East Asian Mathematical Journal
Vol. 25 (2009), No. 3, pp. 343-378

九章術解에서의 평면도형의 넓이에 대한 고찰

박 영 식 · 최 길 남

ABSTRACT. In this paper, we investigate areas of plane figures (rectangle, equilateral triangle, trapezoid, circle, segment of a circle, ring) on GuJangSulHae and the other Sanhakseo, and elementary and middle school mathematics education in Korea and China.

Ⅰ. 머리말

『구장술해(九章術解)』는 『구장산술(九章算術)』에 수록된 모든 문제들을 남병길(南秉吉)이 해석을 붙인 해설서이다. 『九章算術』은 263년 위(魏)나라 유휘(劉徽)가 주를 붙이고, 당나라 초기 이순풍(李淳風, 602~670)등이 그 위에 주석을 붙임으로써 현재와 같은 방전장(方田章) 38문제, 속미장(粟米章) 46문제, 쇠분장(衰分章) 20문제, 소광장(少廣章) 24문제, 상공장(商功章) 28문제, 균수장(均輸章) 28문제, 영부족장(盈不足章) 20문제, 방정장(方程章) 18문제 그리고 구고장(句股章) 24문제로 구성된 산학서이다.

남병길은 순조 20년(1820년) 3월 6일 서울 교동에서 남구순의 둘째 아들로 태어났으며, 본관은 의령(宜寧), 자는 자상(子裳) 또는 원(元裳), 호는 육일제(六一齊) 또는 만서제(晩書齊)이다. 형 병철(秉哲)과 함께 김문정에서 한학(漢學)을 배웠으며, 특히 산학(算學)과 천문학(天文學)에 관심을 가졌다. 그가 남긴 천문학 및 수학에 관한 저술은 실로 방대하다.

2009년 8월 투고, 2009년 9월 심사 완료
2000 Mathematics Subject Classification: 97-03, 01A75
Key words: 평면도형에 대한 넓이의 계산법

천문학에 관한 것으로는『시헌기요(時憲記要)』,『성경(星鏡)』,『추보첩례(推步捷例)』,『성도의도설(星度儀圖設)』,『중성신표(中星新表)』,『항성출중입표(恒星出中入表)』,『태양실루표(太陽實漏表)』,『춘추일식고(春秋日蝕攷)』 등이 있고, 측량술과 수학에 관한 것으로는『양도의도설(量度儀圖設)』,『측량도해(側量圖解)』,『구고술도요해(句股術圖要解)』,『무이해(無異解)』,『산학정의(算學正義)』,『구장술해(九章術解)』,『집고연단(輯古演段)』,『옥감세초상해(玉鑑細草詳解)』등이 있다.

본 논문에 인용하여 비교 분석한 산학서는『구장산술(九章算術)』,『오조산경(五曹算經);北周 견란(甄鸞) 撰』,『하후양산경(夏侯陽算經); 唐 한연(韓延) 撰』,『양휘산법(楊輝算法); 南宋 양휘(楊輝) 撰』,『묵사집산법(默思集算法); 경선징(慶善徵) 저』,『구수략(九數略); 숙종, 1700년경 최석정(崔錫鼎) 저』,『구일집(九一集); 숙종, 1700년경, 홍정하(洪正夏) 저』,『이수신편(理數新編); 영조, 1774년경, 황윤석(黃胤錫) 편집』의 제22권 산학입문(算學入門), 제23권 산학본원(算學本源),『익산(翼算); 고종, 1868년경, 이상혁(李尙爀) 저』그리고『산학정의(算學正義); 고종, 1867년경, 남병길(南秉吉) 편찬, 이상혁(李尙爀) 교정』이다.

본 논문의 연구목적은『구장술해』의 방전제일(方田第一)에서 다루고 있는 평면도형 즉, 방전(方田), 규전(圭田), 사전(邪田), 기전(箕田), 원전(圓田), 완전(宛田), 호전(弧田), 환전(環田)등의 넓이를 구하는 법을 연구하고 본문에서 인용한 타 산학서에서 발췌 분석하고, 더 나아가 현재 중국의 교과서와 우리의 수학교과서와도 비교분석함으로써 평면도형의 넓이를 구하는 법에 대한 보다 효율적인 지도방안을 모색하고자 한다.
본 논문에서 큰 글자(大字)와 작은 글자(小字)는 각각『구장산술』과『구장술해』의 인용과 번역한 글이고, 표기『』는 책명을 표시한다.

Ⅱ. 본론

1. 방전(方田)의 넓이 구하기

方田[1]以御[2]田疇界域也[3]

---

1) 方田은 고대에 정사각형과 직사각형 밭을 두루 가리켰던 말이다. 그 말 속에는 또한, 당(唐)나라 때 이적(李籍)이『九章算術音義』에서 “方田者, 田之正也. 諸田不等, 以方爲正, 故曰方田”이라고 한 것처럼, 경지정리적인 뜻이 담겨져 있다.

2) 以御는 다스리다, 처리하다(理)의 뜻으로 쓰였다.

방전은 밭의 경계를 다룬다.

[問] 今有田廣十五步從十六步問爲[4]田幾何

答曰一畝

[문] 밭이 있는데 가로 15보, 세로 16보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?
답: 1무[5]

[問] 又有田廣十二步從十四步問爲田幾何

答曰一百六十八步

[문] 또 밭이 있는데 가로 12보, 세로 14보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?
답: 168보[6]

方田田之正也諸田不等以方爲正故曰方田圍周之以爲疆橫[7]從之以爲理也

術曰廣從步數相乘得積步以畝法[8]二百四十步除之卽畝數百畝爲一頃一畝之田廣十五步從十六步廣從 相乘則其中函一步小正方二百四十以邊計之爲廣從相乘之方面積以積言之爲十五步十六步聚居之總數也此爲篇端故特擧 頃畝二法餘術不復言也

방전 밭은 정사각형으로 모든 밭은 같지 않다. 방(方)은 정사각형으로 방전이라 한다. 둘레를 강(疆)으로 하고 가로 세로를 리(理)로 한다.

풀이하면 가로 세로의 보수를 서로 곱하여 적보(積步,넓이의 단위)를 얻어 무법 240보(240보를 1무로 하는 법)로 나눈다. 즉 무수이다. 100무는 1경이다. 1무의 밭은 가로 15보, 세로 16보인 가로 세로를 서로 곱하면 그 가운데 들어있는 1보의 작은 정사각형이 240개로 그것을 계산하여 가로 세로를 서로 곱한 정사각형의 넓이로 한다. 넓이를 말하면 15보 16보를 모은 총수이다. 이것은 넓이의 단위(篇端)로 하여 특히 경(頃), 무(畝) 두 법으로 하여 나머지 법은 반복하여 말하지 않는다.

[問] 今有田廣一里從一里問爲田幾何

答曰三頃七十五畝

[문] 밭이 있는데 가로 1리, 세로 1리이다. 밭의 넓이는 얼마인가?
답: 3경75무[9]

[問] 又有田廣二里從三里問爲田幾何

---

3) 以御田疇界域也는 『算學入門』(제21권)에 나온 글을 인용.

4) 問爲란 의문 문장 표현 구(句)

5) $15\times16=240$

6) $12\times14=168$

7) 원문의 광(廣)이 횡(橫)으로 바꾸어져 있음.

8) 『광운(廣韻)』에 "畝, 司馬法, 六尺爲步, 步百爲畝, 秦孝公之制, 二百四十步爲一畝"라는 기록이 보이며, 『염철론(鹽鐵論)』에서는 "古者制田百步爲畝, 光帝愛憐百姓之愁苦, 衣食不足, 制田二百四十步而一畝"라고 하였다.

9) 1리 = 300보, $300 \times 300 = 900{,}000 = 375 \times 240$ = 3경75무

答曰二十二頃五十畝

[문] 또, 밭이 있는데 가로 2리, 세로 3리이다. 밭의 넓이는 얼마인가?
답: 22경50무[10]

里田術曰廣從里數相乘得積里以三百七十五乘之卽畝數此廣從皆爲里故謂之里田一里爲三百步也廣從里數相乘得積里正方里之中函三頃七十五畝故以乘之得畝數也

이전술은 가로 세로를 서로 곱하여 넓이를 얻고 375를 곱한다. 곧 무수를 얻는다. 이것은 가로 세로 모두가 리수이므로 소위 리전 1리는 300보이다. 가로 세로 리수를 서로 곱하여 넓이를 얻고 정사각형의 넓이 리수는 3경75무수를 가지고 있어 그것을 곱하여 무수를 얻는다.

『산수서(算數書)』에서는 방전(方田)에 관한 문제로 정사각형 밭의 한 변을 구하고 있다. 즉,

「田一畝方幾何步? 曰方十五步三十一分步十五
術曰方十五步不足十五步方十六步有徐(餘)十六步
曰并贏(盈)不足以爲法不足子乘贏(盈)母贏(盈)子乘不足母并以爲實復之如啓廣之術」

정사각형 밭 1무의 한 변은 몇 보인가?

답 : 한 변이 $15\dfrac{15}{31}$보

풀이 법에 따르면 한 변이 15보 일 때는 15보가 부족하고 16보일 때는 16보가 남는다. 남는 것과 부족한 것을 더하여 나눗수로 삼고, 부족한 것을 제곱하여 남는 것의 분모로 그리고 남는 것을 제곱하여 부족한 것의 분모로 삼아서 더한 것을 나뉨 수로 삼는다.

(분석)

$240-15^2=15$이고 $16^2-240=16$이므로, 보간법에 의하여

$\dfrac{240-15^2}{x-15}=\dfrac{16^2-240}{16-x}$이 되므로,

$(240-15^2)(16-x)=(16^2-240)(x-15)$

$15(16-x)=16x-16\times15$, $(15+16)x=2(15\times16)$, $x=\dfrac{480}{31}=15\dfrac{15}{31}$

2. 규전(圭田)의 넓이 구하기

[問] 今有圭田[11]廣十二步正從二十一步問爲田幾何

---

10) (2×300)×(3×300)÷240= 2×3×900,000÷240=2250무=22경50무

答曰一百二十六步

[문] 이등변 삼각형의 밭이 있는데 밑변이 12보, 높이가 21보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 126보[12]

[問] 又有圭田五步二分之一從八步三分之二問爲田幾何

答曰二十三步六分之五

[문] 또 이등변 삼각형의 밭이 있는데 밑변이 $5\frac{1}{2}$보, 높이가 $8\frac{2}{3}$보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

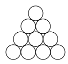
답 : $23\frac{5}{6}$보[13]

術曰半廣以乘正從半廣者以盈補虛取其中平之廣也

풀이는 밑변의 반을 높이에 곱한다. 밑변의 반이라는 것은 이등변 삼각형의 반을 빈자리에 채운 중평(직사각형)의 밑변이다.[14]

『산학입문(算學入門)』<理藪新編 제22권>의 방전구적법(方田求積法)

「形尖如圭也以長乘廣半之得積[又廣二而一以長乘得積ㅇ凡角形邃面等廣者是曰有法自三角四角五角以上諸有角者皆求中心向角作二線各成圭形以圭求積如三角形得三圭如四角形得四圭五角形得五圭積以圭積以諸圭數乘之卽其角形全數也」

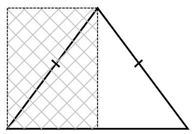
圭垜[15]  雖與圭田相類却用梯田法[出楊輝法]

---

11) 규전(圭田)은 이등변 삼각형을 가리킨다. 현대 중국어로는 兩等邊 三角形 또는 等腰三角形이다.

