East Asian Mathematical Journal
Vol. 25 (2009), No. 3, pp. 299-320

기하 증명 읽기 이해 모델의 적용 효과

황 철 주 · 이 지 연 · 김 선 희

ABSTRACT. In mathematics, the education of the geometry proof has been playing an important role in promoting the ability for logical thinking by means of developing the deductive reasoning. However, despite of those importance mentioned above, considering the present condition for the education of the geometry proof in middle schools, it is still found that most of classes are led mainly by teachers, operating the cramming system of eduction, and students in those classes have many difficulties in learning the geometry proof course.

Accordingly this thesis suggests the other method that is distinguished from previous proof educations. The thesis of Kai-Lin Yang and Fou-Lai Lin on 'A Model of Reading Comprehension of Geometry Proof (RCGP)', which was published in 2007, have various practical examples based on the model. After composing classes based on those examples and instructing the geometry proof, found out a problem. And then advance a new teaching model that amendment and supplementation

However, it is considered to have limitation because subjects were minority and classes were operated by man-to-man method. Hopefully, the method of proof education will be more developed through performing more active researches on this in the nearest future.

I. 연구의 필요성 및 목적

수학은 몇 가지 정의와 공리로부터 논리법칙을 이용하여 명제나 정리를 유도하며 확장하여 나가는 공리적인 성격을 지니고 있는데, 그러한 논리 전개가 옳은지 아니면 오류가 있는지를 판별해 주는 기준이 되는 것이 증명이다([2]). 증명은 고대 그리스 시대 이래로 수학의 핵심적인 부분이며, 학교수학에서도 논리적 사고 교육의 하나로서 중요한 위치를 차지해 왔다([3]). 증명은 정당화, 발견, 확신과 이해, 조직화, 분석과 종합 등의 여러 측면이 서로 밀접하게 관련

2009년 8월 투고, 2009년 8월 심사 완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97C99
Key words: 기하, 증명, RCGP

되어 있는 복합적인 것으로, 학교수학에 있어서 증명은 학생들의 연역적 추론 능력을 개발하고 수학의 이해를 증진시키는 데에 그 의의가 있다.

이렇게 증명이 학교수학에서 중요시 되어야 함에도 불구하고, 증명지도에는 많은 어려움이 있는 것이 사실이다. 교사들은 학습자의 증명 이해를 돕기 위하여 나름대로의 지도 방안을 고안하지만, 일반적으로 나타나는 증명지도 수업의 형태는 교사가 주도하는 설명식 수업이다. 대부분 교사들이 수학적 발견의 맨 마지막 산물인 연역적 논리 체계를 일방적으로 제시하는 것은 학습자들이 스스로 증명에 대한 개념과 기능들을 구성하기에는 효과적이지 못하고, 새로운 내용의 전이가 쉽게 일어나지 않으며, 사실과 규칙들을 기계적으로 학습하게 되어 학생들의 증명의 이해에 전혀 도움을 주지 못한 채, 결국은 암기하는 데 그치도록 만들기 때문이다. 이런 암기식 증명 지도는 본래의 증명 교육 목적에는 맞지 않는 것이다.

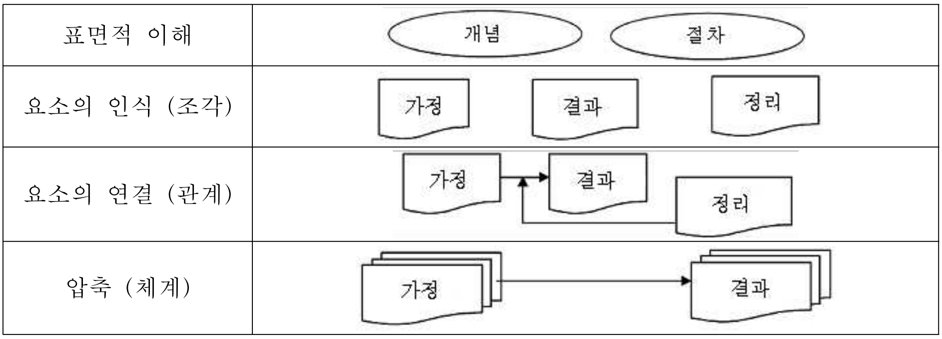
이를 개선하기 위해 수학교육에서는 학습자가 어려움을 겪게 되는 원인을 살펴보는 연구가 계속되어 왔고, 보다 효과적인 증명 지도 방법에 대하여 다양한 방법들을 소개하고, 증명 지도 개선 방향을 제시해 왔다. 이 중 학습자에게 좀 더 효과적인 증명교육을 위해 Kai-Lin Yang 외는 A model of reading comprehension of geometry proof(RCGP; 기하 증명의 읽기 이해 모델)을 제시하고, 이것의 정당성을 위해서 수학자와 수학교사들의 인터뷰 내용을 제시하였다. 그리고 이 모델을 적용시킨 예제를 두 학년의 학생들에게 설문조사를 한 후, 그 결과의 신뢰도를 측정하여 이 모델의 유용성을 보였다. 증명의 읽기 이해는 증명 문제에 제시된 기본적인 조건과 결과 등 증명에 필요한 기초적인 지식을 판단하는 것부터 시작하여 그 지식의 본질적인 요소들이 증명에 어떻게 작용되었는지, 증명에 필요한 결정적인 아이디어는 무엇인지, 왜 증명이 옳은 지 등과 같은 증명을 입증할 수 있는 지식들로 증명을 완전하게 이해하는 것을 의미한다. 기존의 증명 교육이 학생들이 증명을 쓰게 하는 것에 초점을 두었다면, RCGP는 학생들이 증명을 이해하는 것과 증명을 쓰기 위해 기존 증명의 양식을 이해하는 것의 두 가지 목적에서 활용될 수 있을 것이다.

이에 본 연구는 기하 증명의 읽기 이해 모델(RCGP)을 바탕으로 실제적인 증명 지도상의 모습을 보여주고, 우리나라에서 이 모델을 확대 적용할 수 있도록 교재용 자료를 개발하고, 이를 적용한 수업의 효과를 살펴보고자 한다.

II. 기하 증명 읽기의 이해 모델(RCGP)

1. RCGP의 구성 내용과 구조

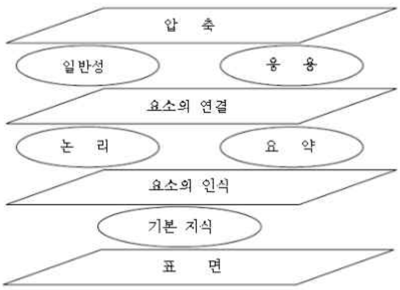
RCGP를 구성하는 내용은 관련 논문이나 수학자 및 수학 교사들과의 인터뷰를 통해서 수집되었다. [그림 1]과 같은 RCGP의 모델은 모두 4개의 단계로 이루어져 있다.



