방법의 학습과정을 이해하고 있는 것으로 나타났다.

마. 영재 학습 모형 적용의 학습 이해에 대한 효과

(N=20)

구분	매우 도움을 주고 있다.	조금 도움을 주고 있다.	그저 그렇다.	도움을 주지 않고 있다.	전혀 도움을 주지 못하고 있다.
영재 학습 모형 적용의 학습 이해에 대한 효과	30.00% (6명)	40.00% (8명)	15.00% (3명)	10.00% (2명)	5.00% (1명)

영재 학습 모형 적용이 '매우 도움을 주고 있다'가 30.00%(6명), '조금 도움을 주고 있다'가 40.00%(8명)으로, 학습 내용의 이해에 도움을 주는 것으로 반응하는 하는 학생이 전체적으로 70.00%(14명)이 되어, 학생들은 학습 내용을 이해하는데 효과가 있는 것으로 판단된다.

바. 영재 학습 모형을 적용한 후 수학에 대한 관심도

(N=20)

구 분	아주 높아졌다.	대체로 높아졌다.	보통이다.	낮아졌다.	아주 낮아졌다.
영재 학습 모형을 적용한 후 수학 관심 경향	40.00 % (8명)	45.00% (9명)	15.00% (3명)	0.00% (・명)	0.00% (・명)

학생들은 영재 학습 모형을 적용한 후 수학에 대한 관심도는 전반적으로 높게 나타났다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구는 대학교 수학 영재반에 재학 중인 초등학생에게 렌줄리 수학영재 교수-학습 모형을 개발·적용한 결과 다음과 같은 결론을 얻게 되었다.

첫째, 수학적 성향과 학습태도의 변화에 매우 긍정적 반응을 보였다.

학생들은 영재 학습 모형 적용의 수업에 적극적이고 새로운 학습과제에 도전하며 자신감을 가지고 있는 것으로 나타났다. 따라서 영재학습에 있어 학생들의 흥미를 높일 수 있는 다양한 프로그램의 개선이 요구됨을 알 수 있다.

둘째, 동료 간의 토론 수업, 자기 주도적 학습활동에 도움이 되었다. 교사와 함께 하는 학습의 응답에 있어 학생들의 학습 취향에 따라 다양한 반응을 보임으로, 학생 개개인의 특성을 고려한 영재 학습 프로그램 활용 교수-학습 활동이 개인의 잠재력을 신장시킬 수 있음을 알 수 있다.

셋째, 대부분의 학생들은 창의적으로 문제를 해결하려는 것과 지적 호기심, 과제 집착력 등에 긍정적인 반응을 보여 앞으로 보다 체계적인 교수-학습 방법이 요구된다.

본 연구는 시간 제약 상 평균에 의한 결과 해석으로 제한하여 연구하였으나 학교생활 적응에 따른 여러 요인에 대한 관련성에 대해 t-test나 통계분석을 통해 심도 있는 추가적 연구가 필요하며 초등학교 영재의 대상을 벗어나 중학교, 고등학교 영재로 확대하여 체계적이고 지속적인 연구의 필요성을 제언하고자 한다.

참고문헌

[1] 강숙희, 장영숙, 박숙희, 정태희, 임희준(2000). 영재 교수-학습 자료 개발연구. 서울: 한국교육개발원.

[2] 교육인적자원부(2001). 영재교육진흥법 시행령의 개요. 영재교육진흥법 시행령 공청회 발표 자료, 서울:한국교육개발원.

[3] 김경자, 김아영, 조석희(1998). 창의적 문제해결 능력 신장을 위한 교육과정 개발 : 개념 모형 개발, 교육과정연구, 15(2).

[4] 김홍원, 윤초희, 윤여홍, 김현철(2003). 초등 영재학생의 지적, 정의적 행동특성 및 지도 방안 연구. 서울: 한국교육개발원.

[5] 방승진(2000). 과학영재 교육센터에서의 수학영재교육의 운영 실태, 제18회 수학교육 심포지엄 발표논문, 대한심포지엄 발표논문, 대한수학회.

[6] 신세호(1979). 영재교육의 이론. 연구보고서. 한국교육개발원. 43.

[7] 장언효, 조석희(1980). “영재의 심리적 특성에 관한 연구”, 한국교육개발원.

[8] 조석희(2000), “우리 나라 수학 영재교육 현황 및 발전 전망″, 제18회 수학교육 심포지엄 발표논문, 대한수학회.

[9] 한국교육개발원. 영재교육 중장기 종합 발전 방안. 2000.

[10] Clark, B. (2002). Growing up gifted. Merrill Prentice Hall.

[11] ________ (1986). The Integrative Education Model in the Classroom. Ohio: Bell and Howell Company.

[12] Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness?: Reexamining a definition. Phi Delta Kappan, 60, 180-184.

[13] Renzulli, J. S. & Reis, S. M.(1985). The Schoolwork Enrichment Model: A Comprehensive Plan for Educational Excellence. Mansfield Center. C. T.: Creative Learning Press.

Young-man Nam
Department of Mathmatics Education
Kyungnam University
Masan, 631-701,Korea
E-mail address: nym4953@kyungnam.ac.kr

Dong-am Park
Dae Cheong High School
E-mail address: gigihin@naver.com