12) $\dfrac{12\times 21}{2}=126(\text{보}^2)$

13) $\dfrac{5\frac{1}{2}\times 8\frac{2}{3}}{2}=\dfrac{\frac{11}{2}\times\frac{26}{3}}{2}=23\frac{5}{6}(\text{보}^2)$

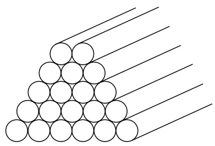


14) 이순풍의 풀이로는 "남는 것으로 빈 곳을 채워 직사각형을 만드는 것(半廣者, 以盈補虛, 爲直田也")라고 설명하면서 높이를 반으로 나눠 밑변을 곱해도 마찬가지라고 지적한다.

15) 圭垜는 교초타(茭草垜)로 규타의 모양은 규전과 같지만 圭垜의 넓이는 梯田(사다리꼴 밭)의 넓이를 구하는 법에 따른다. 즉, $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(1+n)}{2}$이다. 따라서 규전과 규타의 넓이는 다른데 그 구하는 방법은 같다.

모양의 끝이 뾰족한 것이 규(圭)이다. 길이(높이)로 너비(밑변)를 곱하여 반으로 하면 넓이를 얻는다.[또, 너비를 반으로 하여 길이를 곱하면 넓이를 얻는다. 다각형에서 변을 따라서 길이를 같게 하는 법이 있다. 삼각으로부터 4각, 5각 이상의 다각이 있는 것은 모두 중심을 구하여 꼭짓점을 향해 두 선을 그으면 각각이 이등변 삼각형으로 되어 규전법으로 넓이를 구한다. 가령, 삼각형은 3개의 이등변 삼각형을 사각형은 4개의 이등변 삼각형, 오각형은 5개의 이등변 삼각형을 얻어 이등변 삼각형의 넓이에 꼭짓점의 개수로 곱한다. 곧 그 다각형의 전체 넓이이다.]
규타는 비록 규전과 모양이 같으나 사다리꼴 밭의 넓이를 구하는 법으로 쓴다. (양휘산법에 있다)
예를 들면 중국『九年义务教育五年制 小学教科书 数学 第八册』의 练习九에 수록된 문제가 있다.

「我们经常见到圆木, 钢管等堆成像下图的形状, 通常用下面的算法求总根数:
(项层根数 ＋底层根数)×层数÷2
想一想是什么道理, 并算出图中圆木的总根数」



중국『9년 의무교육 5년제 소학교과서 수학 제8권』의 연습9에서 “우리는 원목(둥근 목재), 강철판 등을 쌓아 이룬 아래 그림과 같은 모양을 일상적으로 보아왔다. 보통 아래의 산법을 사용하여 총 원목의 개수를 구하게 된다. :
(위층의 원목개수 + 아래층의 원목개수)×층수÷2.
어떤 법칙인가를 생각해보라. 그림에서 원목의 총 개수를 구하라.”

3. 邪田, 箕田 그리고 梯田의 넓이 구하기

[問] 今有邪田[16]一頭廣三十步一頭廣四十二步正從六十四步問爲田幾何
答曰九畝一百四十四步

[문] 직각사다리꼴의 밭이 있는데 한 쪽 너비(윗변)가 30보, 다른 쪽 너비(아랫변)가 42보, 높이가 64보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?
답 : 9무144보[17]

---

16) 사전(邪田)은 직각사다리꼴을 말하며, 정대위(程大位)의『산법통종(算法統宗)』에서도 같은 뜻으로 쓰인다. 이황(李潢)의『구장산술세초도설』은 그것을 일반적인 사다리꼴로 간주하지만, 백상서(白尚恕 1983:32)는『구장산술』의 원 뜻에는 어긋난다고 비판한다.

17) $\dfrac{(30+42)\times 64}{2} = 2304 = 9\text{무}144(\text{보}^2)$

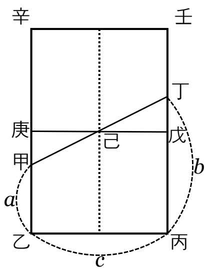
[問] 又有邪田正廣六十五步一畔從一百步一畔從七十二步問爲田幾何

答曰二十三畝七十步

[문] 또, 직각사다리꼴의 밭이 있는데 직각을 낀 변(밑변)이 65보, 한 쪽의 높이가 100보, 다른 쪽의 높이가 72보이다. 밭의 넓이는 얼마인가? 답 : 23무70보[18]

術曰幷兩邪而半之以乘正從若廣幷以半之者以盈補虛取其中平之邪也又可半正從若廣以乘幷畝法而一幷者倍也中平之邪以半正從者廣乘之以畝法除之卽得

풀이는 변(畔從)을 더하여 반으로 하고 직각을 낀 높이 또는(若) 너비를 곱한다. 또 두 변을 합하여 반으로 하는 것은 남는 것으로 빈 곳을 채워 그 중간의 반을 취하는 것이다. 또 직각을 낀 변 또는 너비를 반으로 나눌 수 있으면 나누어 두 변을 합하여 곱하고 무(畝)단위로 나눈다. 합하여 2배한다. 중간 평균의 변에서 직각을 낀 변(높이)인 너비를 곱하고 2배하여 무법으로 나누면 곧 얻는다.



(분석) 그림과 같이 正廣을 c, 두 개의 畔從을 각각 a, b라 하면 직각사다리꼴 甲乙丙丁의 넓이는

$\dfrac{c(a+b)}{2}=2\left(\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{c}{2}\right)$이다.

풀이 : $\overline{丙戊}=\overline{甲辛}$과 $\overline{甲乙}=\overline{丁壬}$되게 辛과 壬을 두면 직각사다리꼴 甲乙丙丁의 넓이 $=$ (직각사각형乙丙壬辛의 넓이)$\times\dfrac{1}{2}$

따라서 $\dfrac{a+b}{2}\times c=2\left(\dfrac{a+b}{2}\times\dfrac{c}{2}\right)=\dfrac{c(a+b)}{2}$.

여기서 직각사다리꼴에서 兩邪는 위 아래 두변을 가리킨다. 또, "正從若廣"은 사다리꼴의 높이를 너비로 볼 수 있다는 점에서 "같다"고 한 것이다.

[問] 今有箕田[19]舌廣二十步踵廣五步正從三十步問爲田幾何

答曰一畝一百三十四步[20]

[문] 등변 사다리꼴의 밭이 있는데 아랫변(혀너비) 20보, 윗변(발꿈치너

---

18) $\dfrac{(100+72)\times 65}{2}=5590=23무70(보^2)$

19) 箕田은 등변사다리꼴을 가리킨다. 현대 중국어로는 等腰梯形에 해당한다. 여기서는 넓게 펼쳐진 부분(아랫변)을 "혀(舌)", 좁게 줄어진 부분(윗변)을 "발꿈치(踵)"로 각각 부르고 있으나 『오조산경』전조-13에서는 모두 "머리(頭)"로 지칭하고 있다.

20) 四步가 아니라 五步이다.

비) 5보, 높이 30보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 1무134보[21)]

[問] 又有箕田舌廣一百一十七步踵廣五十步正從一百三十五步問爲田幾何

答曰四十六畝二百三十二步半

[문] 또, 등변사다리꼴의 밭이 있는데 아랫변 117보, 윗변 50보, 높이 135보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 46무232$\frac{1}{2}$보[22)]

術曰并踵舌而半之以乘正從畝法而一 舌卽下廣踵卽上廣與梯田法同

풀이는 윗변과 아랫변을 합하여 반으로 하고 높이를 곱하여 무법으로 한다. 舌 즉, 아래너비 踵 즉, 위 너비와 더불어 사다리꼴 밭의 넓이를 구하는 것과 동일하다.

(3-1)『산학입문(算學入門)』<이수신편(理藪新編) 제22권>

① 방전구적법(方田求積法)

「梯

一頭短一頭長也併兩闊半之[卽停闊[23)]○如一頭闊二尺一頭闊四尺併闊半之得三尺是爲停闊]以長乘之得積[亦見楊輝法]」

제(사다리꼴)

한쪽 변은 짧고, 한쪽 변은 길다. 두 변을 합하여 2로 나누어 [즉 정활이다. 가령 한 변이 2자이고 다른 변이 4자이면 두변을 합하여 2로 나누면 3자이고 이것이 정활이다.] 높이를 곱하면 넓이이다. [『양휘산법』에도 보인다.]

② 의고절전(議古截田)

「梯田一段長九十步南闊二十步北闊三十步今自南頭截地八百二十二步半問截長闊各幾步(南闊小闊也北闊大闊也)

答曰截長三十五步截闊二十七步

先求長術曰二因截積元長乘之闊差(一十八步)而一爲實倍南闊以元長乘之闊差而一爲從法開方除得截長○闊差乘截長如元長而一得截闊(如梯長二闊及積

---

21) $\frac{(20\times5)\times30}{2}=375=1$무$135($보$^2)$

22) $\frac{(117+50)\times135}{2}=\frac{22545}{2}=11272\frac{1}{2}=46$무$232\frac{1}{2}($보$^2)$

23) $\frac{\text{윗변}+\text{아랫변}}{2}$

求長卽積二之長乘二闊差除之乃倍小闊乘長二闊差除之爲從方開得長)
先求闊術曰二之截積闊差乘之小頭闊(二十步)自乘倂之開平方得截闊○倂兩廣折半除截積卽截長」

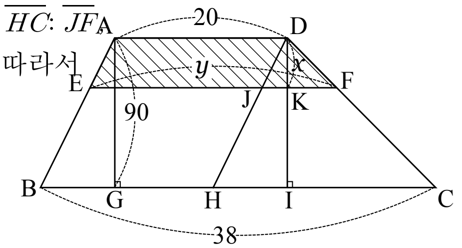
사다리꼴의 밭이 있는데, 높이는 90보, 윗변은 20보, 아랫변은 38보이다. 지금 윗변으로부터 아래로 넓이가 822보 반되게 땅을 잘랐다. 자른 부분의 높이와 밑변은 각각 얼마인가?
(윗변은 짧은 변, 아랫변은 긴 변이다.)
답 : 자른 부분의 높이 35보, 밑변 27보
높이를 구하는 법 : 자른 부분의 넓이를 2배하고 원래 높이를 곱하여 위와 아랫변의 차(18보)로 나누어 나뉨수로 한다. 윗변을 2배하여 원래의 높이를 곱하고 두 변의 차로 나눈 것을 종법[24]으로 하는 이차방정식을 풀면 자른 부분의 높이를 얻는다. 두 변의 차를 자른 높이에 곱하고 원래 높이로 나누면 자른 밑변을 얻는다. (사다리꼴의 높이와 두 변 및 자른 부분의 넓이를 알고 자른 부분의 높이를 구하려면 넓이를 2배하여 높이를 곱하고 두 변의 차로 나눈다. 다음 짧은 변을 2배하여 높이를 곱하고 두 변의 차로 나누어 종방으로 하는 2차방정식을 풀어 높이를 얻는다.)
밑변을 구하는 법 : 자른 넓이를 2배하고 두 변의 차를 곱하고 원래의 높이를 나누어 윗변(20보)의 제곱을 합한 다음 제곱근을 구하면 자른 밑변을 얻는다. 두 변을 합하여 2로 나누어 이것으로 자른 넓이를 나눈다. 즉 자른 높이이다.