[그림 1] 기하 증명 읽기 이해의 가설적 모델

첫 번째 단계인 표면적 이해(comprehension of surface)는 기하 개념과 절차 등의 사실을 이해하고 있는 단계이다. 두 번째 요소의 인식 – 조각(recognizing elements – pieces) 단계는 증명할 명제의 가정, 결과를 알고 그에 활용될 정리 각각에 대한 인식을 하고 있는 수준이다. 세 번째 요소의 연결 – 관계(chaining elements – relations) 단계는 정리가 가정에서 결과에 이르는 데 활용될 수 있음을 파악하고 가정으로부터 결과를 이끌어낼 수 있는 것을 말한다. 마지막 압축 – 체계(encapsulation – systems) 단계는 가정에서 결과에 이르는 전체 과정이 하나의 대상으로 볼 수 있는 것을 말한다. 이 단계별 구분은 [5]의 기하 학습 수준에서 각각 시각적 인식 수준, 기술적/분석적 인식 수준, 관계적/추상적 인식 수준, 형식적 연역 수준에 해당한다. 그러나 [5]에서처럼 이전의 단계를 모두 숙달해야 다음 단계를 할 수 있는 것은 아니다.

한편, RCGP에서 발휘되는 학생들의 능력은 기본 지식(basic knowledge), 논리(logical status), 통합 혹은 요약(integration or summarization), 일반성(generality), 응용 혹은 확장(application or extension), 비평 혹은 평가(appreciation or evaluation)의 6개의 영역으로 분류될 수 있다. 이는 Bloom([1])의 인지 영역 수준에서 지식, 이해, 적용, 분석, 종합, 평가에 해당되는 것으로 볼 수 있는데, 마지막 영역인 비평 혹은 확장은 개인과 사회적인 가치가 얽힌 주관적인 의견을 향하는 경향이 있으므로 여기서는 다섯 가지 영역만 사용하도록 한정하였다. 이 다섯 가지의 영역은 앞에서의 가설적 모델을 사용해서 구조화 되며, 그 결과는 [그림 2]와 같다.



[그림 2] RCGP 가설 모델과 각 영역의 통합

학생들은 표면적 이해의 단계에서 기본 지식을 이해하고, 요소의 인식이라는 단계를 통해서 논리와 요약하기를 할 수 있으며, 요소의 연결 단계를 거치면서 일반성과 응용을 학습하고 결국 압축에 이르는 것이다. [4]는 [그림 2]의 타당성을 검증하기 위해 학생들을 대상으로 실험을 실시했는데, 5개 영역 간의 관계가 가설 모형에 적합했다고 한다. 즉, 명제와 그 증명을 읽을 때, 용어와 명제(기본 지식)의 대부분을 이해하는 학생은 '표면' 수준을 넘어서 '요소의 인식' 수준을 향해가고 있었고, 대부분의 명제를 전제, 결론, 또는 응용된 정리들(논리)로 파악하고 이 증명의 핵심이나 결정적인 증명 아이디어(요약)을 파악하는 학생은, 기본 수준을 인식하는 것을 넘어서 '요소의 연결' 수준을 향해 가고 있는 것이다. 그리고 무엇이 이 증명에 의해 정당성이 입증되었는지를 파악하고(일반성), 이 명제 또는 이 증명을 적용하는 법(응용)을 아는 학생은 '요소의 연결' 수준을 넘어서, '압축' 수준을 향해 가고 있었다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

RCGP 모델에 따라 증명 수업을 실시하도록 2명의 학생을 연구 대상으로 선정하였다. 어느 정도 기본적인 기하학적 지식이 있고 기하 증명 지도를 받은 중학교 3학년 학생 1명과 고등학교 1학년 학생 1명을 선정하였다. 학생들의 지도는 연구자 중 1명이 직접 담당하였고, 2주간 수업을 실시하였다.

중학교 3학년인 A는 중학교 1학년까지의 수학성적은 하위권이었으나 수학의 필요성을 알고 공부한 결과 점점 성적이 좋아져 현재는 중상위권의 성적을 받고 있다. 하지만 수학의 기본원리를 파악하는 것보다 성적을 잘 받기 위한 공부를 하는 편이며 그다지 수학을 좋아하는 편은 아니다. 수학의 기본 원리 이해는 조금 느리지만 공식이나 내용의 암기는 뛰어나며 공식을 문제에 적용시키는 것도 잘하는 편이다. 하지만 자신이 처음 보는 문제를 접하면 심하게 당황하고 쉽게 포기해 버리는 경향이 있다.

고등학교 1학년 B는 중학교까지의 성적이 매우 우수한 학생으로 다른 과목에 비해서 수학이 조금 부족하기는 하나 상위권의 성적을 받았다. 여느 아이들과는 달리 수학의 기본원리에 흥미를 느끼며 공식을 암기하기 보다는 그 유도과정을 알고 싶어 한다. 때로는 너무 사소한 내용들까지 궁금해 하는 탓에 공부하는 데에 시간이 많이 소요되고 생각이 너무 많아 문제를 푸는 데에도 오랜 시간이 걸린다. 그래서 평소에 공부를 하는 것에 반해 학교 시험의 수학 성적은 조금 저조한 편이다. 하지만 수학에 관해 욕심이 많아 어려운 문제에도 끈기를 가지고 해결하려고 노력해, 조금만 더 노력한다면 충분히 좋은 성적을 받을 수 있을 것이라는 생각이 드는 학생이다.

A와 B는 기본적으로 수학에 대한 태도가 매우 상이하나 중학교 2학년 수학에서 어떤 부분

이 가장 어려웠냐는 질문에 둘 다 증명부분이라고 답하였다.

2. 연구 절차

RCGP의 모델이 증명 지도에서 어떻게 활용될 수 있는지 알아보기 위해 먼저 연구 대상에게 사전 검사를 진행하였다. 그리고 [4]의 수업 예시와 본 연구에서 개발한 교재를 가지고 수업을 진행하였다. 그 후, 수업이 기하 증명 능력에 어떠한 영향을 미쳤는지를 알아보기 위한 사후 검사를 통해 모델의 효과를 살펴보았다.

1) 사전 검사

사전 검사는 학습자의 기본적인 증명 능력을 검사하기 위한 것으로 증명 과정 서술하기 2문제로 구성된 문제지(부록1)로 실시되었다. 사전 검사 문제 2개는 중학교 2학년 교과서의 내용으로 삼각형의 성질과 사각형의 성질에 대한 것이다. 두 문제는 모두 증명 과정에서 가장 많이 쓰이는 삼각형의 합동조건을 이용하는 기본적인 문제이다.

2) RCGP 모델을 바탕으로 한 예제로 증명교육 실시

[4]가 제시한 RCGP의 가설적인 모델을 적용한 예제를 실제 수업에 적용시켜 보았다. 수업은 일대일 문답식으로 학습자가 증명 과정을 읽은 후 각 문항에 구술로 답을 하는 것으로 이루어졌다. 이때 연구자는 학습자가 각 문항을 제대로 이해하고 올바른 답을 할 수 있도록 간단한 질문을 하거나 조언을 하는 정도의 역할만 수행하였다.

3) 증명지도 성과 보고를 위한 사후 검사

이는 RCGP 모델을 바탕으로 한 예제로 증명교육을 한 것이 실제로 학습자의 증명 능력의 향상에 효과가 있는지를 검사하기 위한 것으로 앞에서 했던 사전 검사와 동일한 문제를 다시 한 번 풀게 하여 사전 검사의 결과와 비교할 것이다.

3. 결과 분석 방법

수업 과정은 학습자가 스스로 문제를 읽고 구술로 대답하고 연구자는 학습자가 문제를 잘 이해할 수 있도록 설명해주는 한편 옳은 답을 하기 위해 간단한 질문을 하는 과정으로 이루어졌다. 연구 결과를 보고할 때는 수업 내용의 일부를 발췌하여 학습자의 질문이나 대답이 의미하는 바를 분석하였다. 그리고 사전 검사와 증명지도 성과 보고를 위한 사후 검사는 분석적 채점법을 사용하여 그 점수를 비교함으로써 RCGP 모델을 바탕으로 한 예제 수업의 성과를

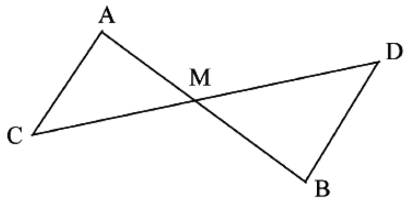
보이고자 하였다.

IV. 연구 결과

1. RCGP 모델의 적용

[4]가 제시한 RCGP의 가설적인 모델을 적용한 예제를 실제 수업에 적용시켜 보았다. RCGP 모델을 적용하기 위해 계획된 자료는 3가지이다. 증명 문제와 RCGP 모델을 적용한 문항, 그리고 문항 설계 구조도이다. 문제와 그 증명의 예는 다음과 같다.

<u>문제1</u> : 그림과 같이 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 가 점 M에서 교차할 때, $\overline{AM}=\overline{BM}$이고 $\overline{CM}=\overline{DM}$이면 $\overline{AC}$ 와 $\overline{DB}$는 서로 평행한가?



<증명>

$\triangle AMC$ 와 $\triangle BMD$에서 $\overline{AM}=\overline{BM}$ 과 $\overline{CM}=\overline{DM}$이고, ………… (1)

$\angle AMC=\angle BMD$ 이므로 ……………………………………………… (2)

$\triangle AMC \equiv \triangle BMD$ (SAS) ……………………………………………… (3)

따라서 $\angle MAC=\angle MBD$ (대응각) ……………………………………… (4)

$\angle MAC=\angle MBD$이므로, $\overline{AC} /\!/ \overline{DB}$

(엇각은 그 크기가 같다) ……………………………………………………… (5)

위의 증명과정에 필요한 요소는 <표 1>과 같이 분석할 수 있다. P는 가정, C는 결론을 말하며, P′는 문제에 제시되지 않은 가정이다.

<표 1> 문제1의 증명 요소 분석

증명 요소	기호	증명 요소의 분석
$\overline{AM} = \overline{BM}$	P1	**P1, P2, P'3 → C1** 「기본 가정 P1, P2와 교차된 두 직선의 성질로부터 얻어진 P'3의 가정으로부터 결론 C1이 도출되었다.」
$\overline{CM} = \overline{DM}$	P2	
$\angle AMC = \angle BMD$	P'3	
$\triangle AMC \cong \triangle BMD$	C1	
$\angle MAC = \angle MBD$	C2	**(C1) → C2** 「가정 C1로부터 결론 C2가 나오는데 이 가정만으로는 명백하게 사실임을 보일 수는 없다.」
$\overline{AC} /\!/ \overline{DB}$	C3	**C2 → C3** 「가정 C2 로부터 결론 C3가 나온다.」

RCGP를 적용하여 각 연관 목표에 따라 위의 증명을 하는 데 필요한 질문 문항은 <표 2>와 같이 설계되었다.

<표 2> 문제1에 대한 질문 설계 구조

영역	이해의 목표	조작적 정의	문항번호	점수	총점
기본 지식	가정 또는 결론의 내용	그림에서 기호의 의미를 인지	(1)	0, 1, 2	5
		정리의 의미를 설명	(2)	0, 1, 2	
		정리의 의미를 인지	(3)	0, 1	
논리	가정의 상태	직접적으로 사용된 조건을 인지	(4)	0, 1	7
	가정과 결론 사이의 논리적 관계	진술의 논리적인 순서를 판단	(5), (6)	0, 1, 2 0, 1, 2	
요약	가정으로부터 결론을 끌어내기 위해 사용된 정리	사용된 정리 인지	(7)	0, 1, 2	6
	종합적인 논의와 결정적인 착상	결정적인 처리, 가정 또는 결론 식별	(8-1) (8-2)	0, 1, 2 0, 1, 2	
		증명의 결정적인 착상 식별	(9-1) (9-2)	0, 1 0, 1	
일반성	조건 또는 증명	정확성 판단	(11) (12)	0, 1 0, 1	5
	모든 논의와 첨부된 그림	이 증명으로부터 정당성이 입증되는 것을 식별	(10) (13)	0, 1 0, 1, 2	
응용	다른 경우에 적용된 지식	같은 가정에 적용	(14) (15)	0, 1 0, 1, 2, 3	5
		다른 가정을 식별	(16)	0, 1	

<표 2>의 설계에 따른 질문은 다음과 같다.