(분석) 그림과 같이 높이가 $\overline{AG}$, 또는 $\overline{DI}$인 사다리꼴 $ABCD$에서 잘린 부분 사다리꼴 $AEFD$의 넓이가 822.5보^{2}되도록 밑변 EF와 높이 DK를 각각 y보, x보라 하고 선분 $\overline{BC}$위에 점 H를 놓아 사각형 $ABHD$를 평행사변형으로 하여 $\overline{DH}$와 $\overline{EF}$가 만난 점을 J라 놓으면

$\triangle HDC \backsim \triangle DJF$이므로 $\overline{DI}: \overline{DK}= \overline{HC}: \overline{JF}$

즉 $90 : x = (38-20) : (y-20)$이다. 따라서

$y = \dfrac{18}{90}x + 20$ ………… ①



또, 사다리꼴 $AEDF$의 넓이가 822.5보^{2}이므로

24) 2차방정식의 1차 계수

$$822.5=\frac{x(y+20)}{2} \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

①, ②에 의해 종법 200인 2차방정식 $x^2+200x-8225=0$을 얻어 풀면,

$(x+100)^2=18225=135^2$, 곧 $x=35$, $y=\frac{18}{90}\times 35+20=27$.

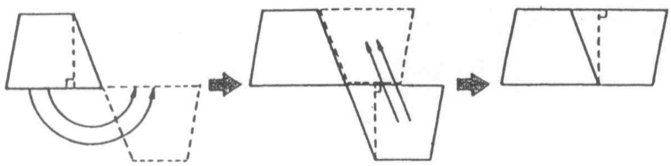
(3-2) 중국『九年义务教育五年制小学教科书 数学 第十册』

梯形面积的计算

右图是一个梯形。它的上底是3厘米，下底是5厘米，高是4厘米。

想一想：你能仿照求三角形面积的办法，把梯形也转化成已学过的图形，计算出它的面积吗?

用纸剪两个完全一样的梯形，拼拼看。



通过实验看出：两个完全一样的梯形可以拼成一个平行四边形。这个平行四边形的底等于___________，高等于___________。每个梯形的面积等于拼成的平行四边形面积的___________。

所以，上面梯形的面积可以这样计算：

$(3+5)\times 4\div 2$

=______________________

=______________________

=___________ （平方厘米）

梯形的面积 =（上底+ 下底）× 高 ÷ 2

如果用 S表示梯形的面积，用 a, b 和 h 分别表示梯形的上底，下底和高，那么梯形面积的计算公式是 $S=(a+b)h\div 2$ 」

사다리꼴의 넓이 계산

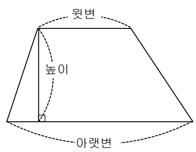
오른쪽 그림은 한 개의 사다리꼴이다. 그 윗변은 $3cm$, 아랫변은 $5cm$, 높이가 $7cm$이다.

생각해보기 : 삼각형의 넓이를 구하는 방법에 따른다. 사다리꼴을 이마 배웠던 도형으로 옮겨서 그 넓이를 계산해 낼 수 있는가? 종이를 잘라 두 개의 완전한 같은 모양의 사다리꼴을 사용하여 서로 맞붙여 본다.
실험을 통하여 나타내보기 : 두 개의 완전한 같은 모양의 사다리꼴을 맞붙이면 한 개의 평행사변형이 된다. 그 평행사변형의 밑변은 에 같고, 높이는 __________에 같다. 각각 사다리꼴의 넓이는 맞붙여서 이룬 평행사변형의 넓이의 __________에 같다.
그러므로, 사다리꼴의 넓이는 이와 같이 계산할 수 있다. :

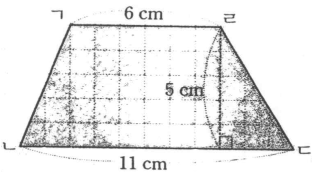
$$(3+5)\times 4\div 2$$
$$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$
$$=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_(cm^2)$$

사다리꼴의 넓이 $=($윗변$+$ 아랫변$)\times$높이$\div 2$
만약 S를 사다리꼴의 넓이로 표시하고, a, b와 h를 사다리꼴의 윗변, 아랫변 그리고 높이로 두면 사다리꼴 넓이의 계산공식은 $S=(a+b)h\div 2$이다.
(3-3) (1)『초등학교 수학 5-나』

① 사다리꼴에서 평행인 두 변을 밑변이라 하고, 밑변을 위치에 따라 윗변, 아랫변이라고 합니다. 그리고 두 밑변 사이의 거리를 높이라고 합니다.



② 사다리꼴을 삼각형으로 나누어 넓이를 구하여 보시오.



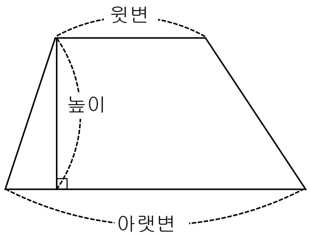
- 사다리꼴 ㄱㄴㄷㄹ에서 꼭짓점 ㄴ과 꼭짓점 ㄹ을 이어 2개의 삼각형을 만들어 보시오.
- 삼각형 ㄱㄴㄷ의 넓이를 구하여 보시오.
- 삼각형 ㄴㄷㄹ의 넓이를 구하여 보시오.

- 사다리꼴 ㄱㄴㄷㄹ의 넓이를 어떻게 구하면 좋을지 말하여 보시오.
- 왜 그렇게 생각합니까?

③ 사다리꼴을 2개 붙여서 넓이를 알아보시오.

- 합동인 사다리꼴 2개를 본 떠 보시오.
- 본 뜬 2개의 사다리꼴을 오려 각각의 윗변과 아랫변이 붙도록 돌려 붙여 보시오.
- 어떤 도형이 되었습니까?
- 이 도형의 넓이는 어떻게 구합니까?
- 사다리꼴의 넓이를 어떻게 구하면 좋을지 말하여 보시오.
- 왜 그렇게 생각합니까?

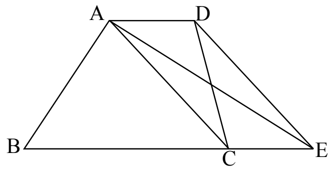
<사다리꼴의 넓이를 구하는 방법>



(사다리꼴의 넓이)= {(윗변)+(아랫변)}×(높이)÷2

(2)『중학교 수학 8-나』

오른쪽 그림에서 $\overline{BC}$의 연장선 위에 한 점 E를 잡아 사각형 $ABCD$의 넓이와 삼각형 ABE의 넓이가 같도록 하여라.



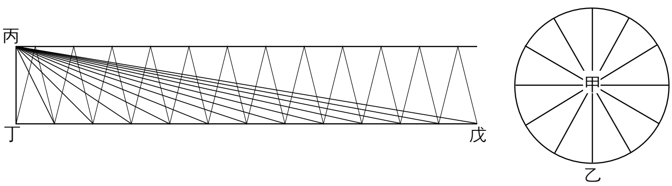
(풀이) 점 D를 지나고 $\overline{AC}$와 평행인 직선이 $\overline{BC}$의 연장선과 만나는 점을 E라 하면, $\overline{AC}//\overline{DE}$이므로

$\triangle ACD = \triangle ACE$가 된다.

$$\begin{aligned} \therefore \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \triangle ABC + \triangle ACE \\ &= \triangle ABE \end{aligned}$$

4. 원전의 넓이 구하기

(*) 圓面積圖說



凡圜[25]形之輻線與一直角三角形之小邊線度等而圜之周界與三角形之大邊線度等則此直角三角形之面積與圜形之面積相等也何以見之甲圜之輻線與三角形之小邊等者卽如等邊衆界形之中垂線與三角形之小邊等也甲圜之周界與三角形之大邊等者卽如等邊衆界形之各界共度與三角形之大邊等也今此甲圜形相等之丙丁戊三角形其小邊旣與圜之輻線等而三角形之大邊又與圜之周線等則其積分與圜形之積分相等無疑矣然圜周界曲線也等邊衆界形之界度直線也觀之似難於相通者如以圜之內外各設多邊衆界形分爲千萬邊則逼圜界最近將合而爲一乃依所分之段爲千萬正式三角形此千萬正式三角形之中垂線亦將與圜之輻線合而爲一而千萬邊共界度旣與圜周合而爲一則圜周之曲線亦變而爲直線矣夫千萬邊正式三角形之中垂線旣成圜之輻線則與丙丁戊三角形之小邊等而千萬邊正式三角形之底界共度又成圜之周度則又與丙丁戊三角形之大邊度等矣復自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界各作千萬斜式三角形以比正式三角形因其底同其分自相等故千萬斜式三角形之共積比之千萬正式三角形之共積千萬正式三角形之共積[26]比之丙丁戊一直角三角形之面積丙丁戊直角三角形之面積[27]比之甲園形之面積俱相等也

대개 원형의 반지름(輻線)과 하나의 직각삼각형 작은 변의 길이는 같고 원의 둘레와 삼각형의 한 변의 길이가 같으면 이 직각삼각형의 넓이와 원의 넓이는 서로 같다. 살펴보면 甲원의 반지름과 삼각형의 작은 변이 같다는 것은 즉, 길이가 같은 변으로 수없이 경계로 이루어진 形의 중수선과 삼각형의 작은 변은 같다. 甲원의 둘레의 경계선과 삼각형의 큰 변이 같다는 것은 즉, 길이가 같은 변으로 수없이 경계로 이루어진 형의 각 경계 길이를 더한 것과 삼각형의 큰 변과 같다는 것이다. 지금 이 甲원형은 丙丁戊 삼각형과 서로 같다. 그 작은 변과 원의 반지름은 같고 삼각형의 큰 변과 또 원의 둘레가 같으면 그 넓이와 원의 넓이가 서로 같고 원의 둘레 경계가 곡선임에는 의심이 여지가 없다. 길이가 같은 변

25) 여기서 圜은 圓과 같은 뜻이다.
26) 중복되어 있으므로 이 구절은 빼야 될 것 같다.
27) 중복되어 있으므로 이 구절은 빼야 될 것 같다.

으로 수없이 경계로 이루어진 형(등변중계형: 원에 내접한 정다각형)의 변(界度)은 직선이다. (앞의 사실이) 서로 통하는 데에는 어려움이 있음을 안다. 즉, 원의 안과 밖 각각이 많은 변으로 나열하여 수없이 많은 경계로 이루어진 선분을 천만 개 선분으로 하면 원의 경계에 가장 가깝게 되어 같게 된다. 이에 따른 선분의 마디는 정 천만각형(千萬正式三角形)이 된다. 이 정 천만각형의 수직선 역시 원의 반지름과 거의 같게 된다. 천만 개 변을 합하여 원둘레와 같으면 원둘레의 곡선 역시 변하여 직선이 된다. 대개 정 천만각형의 수직선이 원의 반지름과 같으면 丙丁戊의 작은 변의 길이와 같다. 정 천만각형의 밑변의 길이는 모두 같고 또, 원둘레를 이룬다면 丙丁戊삼각형의 큰 변의 길이와 같게 된다. 다시 丙丁戊삼각형의 모서리로부터 정 천만각형의 밑변까지 각각 천만 개의 사선(빗변)으로 한 삼각형을 만들고 정다각형(正式三角形)에 의한 그 밑변이 같고 그 각각 선분이 서로 같으므로 천만 개의 빗변으로 한 삼각형의 넓이는 모두 같으며 정 천만각형의 모든 넓이와 한 직각삼각형 丙丁戊의 넓이는 甲원의 넓이와 서로 같다.

[원면적도설(圓面積圖說)에 대한 분석]

원면적도설의 그림에서 甲乙(輻線)을 원 甲의 반지름, 丙丁(小邊線)과 丁戊(大邊線)를 각각 직각삼각형 丙丁戊의 높이와 밑변으로 하여 원 甲의 넓이를 구하는 법을 아래와 같이 설명하고 있다.

“$\overline{\text{甲乙}}$(a)과 $\overline{\text{丙丁}}$(b)이 같고 원 甲의 둘레(l)가 $\overline{\text{丁戊}}$(c)와 같으면 직각삼각형 丙丁戊의 넓이(S_1)와 원 甲의 넓이(S_2)는 같다. (圜形之輻線與一直角三角形之小邊線度等而圜之周界與三角形之大邊線度等則此直角三角形之面積與圜形之面積相等也)”라 하였는데, 이것은 원주율을 3으로 하여 기하학적 알고리즘에 의해 $S_1 = S_2$이다. 즉, $S_1 = \dfrac{bc}{2} = 3a^2 = S_2,$ 여기서 $c = 6a$이다. 다음은 l과 c가 같음을 설명하고 있다. 그림에서 무수히 많은 삼각형의 중수선(높이)은 모두 b($\overline{\text{丙丁}}$)로써 각각 밑변이 같고 그 합이 c($\overline{\text{丁戊}}$)이다. 만약 a=b 그리고 $l = c$이면 $S_1 = S_2$가 된다. 여기서 l과 c가 같음은 비록, 원의 둘레 경계가 곡선이고 원에 내접한 정다각형의 변이 직선으로서 같게 보는 데는 어려움이 있으나, “내외접 정다각형 각각의 경계로 이루어진 천만 개의 선분이 원의 경계에 가장 가깝게 된다. 천만 개의 변 길이를 합하여 원둘레와 같으면 원둘레의 곡선이 변하여

직선이 된다. (圜之內外各說多邊衆界形分爲千萬邊則逼圜界最近將合而爲一千萬邊共界度旣與圜周合而爲一則圜周之曲線亦變而爲直線矣)”고 하였다. 따라서 “삼각형 丙丁戊의 모서리로부터 정천만각형의 밑변까지 각각 천만 개의 빗변으로 한 삼각형을 만들고 정다각형에 의한 그 밑변이 같고 그 각각 선분이 같으므로 천만 개의 빗변으로 한 삼각형들의 넓이는 모두 같으며 그들의 모든 넓이와 한 직각삼각형 丙丁戊 의 넓이는 원 甲의 넓이와 같다. (自丙丁戊三角形之丙角至千萬正式三角形之底界各作千萬斜式三角形以比正式三角形因其底同其分自相等故千萬斜式三角形之共積比之千萬正式三角形之共積比之丙丁戊一直角三角形之面積比之用圖形之面積俱相等也)”라고 설명하고 있다.

[問] 今有圓田周三十步徑十步問爲田幾何

答曰七十五步

[문] 원 모양의 밭이 있다. 둘레가 30보, 지름이 10보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 75보[28)]

[問] 又有圓田周一百八十一步徑六十三分步之一問爲田幾何

答曰十一畝九十步十二分步之一

[문] 또, 원 모양의 밭이 있는데 둘레가 181보, 지름이 $60\frac{1}{3}$ 보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 11무 $90\frac{1}{12}$ 보[29)]

術曰半周半徑相乘得積步蓋圓之半徑線若與直角三角形之小邊線度等而圓之周界又與直角三角形之大邊線度等則此直角三角形之面積與圖形之面積相等是故以圓半徑相等之直角三角形小邊與圓半周相等之直角三角形大邊折半度相乘得長方形卽爲圓面積也圖說(*)見後此周三徑一之率而徑一則周三有餘周三則徑一不足故徑求積所得必小積求徑[30)]所得必大也祖冲之率周三五五徑一一三約之爲密率周二十二徑七劉徽率周一百五十七徑五十定率徑一周三一四一五九二六五爲最密也

---

28) ① $S=\pi r^2 \approx 3\times 5^2 = 75(\text{보}^2)$, $S=\frac{1}{2}rl=\frac{1}{2}\times 5\times 30 = 75(\text{보}^2)$

② 위 문제는 古率인 3으로 사용하고 있다.

29) $S=\frac{1}{2}\times 181\times 30\frac{1}{6}=\frac{32761}{12}=2730\frac{1}{12}=11\text{무}90\frac{1}{12}(\text{보}^2)$

30) 周求積의 誤記임

又術曰周徑相乘四而一蓋全徑爲半徑之倍全周爲半周之倍則全周全徑相乘之積必大於半周半徑相乘之積四倍故以四歸之也

又術曰徑自相乘三之四而一蓋徑自乘三倍則與全周全徑相乘之數相等故徑自乘三因四歸也此周三徑一之率夫周三與徑一相乘得三以徑一自乘三倍之亦得三故徑自乘三倍與全周全徑相乘等也

又術曰周自相乘十二而一蓋周自乘數爲徑自乘數九倍而圓積又爲徑自乘數四分之三以周自乘數比圓積當爲十二倍 故以十二除之也

풀이로는 원둘레 반과 반지름을 서로 곱하여 넓이를 얻는다. 대개 원의 반지름은 직각삼각형의 작은 변의 길이와 같고 원둘레 또한 직각삼각형의 큰 변의 길이와 같은 즉, 이 직각삼각형의 넓이와 원의 넓이가 서로 같으므로 원의 반지름과 서로 같은 직각삼각형의 작은 변과 원둘레의 반과 서로 같은 직각삼각형의 큰 변의 반을 서로 곱하여 직사각형의 넓이를 얻는다. 곧 원의 넓이이다. 원면적도설(*)에 따라 지름이 1이면 원둘레는 3보다 크고, 원둘레 3이면 지름은 1보다 작으므로 지름으로 넓이를 구하게 되면 반드시 넓이는 작고 원둘레로 구하는 넓이는 반드시 크다. 조충지의 율은 원둘레 355를 지름 113으로 나누면 밀율이다. 원둘레 22를 지름 7로 나누면 약율이다. 유휘율은 원둘레 157을 지름 50으로 나눈 것이고, 정율은 지름이 1 원둘레는 3.14159265로 가장 정밀한 것이다.[31]

또, 풀이하면 원둘레와 지름을 서로 곱하여 4로 나눈다. 대개 지름은 반지름의 2배이고 원둘레는 원둘레의 반의 2배인 즉, 지름과 원둘레를 서로 곱한 넓이는 반드시 원둘레의 반과 반지름을 곱한 넓이보다 4배 크므로 4로 나눈다.[32]

---

31) (*)원면적도설 그림을 참조

r: 원의 반지름, R: 원의 지름, l: 원의 둘레, S: 원의 넓이

1) $S=\pi r^2=\pi r.r=\dfrac{l}{2}.r$

2) 원의 반지름(r) = 직각삼각형 丙丁戊의 작은 변 丙丁의 길이

3) 원둘레(l) = 직각삼각형 丙丁戊의 큰 변 丁戊의 길이

4) 직각삼각형 丙丁戊의 넓이 $=\dfrac{1}{2}(\overline{丙丁}\times\overline{丁戊})=\dfrac{\overline{丁戊}}{2}\times\overline{丙丁}$ = 원의 넓이

5) 직사각형의 넓이 $=\overline{丙丁}\times\dfrac{\overline{丁戊}}{2}$ = 원의 넓이

6) 원면적도설에서 고율을 3으로 하여 지름이 1이면 원둘레는 3보다 크고 원둘레를 3으로 하면 지름은 1보다 작다

① $l=3$일때, 지름으로써 넓이 구하기 : $S=\dfrac{Rl}{4}=\dfrac{3R}{4}<\dfrac{3}{4}(0<R<1)$

② $R=1$일 때, 원둘레로써 넓이 구하기: $S=\dfrac{Rl}{4}=\dfrac{l}{4}>\dfrac{3}{4}(l>3)$

7) ① 조충지율 : 밀율 $=\dfrac{355}{133}$, 약율 $=\dfrac{22}{7}$

② 유율 $=\dfrac{157}{50}$

③ 정율 $=3.14159265$

또, 풀이하면 지름을 제곱하고 3을 곱하여 4로 나눈다. 대개 지름을 제곱하고 3배하면 원둘레와 지름을 서로 곱한 수와 서로 같으므로 지름을 제곱하여 3을 곱하고 4로 나누는 것이다. 이 원둘레 3과 지름을 1로 하는 율은 이 원둘레 3과 지름 1을 서로 곱하여 3을 얻고 지름 1을 제곱하여 3배하는 것 역시 3을 얻으므로 지름을 제곱하여 3배하는 것과 원둘레와 지름을 서로 곱한 것과 같다.

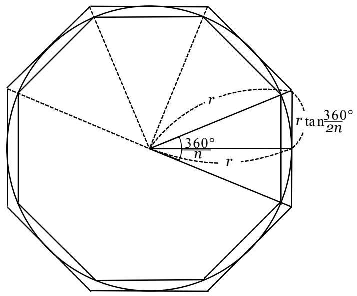
또, 풀이하면 원둘레를 제곱하여 12로 나눈다. 대개 원둘레를 제곱한 수는 지름을 제곱하여 9배한 것이고 원의 넓이는 또한 지름을 제곱하여 $\frac{3}{4}$한 것이다. 원둘레를 제곱한 수는 원의 넓이에 비해 당연히 12배이므로 12로 나눈다.[33]

(4-1)『산학정의(算學正義)』 상권(上卷)의 각면율(各面率)

원면적도설(圓面積圖設)을 기하학적 알고리즘으로 다음과 같이 풀이하고 있다.

「圓面積自中心倍爲屢百億三角形則皆以半徑爲垂線而圓弧爲低邊故用三角形求面積法求之也」

원의 넓이는 중심에서 수백억 개의 삼각형으로 분할하면 모두 반지름이 수선이 되고 원둘레의 호가 밑변이 되므로 삼각형을 이용하여 넓이를 구하는 법으로 그것을 구한다.



(그림)

(분석) (그림)에서 원의 지름을 이용하여 원의 넓이를 구하는데 있어서 원의 내접, 외접하는 정다각형에서 두 다각형의 넓이를 차츰 가늘게 쪼개어 가면 원과 정다각형의 넓이가 각각 일치되어짐을 보이고 있다. 따라서 아르키메데스(Archimedes, 기원전 287-212)의 착출법(搾出法, Exhausted method)에 의한 것과 같음을 알 수 있다. 즉, 반지름이 r인 원에 내접하는 정n각형의 넓이를 A_n, 외접하는 정n각형의 넓이를 B_n, 그리고 원의 넓이를 S라 하면,

---

32) $S=\frac{R\times l}{4}$ (R: 지름, l: 원둘레)

33) $S=\frac{l^2}{12}=\frac{(2\pi r)^2}{12}=\frac{4\pi \bullet \pi r^2}{12}=\pi r^2\,(\pi=3)$

$4\pi^2 r^2=(2r)^2\times\pi^2=4r^2\times\pi^2$ 이므로 $S=\frac{4\pi^2 r^2}{12}=\frac{4\pi}{12}\pi r^2=\pi r^2\,(\pi=3)$

$A_n = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{\mathrm{n}}$, $B_n = \frac{2nr}{2}\tan\frac{2\pi}{2\mathrm{n}}(\mathrm{n} = 3, 4, \cdots)$이고 $A_n \le S \le B_n$이므로 $\lim_{n\to\infty} A_n = S = \lim_{n\to\infty} B_n$이 성립한다. 또 원에 내접, 외접하는 정다각형에서 여러 번 직각삼각형을 구하여 그 변의 개수가 많으면 많을수록 외접정다각형의 변의 합과 내접정다각형의 변의 합이 서로 원둘레와 일치하므로 그 변의 수를 이용하여 변의 길이를 곱해 원둘레를 얻고 반지름r과 원둘레l를 곱한 반으로 원의 넓이를 얻는다.