문제와 증명과정을 바탕으로 다음 물음에 답하여라.
(1) $\angle AMC$에 각1, $\angle MAC$에 각2라고 이름을 붙이시오.
(2) 당신은 $\angle AMC = \angle MAC$라는 사실에 동의하십니까?
맞으면 맞는 이유를 아니면 아닌 이유를 설명해 보시오.
(3) 만약 $\triangle AMC$와 $\triangle BMD$가 합동이라면 $\angle MAC$에 대응하는 각은 무엇입니까?
(4) 우리가 알고 있는 조건 ($\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 는 점 M에서 교차하고, $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{CM} = \overline{DM}$) 이외에 다른 설명 없이 직접적으로 나오는 조건은 무엇입니까?
(5) 만약에 누군가가 증명 순서를 (1)-(3)-(2)-(4)-(5)로 바꾼다면 그 증명은 맞는 증명입니까?
(6) 만약에 누군가가 증명 순서를 (1)-(2)-(4)-(3)-(5)로 바꾼다면 그 증명은 맞는 증명입니까?
(7) 이 증명에서 어떤 성질이 사용되었습니까?
(8) 질문의 기초(근거)와 증명에서
(8-1) 어떤 조건들이 반드시 사용되었습니까?
(8-2) 이 증명으로부터 무엇이 얻어졌습니까?
(9) 이 증명과정으로부터, 이것은 $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{CM} = \overline{DM}$, 그리고 다른 조건들로부터 첫 번째로 나온 중요한 결과이고, 이 결과에서 나온 조건은 $\overline{AC} /\!/ \overline{DB}$를 뒷받침하는데 사용되어졌다.
(9-1) 이 중요한 결과는 무엇입니까?
(9-2) $\overline{AC} /\!/ \overline{DB}$를 뒷받침하는 데 사용된 조건은 무엇입니까?
(10) 이 증명으로부터 어떤 명제를 확인할 수 있습니까?
(11) 옳은 명제들을 고르세요.
(12) 당신은 이 증명과정이 옳다는 것에 동의하십니까?
(13) 명제A : 만약 $\overline{AB}$ 와 $\overline{CD}$ 가 점 M에서 교차하고, $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{CM} = \overline{DM}$이면 $\overline{AC}$ 는 $\overline{DB}$와 평행하다.
(13-1) 당신은 이 증명 과정이 명제A가 항상 옳다는 것을 증명할 수 있다는 것에 동의하십니까?
(13-2) 당신은 이 증명과정이 명제A가 때로는 옳고, 때로는 옳지 않다는 것을 증명할 수 있다는 것에 동의하십니까?
다음은 당신이 기본으로 알고 있던 것을 바탕으로 답하시오.
(14) 만약 사각형 PURV가 두 개의 대각선 $\overline{PR}$과 $\overline{UV}$을 가지고 있고, $\overline{PR}$과 $\overline{UV}$의 중점을 Q라고 한다면 이 사각형은 평행사변형입니까?
(15) 만약 $\overline{PR}$과 $\overline{UV}$가 점 Q에서 교차하고 Q가 $\overline{PR}$과 $\overline{UV}$ 모두의 중점이라고 한다면, 어떤 결론이 나올 수 있습니까?
(16) 만약 $\overline{XY} = \overline{YZ}$, $\overline{MY} = \overline{YN}$이고 $\angle XYM = \angle ZYN$이면, $\overline{XM}$과 $\overline{NZ}$는 서로 평행합니까?

위 내용은 [4]의 것을 인용한 것이다.

수업은 학생A와 학생B를 대상으로 일대일 문답식으로 이루어졌다. 학생A는 중학교 3학년으로 수학의 원리를 파악하는 공부보다는 시험을 위한 공식 암기 위주의 공부를 해 왔다. 그리고 학생B는 고등학교 1학년으로 수학에 대한 호기심이 많고 항상 논리적인 사고를 하려고 노력하는 학생이다. 이 두 학생의 특징은 RCGP 모델을 적용시킨 예제 수업에서 잘 나타나고 있다. 질문 (4)와 (5)의 응답을 살펴본다.

[수업장면 1]

(4) 우리가 알고 있는 조건 ($\overline{AB}$와 $\overline{CD}$는점 M에서교차하고, $\overline{AM}=\overline{BM}$, $\overline{CM}=\overline{DM}$) 이외에 다른 설명 없이 직접적으로 나오는 조건은 무엇입니까?

학생A : 선생님, 이거 어디서 찾으라는 말이에요? 연구자 : 증명 과정에서 보면 문제에서 가정을 하지 않았는데도 그냥 나오는 것이 있을 거야. 학생A : 음… 문제에 없는데 그냥 나온 것은… $\angle AMC=\angle BMD$요? 연구자 : 그렇지. 그럼 왜 이것은 아무 설명도 없이 그냥 주어진 것일까? 학생A : 글쎄요. 당연한 것인데 설명이 꼭 있어야 하나요?

학생B : 증명과정에서 말이죠? 연구자 : 응. 학생B : $\angle AMC=\angle BMD$요. 연구자 : 그럼 왜 그 조건은 아무런 설명도 없이 나와 있는 것일까? 학생B : $\angle AMC$랑 $\angle BMD$가 맞꼭지각이니까요. 맞꼭지각은 크기가 같은 것 아니에요? 연구자 : 그래. 맞았어.

(5) 만약에 누군가가 증명 순서를 (1)-(3)-(2)-(4)-(5)로 바꾼다면 그 증명은 맞는 증명입니까?

학생A : 아니요. 연구자 : 왜 그렇게 생각해? 학생A : 그냥 뭔가 이상해요. 말이 안 되는 것 같아요. 연구자 : 어떤 부분에서 말이 안 되는 것 같은지 한 번 잘 생각해 봐. 학생A : …. 연구자 : (1)에서 (3)으로 바로 넘어가는 것에 아무런 문제가 없니? 학생A : 아! 합동이라고 말하려면 다른 조건이 더 필요해요.

학생B : 순서를 바꾸면 맞는 증명이 아니에요. 연구자 : 왜 그렇게 생각해? 학생B : $\angle AMC=\angle BMD$라는 조건이 있어야지 두 삼각형이 합동이 되잖아요.

학생A는 이해하지 못하는 문항이 많았고 대답이 대체적으로 간결하고 직관에 의한 것이 많았다. 그에 반해 학생B는 구체적이고 논리적으로 대답하였으며 학생A보다는 문항을 더 잘 이해하는 모습을 보였다. 예를 들어 아래의 [수업장면 1]에서 (4), (5)번 문항에서 학생들이 답한 것을 살펴보면, (4)번 문항에서 학생A는 $\angle AMC = \angle BMD$라는 사실을 그냥 당연한 것으로 받아들였다. 이는 학생A가 그것이 맞꼭지각이라는 사실을 몰랐다고 하기보다는 이 사실이 무의식중에 너무나도 당연하다고 인식되어 있기 때문인 것으로 보인다. 그에 반해 학생B는 그 이유가 무엇인지 명확하게 알고 있었다.