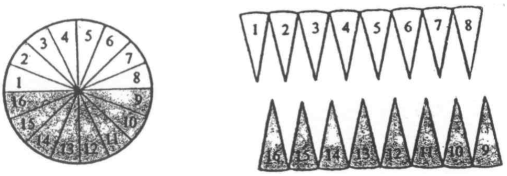
즉, $S = \frac{1}{2}rl$이다.

(4-2) 중국『九年义务教育五年制小学教科书 数学 第十册』

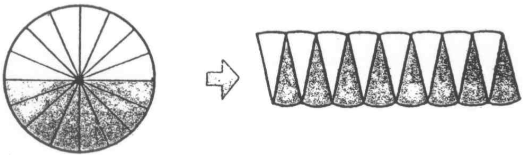
圆的面积

圆所围平面的大小叫做圆的面积。怎样计算圆的面积呢？能不能把圆转化成学过的图形来计算呢？

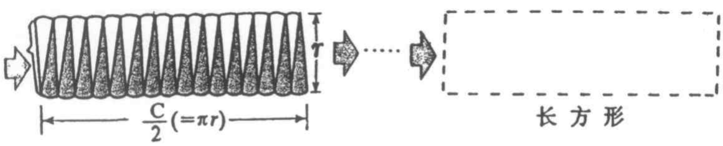
在硬纸上画一个圆，把圆分成若干等份，剪开后，用这些近似等腰三角形的小纸片拼一拼，看能拼成什么图形。



这些小纸片可以拼成一个近似的平行四边形。



如果分的份数越多，每一份就会越细，拼成的图形就会越接近于长方形。



这个长方形的长和宽与圆的周长和半径有什么关系？

如果圆的半径是 r，这个长方形的长和宽各是多少？

因为　　　长方形面积 ＝ 长 × 宽

所以　　圆的面积 = $\pi r \times r = \pi r^2$

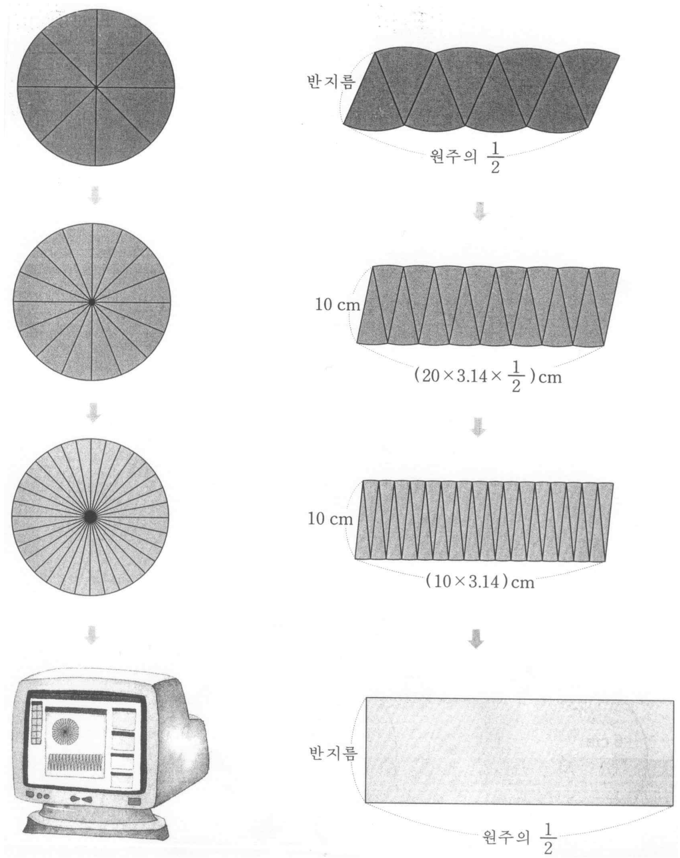
用S表示圆的面积, 那么圆的面积计算公式就是:

$$\boxed{S = \pi r^2}$$

원넓이
원에 둘러싸인 평면의 크기를 원의 넓이라 한다. 원의 넓이를 어떻게 계산하는가?
원을 이미 학습한 도형으로 바꾸어 계산할 수 있는가? 두꺼운 종이 위에 원을 그려 여러 개 같은 부분으로 나누어서 가위로 자른 후, 이등변 삼각형의 비슷한 작은 종이 조각을 붙여보자. 이렇게 만든 도형이 무엇인지 알아보자.
이 작은 종이 조각들을 붙여 한 개의 평행사변형과 비슷한 도형을 이룰 수 있다. 만약, 나눈 부분의 개수가 많으면 많을수록 각 부분이 더욱 더 작아져서 붙여 만든 도형이 점점 직사각형에 가깝게 된다. 직사각형의 길이와 너비는 원의 둘레와 반지름과는 어떤 관계가 있는가?
만약 원의 반지름이 r이면 그 직사각형의 길이와 너비는 각각 얼마인가?
직사각형의 넓이 = (길이)×(너비)이므로, 따라서 원의 넓이 = $\pi r \times r = \pi r^2$이다.
S를 원의 넓이라 하면 원 넓이의 계산공식은 $S = \pi r^2$이다.

(4-3)『초등학교 수학 6-나』
원의 넓이를 다음과 같은 방법으로 알아보시오
●반지름이 $10cm$인 원을 그린 후, 그림과 같이 잘라 모눈종이에 붙여서 알아보시오.

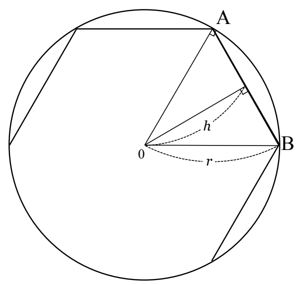
(4-4)『고등학교 수학Ⅱ』교사용 지침서에서의 원의 넓이 구하기.
반지름 길이가 r인 원의 넓이 S를 구분구적법을 써서 구하라.
(풀이) 원에 내접하는 정n각형의 둘레의 길이를 l_n, 넓이를 S_n이라 하면 오른쪽 그림에서



$$S_n = \triangle OAB \times n$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h\right)\times n$$
$$= \frac{1}{2}\cdot h\cdot n\cdot\overline{AB}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot h\cdot l_n$$

그런데 $n\to\infty$ 일 때 $h\to r,\ l_n\to 2\pi r$이므로

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot h\cdot l_n$$
$$= \frac{1}{2}\cdot r\cdot 2\pi r$$
$$= \pi r^2$$



5. 완전(宛田)의 넓이 구하기

[問] 今有宛田[34)]下周三十步徑[35)]十六步問爲田幾何

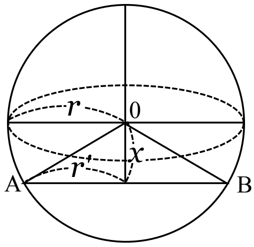
答曰一百二十步

[문] 둥근 언덕 모양의 밭이 있는데 아래 둘레가 30보, 지름이 16보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 120보[36)]

[問] 今有[37)]宛田下周九十九步徑五十一步問爲田幾何

答曰五畝六十二步分步之一



[문] 둥근 언덕 모양의 밭이 있는데 아래 둘레가 99보, 지름이 51보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 5무 $62\frac{1}{4}$보[38)]

術曰以徑乘周四而一此用圓田術也蓋宛田上徑圓穹形似球體則其面積必用圓球求外面積之法也以周求徑與周相乘得外面積而此是球體之半故折半爲積也

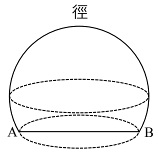
풀이는 지름으로 원둘레를 곱하여 4로 나눈다. 이것은 원의 넓이를 구하는 방법으로 한다. 대개 완전의 上徑은 원궁형(활꼴)으로 구와 비슷하여 그 넓이는 반드시 원구의 외면적(겉넓이)을 구하는 법이다. 둘레로 지름을 구하고 둘레를 서로 곱하여 겉넓이를 얻고 이것은 구의 반이므로 절반의 넓이이다.

(분석) 宛田의 지름(徑)과 원둘레(下周)를 비교하면 宛田은 半球보다 큰 모양이다. 宛田術은 둥근 언덕의 겉넓이를 원의 넓이에 근사시켜 圓田術로서 宛田의 넓이를 구하고 있다. 그림과 같이 대호 $\widehat{AB}$의 길이(徑) 51보, 아래 원둘레(下周) 길이가 99보일 때, 下周에서의 반지름 $\frac{\overline{AB}}{2}$를 r',

---

34) 완전의 宛은 둥근 언덕 모양을 가리키며, 현대 중국어에서 球宛形이라고 부르며 形如覆半彈丸이라고 한『하후양산경(夏侯陽算經)』의 환전(丸田)도 바로 이것에 해당된다.

35) 「경(徑)」은 宛田에서는 두 정점을 지나는 호를 가리킨다.



徑은 호$\widehat{AB}$의 길이를 나타낸다.

36) $S = \frac{\text{둘레} \times \text{지름}}{4} = \frac{30 \times 16}{4} = 120(\text{보}^2)$

37) 「今有」는『구장산술』에서는 「又有」로 수록되어 있다.

38) $S = \frac{99 \times 51}{4} = 1262\frac{1}{4}(\text{보}^2) = 5\text{무}62\frac{1}{4}(\text{보}^2)$

구의 반지름 r, 중심 0에서 $\overline{AB}$사이의 거리 x, 宛田의 넓이를 S라 하면 연립방정식

$$\begin{cases} 2\pi\sqrt{r^2-x^2}=99 \\ 2r\left\{\pi-\cos^{-1}\left(\dfrac{x}{r}\right)\right\}=51 \end{cases}$$

을 얻는다.

두 식에서 $r^2\left\{1-\cos^2\left(\pi-\dfrac{51}{2r}\right)\right\}=\left(\dfrac{99}{2\pi}\right)^2$이고 $\sin\left(\pi-\dfrac{51}{2r}\right)=\dfrac{99}{2\pi r}$가 된다.

즉, $\sin\dfrac{51}{2r}=\dfrac{99}{2\pi r}$. 이것을 급수해법으로 근사하면,

$\sin\dfrac{51}{2r}\fallingdotseq\dfrac{51}{2r}-\dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{51}{2r}\right)^3=\dfrac{99}{2\pi r}$이므로 $\pi=3$(고법)으로 놓으면,

$r^2\fallingdotseq 307.0625$, 즉 $r\fallingdotseq 17.523$. 따라서 $x\fallingdotseq 5.8970$. 그러므로

$$\begin{aligned} S &= (\text{반구의 겉넓이})+\frac{x(2\pi r+2\pi r')}{2} \\ &= 2\pi r^2+\pi x(r+r') \\ &= 6r^2+3x(r+r'). \qquad \text{여기서 } r'=16.5 \end{aligned}$$

즉, $S=2444.2758$(보^2)$=10$무 44.2758(보^2)

따라서 宛田術로 구한 값과 이 값과의 오차가 큰 이유는 다름과 같다.

① 宛田術은 圓田術을 이용한 바, 半球의 겉넓이를 원의 넓이로 보았다. 따라서 宛田術의 宛田의 넓이는 $\dfrac{(\text{徑})\times(\text{下周})}{4}$인데 비해, 半球의 겉넓이는 $2\pi r^2$이므로 오차가 크다.

② 宛田術은 下周에서 지름과 球의 지름을 같게 봄으로써 하주의 지름과 구의 지름 사이의 거리가 크면 클수록 넓이의 오차가 더 커진다. 이것은 황윤석의『산학입문(算學入門)』방전구적법(方田求積法)의 원전(畹田)에서 宛田法이 부적절함을 지적한 것과 같다.