문항 (5)에서는 두 학생 모두가 옳은 답을 하였으나 학생A는 자신의 직관적인 판단에 의해 답을 한 것으로 왜 그러한가에 대해서는 대답하지 못하는 모습을 보였다. 이는 학생A가 학생B에 비해 학년이 낮고, 지금까지의 학습방법에 있어서 논리적인 사고를 하는 것에 익숙하지 않았기 때문에 언어적인 표현에도 서툴고 논리적인 판단을 하는 데에도 어려움을 겪는 것으로 보인다. 이에 낮은 학년의 학생들을 대상으로 이 수업을 진행시키려면 좀 더 쉬운 언어를 사용하고 교사의 자세한 설명과 도움이 필요할 것으로 판단된다.

또한 수업을 진행하면서 여러 문제점도 발견이 되었는데, 그것은 학생들이 이해하기에는 힘든 지나치게 포괄적인 의미를 가진 문항과 너무나도 당연한 질문을 함으로써 학생들의 인지능력의 향상에 별다른 도움을 주지 못하는 문항이 포함되어 있다는 것이다. 예를 들어 (11)과 (12)의 질문을 보자.

[수업장면 2]

(11) 옳은 명제를 고르시오.

학생A	학생B
학생A : 선생님. 옳은 명제가 뭐예요? 연구자 : 참인 명제를 골라보라는 것이란다. 학생A : 이것은 증명이니까 여기에 있는 명제들은 다 참이지 않나요? 연구자 : 응. 그것도 맞는 말이구나.	학생B : 참인 명제를 고르라는 거예요? 아니면 항상 옳은 명제…. 정의를 고르라는 거예요? 연구자 : 이 문제와 증명과정에서 쓰인 정의가 있니? 학생B : 아니요. 정의는 없는 것 같아요.

(12) 이 증명과정이 옳다는 것에 동의합니까?

학생A	학생B
학생A : 네.	학생B : 네.

(11)번 문항의 경우에는 질문이 모호하여 학생들이 답을 하는 데에도 어려움이 있었을 뿐만 아니라 연구자도 정확히 지도하기 힘들었다. 이 문항의 목표가 ‘조건 또는 증명의 정확함을 판

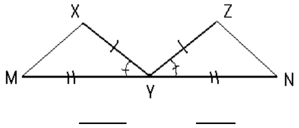
단하는 것'이라고 명시되어 있는데, 이 문항이 그 목표를 충족시키는 것인가에 대한 의문이 들었다. 그리고 (12)번 문항에서는 아래의 [수업장면 2]에서 학생들의 입장에서는 당연한 질문을 하는 것으로 받아들여지는 것으로 보아 학생들의 인지 능력을 향상시키는 데에는 별 도움이 되지 않을 것으로 판단되었다.

마지막으로 이 수업이 처음에 가진 목표는 학습자 스스로가 증명과정을 읽고 그에 따라 각 문항에 답을 함으로써 증명에 관한 인지 능력이 향상되는 것이었다. 하지만 실제로 수업을 해 본 결과, 학생들의 현재 학습수준이 문항을 이해하고 바로 답을 하는 것에는 미치지 못하여 교사의 역할이 무엇보다도 중요한 것으로 보여 졌다. 예를 들어 [수업장면 3]에서 문항 (16)번의 경우에는 학생들이 모두 잘못된 판단을 하였고 대답을 하는 데 어려움을 보였다.

[수업장면 3]

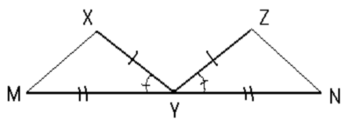
(16) 만약 $\overline{XY} = \overline{YZ}$, $\overline{MY} = \overline{YN}$이고 $\angle XYM = \angle ZYN$이면, $\overline{XM}$과 $\overline{NZ}$는 서로 평행합니까?

학생A : 네. 평행해요.
연구자 : 왜 그렇게 생각해?
학생A : 이것은 앞의 문제 보다 조건도 더 많이 들어갔으니까 당연히 평행해요.
연구자 : 하지만 앞의 문제에는 있었던 말이 여기에는 없잖아?
학생A : 음…. 교차하는 거요?
연구자 : 그렇지. 앞에서도 봤다시피 조건이 명확하지 않으면 그림이 하나로 결정되지 않을 때도 있단다.
학생A : 그럼 이것은 어떻게 다른 그림이 그려지죠? 저는 모르겠어요.
연구자 : (그림을 그려준다)



이래도 $\overline{XM}$이랑 $\overline{NZ}$가 평행하니?
학생A : 아니네요.

학생B : 선생님. $\angle XYM = \angle ZYN$는 앞의 증명에서는 증명과정에 바로 들어가 있었잖아요. 그런데 여기는 왜 조건으로 주는 거죠? 맞꼭지각이니까 그 크기가 같은 것은 당연한 거잖아요.
연구자 : $\angle XYM$랑 $\angle ZYN$가 맞꼭지각이라는 얘기가 어디에서 나온 거니?
학생B : 당연히 맞꼭지각 아니에요?
연구자 : 앞의 문제와 이 문제에서는 가정이 다르지? 여기서는 어떤 조건을 가정하지 않았을까?
학생B : 앞의 문제랑 다른 점이요? 음…. 아! 교차한다는 얘기가 없어요.
연구자 : 그렇지. 더욱 중요한 것은 점X에서 점Z까지가 일직선이라는 보장이 있니?
학생B : 그러네요. 그럼 일직선이 아니면 그림이 어떻게 그려지는 건가요?
연구자 : (그림을 그려준다)



이렇게 그려도 이 문제의 조건이랑 다른 것이 없지?
학생B : 아~. 그러네요. 이렇게 그려질 수도 있겠어요. 그럼 여기서는 $\overline{XM}$이랑 $\overline{NZ}$는 평행하지 않는 거네요?
연구자 : 그렇지.

학생들은 가정이 다르다는 것도 쉽게 인식하지 못하였고 여전히 판에 박힌 그림이 유일한 것으로 믿고 있었다. 이것은 학생들이 학습한 것을 다른 가정에 적용시키는 것에는 어려움을 겪는다는 것을 보여주는 예라고 할 수 있겠다. 그렇기 때문에 교사는 수업 시 이런 상황이 발생하였을 때 학생에게 적절한 질문을 하여 학생들이 올바른 쪽으로 답을 할 수 있도록 이끄는 '안내자'의 역할을 잘 수행해야 할 것이다.

[4]가 제시한 RCGP 모델을 바탕으로 한 예제를 수업에 진행하였을 때 몇 가지 문제점이 발견되었는데, 질문이 너무 포괄적이고 추상적이어서 학생들이 이해할 수 없는 부분들이 많았다는 것과 너무나 당연한 것을 물어보는 문항과 도저히 그 의미를 이해할 수 없는 문항이 포함되어 있었다는 것이다.

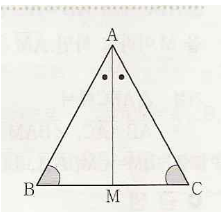
2. RCGP 모델 교재 개발

위의 문제점을 수정하여 RCGP 모델을 실제 수업에서 사용할 수 있도록, 본 연구에서는 RCGP 모델 교재를 개발하였다. 기하 증명이 중학교 학생들을 대상으로 할 것을 염두에 두어 문항을 좀 더 쉬운 용어를 사용하여 작성하였고, 최대한 자세하게 기술하였다. 그리고 문항 설계구조를 다듬고 그에 따라 문항을 재구성하였다. 또한 앞의 예제에서 불필요하다고 생각되어진 문항들은 삭제하였다. 이와 같은 과정을 통해 만들어진 교재는 다음과 같다.

먼저 중학교 증명교육과정에서 가장 기본이 되는 삼각형의 합동을 이용하는 증명문제를 선택하였다.

문제지

문제2. $\triangle ABC$에서 $\angle B = \angle C$이면 $\triangle ABC$는 이등변삼각형인가?



<증명>

$\angle A$의 이등분선과 밑면 BC가 만나는 점을 M이라고 하자. ··························· (1)

$\triangle ABM$과 $\triangle ACM$에서 $\angle BAM = \angle CAM$ ··························· (2)

또 $\angle B = \angle C$ 이므로 ··························· (3)

$\angle AMB$ = 180° - $\angle BAM$ - $\angle B$

= 180° - $\angle CAM$- $\angle C$

= $\angle AMC$ ··························· (4)

그리고 $\overline{AM}$은 공통인 변이므로 ·· (5)

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (ASA) ·· (6)

따라서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ (대응변) ·· (7)

$\therefore$ $\overline{AB} = \overline{AC}$이므로 $\triangle ABC$는 이등변삼각형이다. ·· (8)

<표 3>은 위의 증명에 필요한 요소를 분석한 것이다. 기호의 사용은 앞의 <표 2>와 동일하다.

<표 3> 문제 2의 증명 요소 분석

증명 요소	기호	증명 요소의 분석
$\angle BAM = \angle CAM$	P’1	**P’1, P2, P’3, P’4 → C1** 「기본 가정 P2와 삼각형의 성질로부터 얻어진 P’1, P’3, P’4 모두 4가지의 가정으로부터 결론 C1이 도출되었다. 」
$\angle B = \angle C$	P2	
$\angle AMB = \angle AMC$	P’3	
$\overline{AM}$공통	P’4	
$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$	C1	
$\overline{AB} = \overline{AC}$	C2	**(C1) → C2** 「가정 C1 으로부터 결론 C2가 나오는데 이 가정만으로는 명백하게 사실임을 보일 수는 없다. 」
$\triangle ABC$ 이등변 삼각형	C3	**C2 → C3** 「가정 C2 로부터 결론 C3가 나온다. 」

다음으로 RCGP 모델을 바탕으로 하여 ‘문항 설계 구조도’를 작성하였다.

<표 4> 문제 2의 질문 설계 구조도

면	이해의 목표	조작적 정의	질문번호
기본 지식	증명에 필요한 기초	그림에서 기호의 사용	(1)
		정리의 의미를 인지	(2)
논리	가정 또는 결론의 상태	가정과 결론의 구분	(3-1) (3-2)
	가정과 결론 사이의 논리적인 관계	진술의 논리적인 순서를 판단	(4), (5)
요약	가정으로부터 결론을 끌어내기 위해 사용된 정리	사용된 정리 인지	(6)
	결정적인 증명 아이디어	결정적인 가정을 식별	(7)
		증명의 결정적 아이디어 식별	(8-1) (8-2)
일반성	모든 논의와 첨부된 그림	이 증명으로부터 정당성이 입증되는 것을 식별	(9), (10)
응용	다른 상황에 적용된 지식	같은 가정에 적용	(11)
		다른 가정 또는 결론을 식별	(12)

마지막으로 '문항 설계 구조도'를 바탕으로 하여 질문지를 작성하였다.

질문지

위의 문제와 그 증명과정을 잘 읽고 다음 물음에 답해보세요.

(1) $\angle BAM$에 각1, $\angle CAM$에 각2라고 이름을 붙여 보세요.

(2) 만약 $\triangle ABM$과 $\triangle ACM$이 합동이라면 $\overline{AB}$에 대응하는 변은 무엇일까요?

(3) 이 문제에서

(3-1) 가정은 무엇일까요?

(3-2) 결론은 무엇일까요?

(4) 만약에 누군가가 증명 순서를 (1)-(2)-(3)-(4)-(5)-(7)-(6)-(8)로 바꾼다면 그 증명은 맞는 증명일까요?

(5) 만약에 누군가가 증명 순서를 (3)-(1)-(2)-(4)-(5)-(6)-(7)-(8)로 바꾼다면 그 증명은 맞는 증명일까요?

(6) 이 증명 과정에서 알 수 있는 정리를 골라서 써 보세요.

(7) 증명 과정 중에서 문제에서 주어져 우리가 알고 있는 조건 ($\angle B = \angle C$) 이외에 다른 설명 없이 나오는 조건은 무엇일까요?

(8) (8-1) 이 증명 과정에서 $\angle B = \angle C$, $\angle BAM = \angle CAM$ 라는 조건들로부터 처음으로 나온 중요한 결과는 무엇일까요?

(8-2) (8-1)의 결과로부터 나오고 $\triangle ABC$가 이등변삼각형이라는 사실을 뒷받침하는 데 사용된 조건은 무엇일까요?

(9) 이 증명으로부터 확인할 수 있었던 명제는 무엇일까요?

(10) 명제A : 만약 $\angle B = \angle C$이면 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형이다.

명제A를 증명하려고 할 때 앞의 문제에서의 증명을 그대로 사용해도 될까요?

다음은 알고 있는 것을 바탕으로 답해보세요.

(11) 만약 $\triangle ABC$에서 $\angle A = \angle B = \angle C$이면 이것은 정삼각형일까요?

(12) $\triangle ABC$에서 $\angle A = \angle B$이면 이 삼각형은 $\overline{AB} = \overline{AC}$인 이등변삼각형일까요?

앞의 수업에 쓰인 질문지와 본 연구자가 개발한 질문지는 다음과 같은 차이가 있다.

- 너무나도 당연한 문항과 도저히 의미를 알 수 없는 문항인 (2), (11), (12)번 문항과 (14)번 문항과 비슷한 것을 묻고 있는 (15)번 문항은 학생들의 기하 인지구조에 도움이 되지 않을 것으로 판단되어 삭제하였다.
- 진술의 논리적인 순서를 판단하는 (5), (6)번 문항은 모두 옳지 않은 순서를 제공하고 있

어서 둘 중 한 문항은 옳은 순서를 제공하는 것으로 수정하였다.