『산학입문(算學入門)』<이수신편(理數新編) 제22권>의 방전구적법(方田求積法)

「今有畹田<時傳註朱子曰四方高中尖下曰宛丘宛亦作畹O字彙田之長爲畹>下周三十步 徑十六步 田幾何」

答曰 一百二十步

원전이 있다<『시전』주에서 주자가 말하기를 사방이 높고 중앙 봉우리 아래에 있으면 완구라 한다. 완(宛)은 원(畹)이라고도 한다.『자휘』에서

밭이 긴 것을 원(畹)이라 한다.> 아래 둘레가 30보, 지름이 16보이면 밭의 넓이는 얼마인가?
답은 120보이다.
「圓田周三徑一之法合徑十步周三十步徑十六步借圓田周徑相乘四而一苦徑步與周勢甚遠者不可專用此術」
원전에서는 둘레 3에 지름이 1인 비율이다. 지름이 10보이면 원둘레가 30보가 합당하다. 지름이 16보일 때 원 넓이 구하는 법을 빌려서 원둘레와 지름을 서로 곱하여 4로 나누었다. 만약 지름이 원둘레와 너무 떨어져 있으면 이 방법을 사용할 수 없다.

(분석) 앞 [문]의 분석의 그림에서 $r=\dfrac{16}{3}$, $r'=4$, $x=\dfrac{\sqrt{112}}{3}$이므로

$S=2\pi r^2+\dfrac{x(2\pi r+2\pi r')}{2}=6r^2+3x(r+r')$ (고법에 의해 $\pi=3$)

즉, $S=6\times\dfrac{256}{9}+3\times\dfrac{\sqrt{112}}{3}\left(\dfrac{16}{3}+4\right)$

$\quad=\dfrac{1}{9}(1536+84\sqrt{112})$

$\quad=249.44$(보^2)

따라서 완전술에 의한 계산은 오차가 매우 큼을 보여주는 것이다.

6. 弧田의 넓이 구하기

[問] 今有弧田弦三十步矢十五步問爲田幾何
答曰一畝九十七步半

[문] 호전(활꼴의 밭)이 있는데 현이 30보, 시(弧矢)[39]는 15보이다.

답 : 1무 $97\dfrac{1}{2}$보[40]

[問] 又有弧田弦七十八步二分步之一矢十三步九分步之七問爲田幾何
答曰二畝一百五十五步八十一分步之五十六

[문] 또, 활꼴의 밭이 있는데 현이 $78\dfrac{1}{2}$보, 시가 $13\dfrac{7}{9}$보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

---

39) 호시는 현의 수직이등분선으로 호까지의 선분이다.

40) $S=\dfrac{15(15+30)}{2}=337\dfrac{1}{2}=1$무$97\dfrac{1}{2}$(보^2)

답 : 2무 $155\frac{56}{81}$보41)

術曰以弦乘矢又自乘幷之二而一此圓面積折半以爲弧矢積之率也圓面積原是圓徑自乘積四分之三而圓徑自乘積爲半徑自乘積四倍圓面積爲半徑自乘積三倍也以全徑爲弦半徑爲矢以矢乘弦得半徑自乘積二倍矢自乘又爲一半徑自乘積乃併之得半徑自乘積三倍亦卽圓面積也是故折半爲弧矢面積也

풀이는 현과 시를 곱하고 또 시를 제곱하여 더해 2로 나눈다. 이것은 원의 넓이의 절반을 활꼴의 넓이의 율로 한다. 원의 넓이는 반지름을 제곱한 적의 3배이다. 지름을 현으로 반지름을 시로 하고 시와 현을 곱하면 반지름 제곱의 2배를 얻고 시를 제곱 또는, 한 반지름을 제곱한 것에서 그것(현과 시를 곱한 2배수)을 더하여 반지름을 제곱한 적의 3배를 얻는다. 역시 즉, 원의 넓이다. 그러므로 그것의 절반이 활꼴의 넓이가 된다.

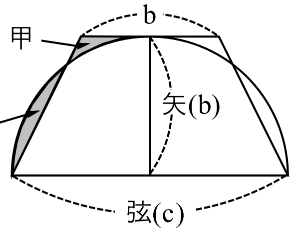
(분석) ① 활꼴의 현이 원의 지름($2r$), 시(矢)가 r이면, 활꼴의 넓이와 반원의 넓이는 같다.

즉, 고법에서

$$\text{반원의 넓이} = \frac{3r^2}{2} = \frac{r(2r+r)}{2}$$

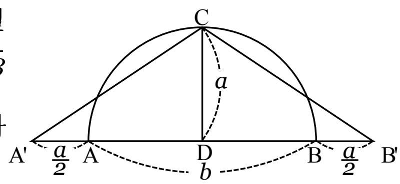
가 활꼴의 넓이다.

②“원의 넓이 절반을 활꼴 넓이율로 한다”(圓面積折半以爲弧矢積之率也)라는 것은 사다리꼴의 공식으로 일반화함을 보여주는 것으로 그림과 같이 활꼴의 넓이 $S=\frac{b(b+c)}{2}$가 된다. 따라서 위 문제를 계산하면 $S=\frac{\frac{124}{9}\left(\frac{124}{9}+\frac{157}{2}\right)}{2\times240}=2.6487139$무(보^2)로



『구장산술』에는 엄밀한 값을 구하려고 하기보다는 근사적 접근(Approximation)을 위한 방법으로 풀이하고 있다. 그림에서 甲과 乙의 영역 넓이가 근사적으로 같음을 보여주고 있다.

③ 그림과 같이 활꼴에서 b를 현 $\overline{AB}$의 길이, a를 시(矢) $\overline{CD}$의 길이라 하자. 현 $\overline{AB}$의 좌우 연장선 상에서 $\overline{AA'}=\overline{BB'}=\frac{a}{2}$가



41) $S=\frac{\left(78\frac{1}{2}+13\frac{7}{9}\right)\times13\frac{7}{9}}{2}=635\frac{56}{81}=2\text{무}155\frac{56}{81}(\text{보}^2)$

되는 점 A', B'를 두어 호의 중점 C에서 이 두 점을 이으면 활꼴의 넓이는 이등변 $\triangle A'B'C$의 넓이와 근사적으로 같다. 따라서 활꼴의 넓이 $S=\dfrac{a(a+b)}{2}$이다.

『익산(翼算)』의 정부론(正負論)

「郭邢臺[42]守敬授時麻[43]黃道赤道相求之法以天元立術

演沈括[44]柝會術[45]開三乘求弧矢

履畝之法方圓曲直盡矣未有會圓之術凡圓田旣能柝之須使會之復圓

古法惟以中破圓法柝之其失有及三倍者予別無柝會之術置圓田徑

半之以爲弦又以半徑減去所割數餘者爲股各自乘以股除弦

餘自開方除爲勾倍之爲割田之直徑「以所割之數自乘退一爲倍之又以圓徑除所得加入直徑爲割田之弧」再割亦如之減去已割之數則再割之數也此二類皆造徽之術古書所不到自漫志干此」

형대 사람인 곽수경은『수시력』에서 황도적도를 서로 구하는 법에서 천원술을 쓰고 심괄 탁회술로 4차 방정식을 풀어 시(矢)를 구했다

이무법(步數를 畝數로 계산하는 법)은 정사각형, 원, 곡선, 직선에 까지 다 다룬다. 회원술은 있지는 않았지만, 대체로 원전은 쪼갤 수가 있어서 반드시 합하면 다시 원으로 되돌아 온다. 중파원법에 의해 원을 쪼개어 고법과 3과 나머지 수를 2배한 것은 탁회술에서는 차이가 없다. 원전의 지름을 반으로 하여 현으로 하고, 또 반지름을 활수(矢)로 빼어 나머지를 股로 하고 각각을 제곱해서 현의(제곱)에 고의(제곱)을 빼어 제곱근하여 구(勾)가 되어 2배하면 할전(호전)의 지름이 된다.

할수를 제곱하여 2배하고, 또 원의 지름으로 나누어 (할전의)지름을 더하면 할전의 호가 된다. 다시 잘라 또한 이미 잘랐던 할수에 빼면 재할수이다. 이 두 가지(할전의 지름과 호를 구하는 법)는 모두다 근사적 방법으로 만들어져서 이것으로는 고서가 바라는 것에 이르지 못했다.

(분석) 지름이 d인 원에서 길이가 a인 현 $\overline{AB}$를 잘라서 생긴 활꼴이 있다. 중심 O에서 $\overline{AB}$에 수선을 내려 현 $\overline{AB}$와 호 $\widehat{AB}$에 만난 점을 각각

---

42) 형대(邢臺)사람이므로 곽수경(元:1231~1316)을 곽형대라 하였다.

43) 곽수경의『수시력(1280년)』은 천문학으로 수학과 천문학간의 상호작용을 보여주고 천원술(고차방정식의 해법)에서 보간식이 쓰이고 있다.

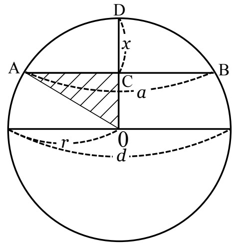
44) 심괄(북송:1031~1095)은 역법인『몽계필담(夢溪筆談)』을 저서하여 편각을 발견하였다.

45) 탁회술은 할원술로 圓의 산법이다.

C, D라 하면, $\overline{CD}$는 할수(矢)가 된다. 그림과 같이 矢 길이를 b, 호의 길이를 c, 원의 반지름을 r이라 하면 a, b, c, d와 r의 관계에서 다음의 두 가지의 식을 얻는다.

① 직각$\triangle OAC$에서 Pythagoras정리에 의해

$r^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+(r-b)^2$이다.



따라서 $\frac{a}{2}=\sqrt{r^2-(r-b)^2}$,

즉, $a=2\sqrt{r^2-(r-b)^2}=2\sqrt{b(d-b)}$

② 아무 증명 없이 "以所割之數自乘退一爲倍之又以圓徑除所得加入直徑爲割田之弧"라 하여 호에 대하여 $c=a+\frac{2b^2}{d}$이 된다고 하였다. 이는 물론 근사값이다.

다음은 오늘날 계산으로 근사값 c를 구해보자. 직교좌표 x, y 상에서의 원(圓) $x^2+y^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2$으로부터 $y=\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-x^2}$에서 $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2\sqrt{\frac{d^2}{4}-x^2}}$ 이다. 따라서 호 $\widehat{AB}$의 길이 c에 대해

$$
\begin{aligned}
c &= 2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=2\int_0^{\frac{a}{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{\frac{d^2}{4}-x^2}}\,dx \\
&= d\int_0^{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4}-x^2}}\,dx=d\int_0^{\sin^{-1}\frac{a}{d}}\frac{\frac{d}{2}cos\theta}{\frac{d}{2}\sqrt{1-\sin^2\theta}}\,d\theta \\
&= d\sin^{-1}\left(\frac{a}{d}\right)\fallingdotseq d\left\{\frac{a}{d}+\frac{1}{b}\left(\frac{a}{d}\right)^3+\frac{3}{40}\left(\frac{a}{d}\right)^5\right\} \\
&= a+\frac{a^3}{6d^2}+\frac{3}{40}\frac{a^5}{d^4}
\end{aligned}
$$

여기서 $c=d\sin^{-1}\left(\frac{a}{d}\right)$와 $c=a+\frac{2b^2}{d}$이 근사적으로 같음을 보인다. 그러므로 활꼴의 지름과 호는 근사적 방법으로 구하는 바, "此二類皆造徽之術古書所不到自漫志干此"라 하여 바라는 정확한 값에는 이르지 못했다고 하였다.