- (4)번 문항은 증명에 사용된 결정적인 가정을 식별하는 역할로 간주되어 기존의 ‘논리’영역에서 ‘요약’영역으로 이동하였다.
- (8)번 문항은 질문을 간단하게 바꾸어서 가정 또는 결론의 상태를 파악하는 것을 목표로 하여 기존의 ‘요약’영역에서 ‘논리’영역으로 이동하였다.
- (13)번 문항의 세부 문항인 (13-1)과 (13-2)는 같은 의미를 가지는 질문으로 판단되어 하나의 질문으로 통일하였다.

새로 바꾼 질문지를 앞서 수업을 했던 학습자에게 보여준 결과 학습자의 반응은 긍정적이었다. 앞에서의 수업은 교사가 많은 설명을 하고 질문을 하였던 것에 반해 새로 만든 질문지는 비교적 용어가 쉽고 내용이 명확하여 좀 더 효율성 있는 수업이 될 것으로 기대된다.

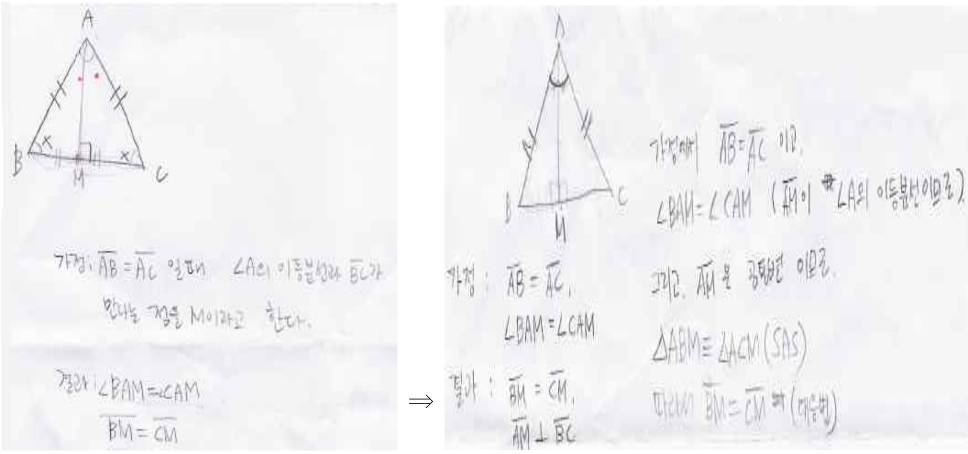
3. 기하 증명 능력에서의 효과

앞서 RCGP 모델을 적용한 예제 수업이 실제로 기하 증명 능력에 효과가 있었는지를 보기 위해 사전 검사와 사후 검사를 실시하였다.

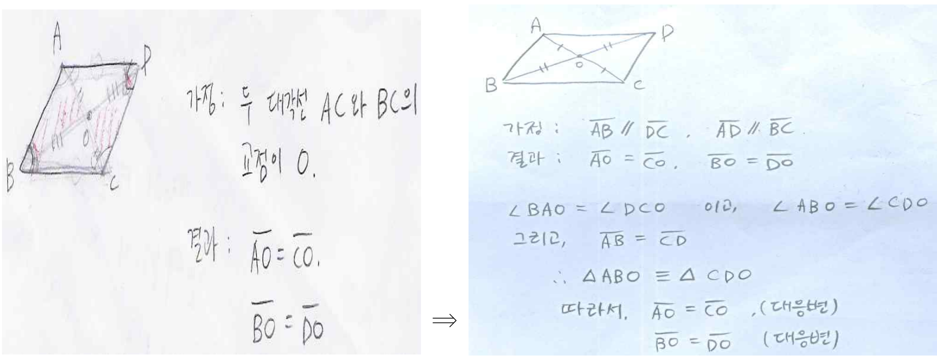
1) 학생 A

RCGP 모델을 적용시킨 예제 수업을 실시하기 전에 학생A는 문제를 보고 그림을 그리는 것은 잘 하였으나 가정과 결론을 제대로 구분하지 못하였다. 대체적으로 증명을 글로 서술하는 것에 어려움을 느꼈으며 증명의 구성과정에 대해서는 전혀 갈피를 잡지 못하였다. 그리고 학교에서 배운 정리를 그냥 당연한 것으로 받아들여 정의처럼 생각하고 있는 경향이 강했다. 또 가정과 결론을 문제에 있는 문장을 그대로 가지고 온 경우도 있었는데, 이는 학교에서 학생들에게 증명 교육에 앞서 명제에 대해 가르칠 때 가정과 결론을 구분하는 방법에 있어서 명제 자체를 ‘P이면 Q이다’는 형태로 한정시키고 여기서 P가 가정이며 Q가 결론이라고 교육한 것이 문제임을 보여주고 있는 사례라 하겠다. 또한 학생A는 무엇을 보여야 증명이 될 지 갈피를 잡지 못했다.

RCGP 모델을 적용시킨 예제 수업을 실시한 후 학생A는 앞의 증명 지도 내용과 비슷한 부분인 삼각형의 합동은 잘 이끌어 내었다. 하지만 그 외의 부분에서는 여전히 어려움을 보이고 있었으며 정리를 정의처럼 사용하는 경우도 한 차례 보였다.