③그림에서 주어진 a, b, c, d와 r에 대해 일반적으로 활꼴의 넓이 S는

$$S=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2b}\left(\frac{c}{2}-\frac{a}{2}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{c}{2}+\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{4}\left\{\frac{a^2(c-a)}{4b}+b(c+a)\right\}=\frac{1}{2}\{cr-a(r-b)\}$$

이다.

7. 환전(環田)의 넓이 구하기

[問] 今有環田中周九十二步外周一百二十二步徑五步問爲田幾何

答曰二畝五十五步

[문] 고리 모양의 밭이 있는데 가운데 둘레가 92보, 바깥 둘레가 122보, 둘 사이의 간격(徑)이 5보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 2무55보[46)]

[問] 又有環田中周六十二步四分步之三外周一百一十三步二分步之一徑十二步三分步之二問爲田幾何

答曰四畝一百五十六步四分步之一

[문] 또, 고리 모양의 밭이 있는데 가운데 둘레가 $62\frac{3}{4}$보, 바깥 둘레가 $113\frac{1}{2}$보, 둘 사이의 간격이 $12\frac{2}{3}$보이다. 밭의 넓이는 얼마인가?

답 : 4무$156\frac{1}{4}$보[47)]

術曰幷中外周而半之以徑乘之爲積步此幷兩周而半之得中周以爲長徑爲廣相乘得積步也

풀이는 가운데 둘레와 바깥 둘레를 합해서 반으로 하고 둘 사이의 간격을 곱하면 넓이의 보수가 된다. 두 둘레를 더해 반으로 하여 가운데 둘레를 얻어 길이(長, 가로)로 하고 둘 사이(徑)를 세로(너비)로 하여 서로 곱하면 넓이 보를 얻는다.[48)49)]

『양휘산법(楊輝算法)』의 전무비류승제첩법(田畝比類乘除捷)

①「環田外周七十二步中周二十四步實徑八步今自外周截積二

46) $\frac{(92+122)}{2}\times 5=535=2$무$55(\text{보}^2)$

47) $\frac{\left(62\frac{3}{4}+113\frac{1}{2}\right)}{2}\times 12\frac{2}{3}=1116\frac{1}{4}=4$무$156\frac{1}{4}(\text{보}^2)$

48) 바깥 둘레=$6r_1$, 가운데 둘레= $6r_2$라 하면

百八十五步問所截內周及實徑幾何
答曰截徑五步中周四十二步.
術曰二因積步以二周相減差步乘之原徑除之別置外周自乘以少減多餘開平方除之得所截內周以內周減外周餘六而一卽徑也.
草曰外周中周相減餘四十八乘二因積步得二萬七千三百六十原徑八步除得三千四百二十又外周自乘得五千一百八十四以少減多餘一千七百六十四爲實開平方除之得內周四十二步以內周減外周七十二餘三十以六除之卽徑五步」
고리 모양 밭의 바깥 둘레가 72보 가운데 둘레가 24보, 둘 사이의 간격(實徑)이 8보이다. 지금 바깥둘레로부터 넓이 285보를 잘라내면 잘린 가운데 둘레와 실경은 얼마인가?
답은 잘린 실경 5보, 가운데 둘레 42보이다.
풀이는 잘린 넓이를 2배하여 두 둘레를 서로 뺀 차를 곱하고 원래의 실경으로 나눈다. 바깥 둘레를 제곱하여 별도로 놓고 큰 것에서 작은 것을 빼어 나머지를 제곱근하면 잘려진 안 둘레를 얻는다. 바깥 둘레에서 가운데 둘레를 빼어 6으로 나눈다. 즉, 잘려진 실경이 된다.
계산에 따르면, 바깥둘레와 가운데 둘레를 서로 뺀 나머지 48을 2배하여

넓이 $S = 3(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = \dfrac{(r_1 - r_2)(6r_1 + 6r_2)}{2}$

$= (r_1 - r_2) \times \dfrac{(6r_1 + 6r_2)}{2} = (\text{廣}) \times (\text{長})$

따라서 $S = \dfrac{\left(62\dfrac{3}{4} + 113\dfrac{1}{2}\right)}{2} \times 12\dfrac{2}{3} = 1116\dfrac{1}{4} = 4\text{무}156\dfrac{1}{4}(\text{보}^2)$

그러나 徑 $12\dfrac{2}{3}$ 보는 $8\dfrac{11}{24}$ 보의 오자이므로

$$S = \frac{\left(62\dfrac{3}{4} + 113\dfrac{1}{2}\right)}{2} \times 8\frac{11}{24} = 745\frac{75}{192}(\text{보}^2)$$

49) 『九章算術』에서 「密率術曰置中外周步數分母子各居其下母互乘子通全步內分子以中周減外周餘半之以益中周徑亦通分內子以乘周密實分母相乘爲法餘之爲積步餘積步之分以畝法除之卽畝數也.」
밀율술은 가운데 둘레와 바깥둘레의 보수를 분모분자로 놓아 각각을 그 아래에 두고 분모분자를 서로 바꾸어 곱해서 분자를 통분하고 중간 둘레로 바깥둘레를 뺀 나머지를 반으로 하고 가운데 둘레로 더한다. 지름도 역시 분자를 통분하여 둘레를 곱해 밀실(나뉨 수)로 삼고 분자를 서로 곱해 나눗수로 하여 나누면 넓이의 보수가 되는데 나머지는 넓이의 보수의 분수이다. 무로 환산하여 나누면 곧 무수가 된다.

잘려진 넓이에 곱하면 27360을 얻어 원래의 실경 8로보 나누면 3420을 얻는다.
또, 바깥 둘레를 제곱하여 5184를 얻어 큰 것에서 작은 것을 뺀 나머지 1764를 실수로 하여 제곱근 하면, 가운데 둘레 42보를 얻고, 바깥 둘레 72에서 가운데 둘레를 뺀 나머지 30을 6으로 나눈다. 즉 잘려진 실경 5보가 된다.
(분석) 원에서 가운데 둘레 l_1, 바깥 둘레 l_2, 잘려진 가운데 둘레 l, 그리고 각각에 대한 반지름을 r_1, r_2, r이라 하고 잘려진 환전의 넓이를 S라 하면 주어진 실경은 r_2-r_1이고 $\dfrac{l_2-l_1}{r_2-r_1}=6$이 된다. 따라서 $S=\dfrac{l_2^2-l^2}{4\pi}$에서 고법에 의해, $l^2=l_2^2-2S\times 6=l_2^2-2S\left(\dfrac{l_2-l_1}{r_2-r_1}\right)$, 즉 잘려진 가운데 둘레 $l=\sqrt{l_2^2-2S\left(\dfrac{l_2-l_1}{r_2-r_1}\right)}$이고, 잘려진 실경은 $\dfrac{l_2-l}{6}$이다.
계산하면 $l=\sqrt{72^2-2\times 285\times \dfrac{48}{8}}=42$, 실경 $=\dfrac{72-42}{6}=5$
②「環田外周七十二步中周二十四步實徑八步欲從內周截地[50)]
一百九十五步問所截外周實徑各幾何
答曰截徑五步外周五十四步.
術曰二因積步爲實以徑步除二周差步爲正隅二因中周爲從方開平
方除之得所截徑步. 副置徑步六因幷中周爲外周.
草曰二因積步得三百九十步爲實二周相減餘差四十八以徑八步
除得六步爲正隅二因中周得四十八爲從方開平方除得徑五步六
因幷中周得五十四步爲截外周合問」
고리 모양 밭의 바깥 둘레 72보, 가운데 둘레 24보, 실경이 8보이다. 안 둘레로부터 넓이 195보를 잘라낸다면 잘려진 바깥둘레와 실경은 얼마인가?
답은 잘려진 실경은 5보, 바깥 둘레는 54보이다.
풀이는 잘려진 넓이를 2배하여 실수(상수)로 하고, 실경 보수로 두 둘레의 차를 나누어 양의 무법(2차항의 계수)으로 한다. 가운데 둘레를 2배하여 종방(1차 항의 계수)으로 하여 2차 방정식을 풀면 잘려진 실경을 얻는다.

---

50) 地는 積의 오자이다.

다음 실경 보수를 놓고 6배하여 가운데 둘레를 더하면 바깥 둘레가 된다. 계산법에 따르면 넓이를 2배하여 390보를 얻어 실수로 하고, 두 둘레를 서로 뺀 나머지 차이 48을 실경 8로 나누어 6보를 얻어 양의 무법으로 삼는다. 가운데 둘레를 2배하여 48을 얻어 종방으로 삼아 2차 방정식을 풀면, 실경 5보를 얻고 6배하여 가운데 둘레를 더하면 54보를 얻어 잘려진 바깥 둘레가 되어 물음에 합당하다.
(분석) ③의 (분석)에서의 r_1, r_2, r, l_1, l_2, l 그리고 S를 l_1으로부터 잘려진 환전의 넓이라 하자. $r-r_1=x$(잘라진 실경)라 놓으면, $S=\pi(r_1+x)^2-\pi r_1^2=\pi x^2+2\pi r_1 x$이다. 고법에 따라, $S=3x^2+l_1x$, 즉 $2S=6x^2+2l_1x=\left(\dfrac{l_2-l_1}{r_2-r_1}\right)x^2+2l_1x$이므로 x에 대한 2차 방정식으로 풀면 x(徑)를 얻는다. 또 $l=2\pi(r_1+x)=2\pi r_1+2\pi x$이고, 고법에 의해 $l=l_1+6x$이다. 계산하면 $2\times 195=6x^2+2\times 24x$ 즉, 2차 방정식 $x^2+8x-65=0$을 풀면, $x=5$이고 $l=24+6\times 5=54$이다.

Ⅲ. 맺음말

1. 용어

구 분	높 이	밑 변	산 학 서
圭田 (이등변 삼각형의 밭)	縱	頭廣	오조산경
	從	廣	양휘산법
	長, 正長	廣, 闊	산학입문
	中長	下濶	구일집
	正從, 從	廣	구장술해, 구장산술

구 분	윗 변	아 랫 변	높 이	산학서
邪田 (직각사다리꼴의 밭)	(頭)廣,畹從	(頭)廣,畹從	正從,正廣	구장술해, 구장산술
箕田 (등변사다리꼴의 밭)	踵廣	舌廣	正從	구장술해, 구장산술
	(頭)廣	(頭)廣	縱	오조산경
梯田 (사다리꼴의 밭)	(上)廣	(下)廣	長	양휘산법
	廣	廣	長	구일집
	頭闊,(南)闊	頭闊,(北)闊	長	산학입문

弧田(활 꼴의 밭)			弦 (호의 두 끝을 잇는 직선)		矢 (현의 수직 이등분으로 호까지의 선분)		
弧田	弧矢田	割田	弦	弦長	矢	矢闊	割數
구장산술 구장술해 오조산경	구일집 양휘산법	익산	구장산술 구장술해 오조산경	구일집 산학입문 양휘산법	구장산술 구장술해 오조산경	구일집 산학입문 양휘산법	익산

徑 (두 원주 사이의 간격)		外周 (바깥 둘레)	內周(가운데 둘레)		停周(바깥 둘레와 가운데 둘레의 합의 반인 둘레)
徑	實 徑		內周	中周	
구장산술 구장술해 오조산경 양휘산법	양휘산법 산학입문	구장산술 구장술해 오조산경 양휘산법 구일집 산학입문	오조산경 양휘산법 구일집 산학입문	구장산술 구장술해	산학입문

2. 방전(方田)의 넓이

방전의 넓이는 가로 보수(步數)와 세로 보수(步數)를 서로 곱한 보수를 무법(畝法)으로 계산하였고 리전(里田)은 가로 리수(里數)와 세로 리수(里數)를 서로 곱한 리수를 무법으로 다루고 있는데, 주어진 가로와 세로가 분수일 경우 그 계산방법은 약분술(約分術), 합분술(合分術), 감분술(減分術), 과분술(課分術), 평분술(平分術), 승분술(乘分術), 경분술(徑分術) 그리고 대광술(大廣術)이다. 이것은 논문 「산학서에서의 분수셈에 대한 고찰([13], 2008)」에서 보인 바 있다. 『구장술해』에서 방전은 그 넓이를 구하는 방법을 보이는 것 보다 분수셈법을 더 강조하고 있음을 엿볼 수 있다.

3. 圭田(이등변 삼각형 밭)의 넓이

(1) 圭田術은 “半廣以乘正縱半廣者以盈補虛取其中平之廣也”하 하여 밑변의 반을 높이로 곱한다. 밑변의 반이라는 것은 이등변 삼각형의 반을 빈자리에 채운 中平(직사각형)의 밑변으로 하여 넓이를 계산했다. 이순퐁도

“半廣者以盈補虛爲直田也”라 하여 같은 방법으로 풀이하고 있다.
(2)『산학입문』의 방전구적법에서 규타(圭垛)의 모양은 이등변 삼각형과 비슷하나 그들의 넓이 공식은 다르다. 규타는 사다리꼴의 넓이를 구하는 법에 따른다고 하였다. 중국 소학교 수학교과서에서도 규타(원목을 이등변삼각형으로 쌓아 올린 모양)의 넓이(쌓아 올린 원목의 총 개수)를

$$\frac{(\text{윗층 원목 개수})+(\text{아래층의 원목 개수})}{2}\times(\text{총수})$$

즉, 사다리꼴의 넓이 공식으로 나타내고 있다.

4. 邪田(직각사다리꼴 밭), 箕田(등변사다리꼴 밭)과 梯田(사다리꼴 밭)의 넓이

(1)『구장술해』에서는 사전과 기전만 다루고 있고 제전은 취급하지 않았다. 기전에서 “術曰幷踵舌而半之以乘正縱畝法而一舌卽下廣踵卽上廣與 梯田法同”이라 하여 사전(邪田)을 일반적인 제전(사다리꼴)으로 간주하여 별도로 梯田을 다루지 않았다.
사전에서 兩邪는 위 아래 두변을 가리키고 있고 “正縱若廣”이라 하여 너비(廣)를 사다리꼴의 높이로 하여 $\dfrac{(\text{윗변})+(\text{아랫변})}{2}\times(\text{높이})$로써, 넓이를 구하고 있다.
(2) 사다리꼴 넓이 계산에서 한국『초등학교 수학교과서』에는 사다리꼴을 2개의 삼각형으로 나누어 각각 넓이를 더하였고, 중국『수학교과서』는 사다리꼴을 평행사변형으로 옮겨 넓이를 계산하였다.

5. 圓田(원 모양의 밭)의 넓이

(1)『구장술해』에서의 원면적도설에서 원에 내접·외접하는 정다각형을 각각 가늘게 쪼개어 가면 원과 각각의 정다각형의 넓이는 극한 개념에 의해 모두 일치 되어 짐을 안다. 즉 내접 정n각형의 넓이 A_n, 외접 정n각형의 넓이 B_n 그리고 원의 넓이 S에서

$$\lim_{n\to\infty}A_n = S = \lim_{n\to\infty}B_n,\ (\text{단},\ A_n = \frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n},\ B_n = \frac{2\pi r}{2}\tan\frac{2\pi}{2n},\ n = 3, 4, 5, \cdots)$$

으로 Archimedes의 착출법과 같음을 보여주고 있다.
『산학정의(상권)』의 각면율에서 원면적도설의 내용을 기하학적 알고리

즘에 의해 구체적으로 보여주고 있다.
(2) 한국과 중국 수학교과서에서는 다 같이 원의 넓이를 구하는 방법이 원면적도설에서와 같이 부채꼴 모양으로 수없이 잘라 이등변 삼각형 모양으로 나열하여 더하면 반지름이 세로, 원둘레의 반을 가로로하는 직사각형으로 그 넓이로써 원의 넓이로 하였다. 특히, 한국『고등학교 수학교과서』에서 내접 정n각형을 이용하여 원의 넓이를 구하고 있는데 외접한 정n각형에 대해서도 같이 다루었으면 한다.

6. 宛田(둥근 언덕모양의 밭)의 넓이

(1)『산학입문』의 방전구적법에서 "宛田[亦名敵田周徑相乘四而一得積O朱子傳曰四方高中央下曰宛丘宛亦作碗敵山多小石也宛亦作碗仰碗形者丘也與覆碗形者其徑弁大於周之本徑]"
즉 완전[역시 오전이라고도 한다. 둘레와 지름을 서로 곱해 4로 나누면 넓이를 얻는다. 주자는 시전에서 사방이 높고 중앙이 아래에 있으면 완구라고 하였다. 완(宛)은 역시 완(碗) 또는 오(敵)라고도 하며 산에 작은 돌이 많았다. 완(宛)은 역시 완(碗)이라 하여 완형을 쳐다 본다는 것은 언덕이다. 복완형은 그 지름이 둘레의 본 지름보다 크다]라고 하여, 따라서 완전의 모양을 가름할 수 있다.
『양휘산법』에서 완전(宛田),『하후양 산경』에서 "形如覆半彈丸"이라 하여 환전(丸田:포탄모양의 밭)이라고도 하였다.
(2) 완전술은 球의 겉넓이를 원의 넓이에 근사시켜 圓田術로서 宛田의 넓이를 $\dfrac{(\text{원둘레})\times(\text{지름})}{4}$으로 하였으므로 半球의 겉넓이 $2\pi r^2$과는 오차가 매우 크다. 또한, 완전술은 下周에서의 지름과 球의 지름을 같게 보았으므로 下周의 지름과 球의 지름사이의 거리가 크면 클수록 넓이의 오차가 더 커서 황윤석은『산학입문』의 방전구적법에서 그 부적절함을 지적했다.

7. 弧田(활꼴의 밭)의 넓이

(1) 弧田의 넓이를 구하는 법은 "圓面積折半以爲弧矢積之率也", 즉 원의 넓이의 절반을 활꼴 넓이율로 하여 사다리꼴의 넓이의 공식으로 일반화하였다. 따라서『구장산술』에는 정확한 값을 구하기보다는 근사적 접근(Approximation)으로 풀이하고 있다.

(2)『익산』의 정부론에서 지름이 d인 원으로부터 길이가 a인 현을 잘라서 생긴 활꼴이 있는데 矢의 길이가 b일 때, “以所割之數自乘退一爲倍之又以圓徑除所得加入直徑爲割田之弧”라 하여 아무런 증명없이 근사값으로 활꼴의 호의 길이 $a+\frac{2b^2}{d}$이라 하였다. 오늘날 수치해법으로 구하면, 활꼴의 호의 길이는 $d\sin^{-1}\left(\frac{a}{d}\right)$이고 $d\sin^{-1}\left(\frac{a}{d}\right) \fallingdotseq a+\frac{a^3}{6d^2}+\frac{3a^5}{40d^4}$으로 $a+\frac{2b^2}{d}$와 $d\sin^{-1}\left(\frac{a}{d}\right)$가 근사적으로 같음을 알 수 있다.

8. 環田(고리모양의 밭)의 넓이

(1) 원에서 반지름 r_1인 원둘레(가운데 둘레) l_1, 반지름이 r_2인 원둘레(바깥둘레) l_2, 그리고 환전의 넓이를 S라 하자. 두 둘레 사이의 간격(實徑:두께)은 r_2-r_1이다.

① $S=\pi(r_2-r_1)(r_2+r_1)\cdots\cdots\cdots$ (本法)

$S=\frac{(l_1+l_2)}{2}\times(r_2-r_1)\cdots\cdots\cdots$ (사다리꼴의 법)

② 고법에 의한 넓이(古積) $S=3(r_2^2-r_1^2)$

휘율에 의한 넓이(미적) $S=\frac{157}{50}(r_2^2-r_1^2)$

밀율에 의한 넓이(밀적) $S=\frac{22}{7}(r_2^2-r_1^2)$

(2) ①『양휘산법』의 전무비류승제첩법에서 (1)에 있는 l_2로부터 넓이 S_1보를 자를 때, 잘린 가운데 둘레 l과 실경 d를 구하는 법은 다음과 같이 제곱근으로 푼다.

$$l=\sqrt{l_2^2-2S_1\left(\frac{l_2-l_1}{r_2-r_1}\right)} \quad \text{그리고} \quad d=\frac{l_2-l}{6}$$

② (1)에서 l_1으로부터 넓이 S_2보를 자를 때, 잘린 바깥 둘레 l과 실경 x를 구하는 법은 다음과 같이 2차 방정식으로 푼다. 이차방정식 $3x^2+l_1x-S_2=0$를 풀어 x값을 찾고 $l=l_1+6x$를 구한다.

참고문헌

[1] 강완 외 9명. 초등학교 수학 5-나, 두산, 2008.

[2] 강행고 외 8명. 중학교 수학 8-나, 중앙교육진흥연구소, 2007.

[3] 남병길·이상혁. 산학정의(算學正義) 상편.

[4] 남병길. 구장술해(九章術解).

[5] 박영식·최길남. 산학정의 상편에 관한 고찰(각면율에 대한 연구), EAMJ 23(2007) No. 3, pp. 327~360.

[6] 박영식·최길남. 산학서에서의 분수셈에 대한 고찰, EAMJ 24(2008), No. 5 pp. 431~464.

[7] 배종수 외 8명. 초등학교 수학 6-나, 두산, 2008.

[8] 차종천 (옮김). 산경십서 상(算經十書 上), 교우사, 2006.

[9] 차종천 (옮김). 양휘산법(楊輝算法), 교우사, 2006.

[10] 최길남·박영식. 산학정의(上-1)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학 연구논문, 9(2000), No. 2, pp. 151～167.

[11] 최길남·박영식. 산학정의(上-2)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학 연구논문, 10(2000), No. 1, pp. 237～267.

[12] 최길남·박영식. 산학정의(上-3)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학 연구논문, 11(2002), No. 2, pp. 37～77.

[13] 최길남·박영식. 산학정의(上-4)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학 연구논문, 14(2004), No. 1, 2, pp. 19～54.

[14] 최길남·박영식. 산학정의(上-5)에 관한 연구, 울산대학교 자연과학 연구논문, 15(2006), No. 1, 2, pp. 1～25.

[15] 최상기 외 5명. 고등학교 수학Ⅱ, 교사용 지침서, 고려출판사, 2007.

[16] 홍성사 (옮김). 익산상편(翼算上篇) 정부론(正負論), 교우사, 2006.

[17] 황윤석, 강신원·장혜원(옮김). 산학입문(算學入門), 교우사, 2006.

[18] 人民教育出版社 小学数学室. 九年义务教育五年制 小学教科书 數学 第八冊, 人民教育出版社, 1999.

[19] 人民教育出版社 小学数学室. 九年义务教育五年制 小学教科书 數学 第十冊, 人民教育出版社, 1999.

Young Sik Park
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail address: yspark@mail.ulsan.ac.kr

Kil Nam Choi
Department of Mathematics
University of Ulsan
Ulsan 680-749, Korea
E-mail address: knchoi@mail.ulsan.ac.kr