[그림 3] 학생 A의 1번 문항 사전-사후 결과

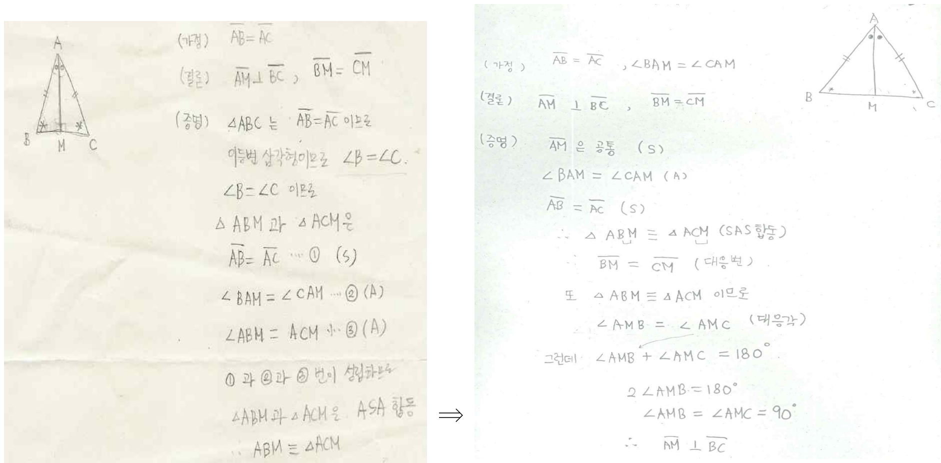


[그림 4] 학생 A의 2번 문항 사전-사후 결과

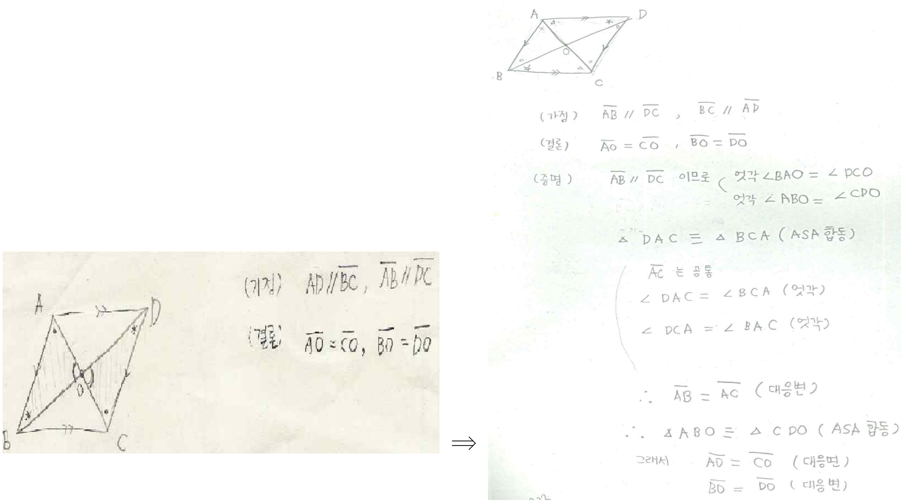
2) 학생 B

RCGP 모델을 적용시킨 예제 수업을 실시하기 전, 학생B는 처음에는 문제를 접하고 난감해 했으나 곧 잘 해결해 나가기 시작했다. 하지만 표면으로 직접 드러난 것만 가정으로 인식하여 가정을 완전히 쓰지 못한 경우가 있었고 증명 과정에 불필요한 내용을 적기도 하였다. 또한 정리를 정의처럼 사용하는 오류도 보였다. 그리고 1번 문제에서는 $\triangle ABM$과 $\triangle ACM$이 합동이라는 사실을 끝으로 더 이상의 증명을 하지 않은 것으로 보아 증명의 결론에 대한 이해가 부족하였다고 보인다.

RCGP 모델을 적용시킨 예제 수업을 실시한 후 학생B는 시간이 오래 걸리고 약간의 실수가 있긴 하였으나 별다른 어려움 없이 증명을 잘 해내었다.



[그림 5] 학생 B의 1번 문항 사전-사후 결과



[그림 6] 학생 B의 2번 문항 사전-사후 결과

사전 검사와 사후 검사는 분석적 채점법을 사용하여 점수를 비교하였는데, 그 결과는 다음 <표 5>와 같다.

<표 5> 사전-사후 점수 비교

	문제	사전 검사	사후 검사
학생 A	1	0	6
	2	1	7
	총점	**1**	**13**
학생 B	1	3	10
	2	2	9
	총점	**5**	**19**

사전 검사에서 학생A는 1번 문제와 2번 문제를 각각 0점과 1점을 받아 총점 1점을 받았고, 학생Bs,s 1번 문제와 2번 문제를 각각 3점과 2점을 받음으로써 총점 5점을 받았다. 20점을 만점으로 보았을 때 두 학습자 모두 정답률이 25%를 못 미치는 결과를 보였다.

RCGP 모델을 바탕으로 한 예제로 증명교육 실시한 후 증명지도 성과 보고를 위한 검사에서는 학생A가 1번 문제와 2번 문제에서 각각 6점과 7점을 받아 총점이 13점이었고, 학생B는 1번 문제와 2번 문제에서 각각 10점과 9점을 받아 총점이 19점이었다. 앞의 사전 검사 결과와 비교해 보았을 때, A는 12점이 상승하였고, B는 14점이 상승하였다. 이 결과로 미루어 볼 때, RCGP 모델을 바탕으로 한 예제 수업이 학습자의 증명능력을 어느 정도 향상시켰다고 생각되어진다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 [4]가 제시한 기하 증명의 읽기 이해(RCGP) 모델을 바탕으로 한 예제를 가지고 학습자에게 증명교육을 실시하고 문제점을 분석하고, 이를 보완하여 새로운 예시를 교재로 개발하며, RCGP 적용 효과를 살펴보았다. 연구 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

첫째, RCGP 모델을 바탕으로 한 예제 수업에서 문제점은 2가지가 있었다. 질문이 너무 포괄적이고 추상적이어서 학생들이 이해할 수 없는 부분들이 많고, 너무나 당연한 것을 물어보는 문항과 도저히 그 의미를 이해할 수 없는 문항이 포함되어 있었다는 것이다.

둘째, RCGP 모델을 바탕으로 한 예제 수업에서 나타난 문제점을 수업 장면과 사후 검사에서의 학생들의 반응을 바탕으로 하여 실제 수업에도 적용이 가능한 수업 모형을 제시하였다. 이렇게 보완한 모형은 기존의 것보다 쉬운 용어를 사용하였고, 좀 더 구체적으로 설명한 결과 학생들의 반응은 긍정적이었다.

셋째, 사전 검사 점수보다 RCGP 모델을 바탕으로 한 예제 수업 후의 검사 점수가 월등히 높아졌음을 보였고 이것이 완전히 이 수업만의 성과라고 볼 수는 없지만, 기하증명의 읽기 이해 모델을 적용한 예제 수업이 학습자의 기하 증명 능력의 향상에 어느 정도는 도움을 주었다는 것을 보여주었다.

본 연구의 연구 과정과 그로부터 얻은 연구 결과에서 나타난 제한점을 보완하여 보다 좋은 후속 연구를 위하여 몇 가지 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구자가 제시한 수정·보완된 수업 모형은 학생들의 반응이 긍정적이기는 했지만 아직 실제 수업에 도입하지 않은 상태로 그 성과를 단정 짓기에는 무리가 있다. 새로운 수업 모형을 실제로 수업에 적용시켜 그것의 유용성을 판단하는 연구가 진행되어야 할 것이다.

둘째, 이 수업에서는 학생들이 올바른 사고를 할 수 있도록 교사가 문답식으로 안내를 해야 하기 때문에 교사의 역할이 무엇보다도 중요했다. 그래서 일대일 대화법에 의한 수업이 아닌 다수의 학생들을 대상으로 하는 현재의 교육현장에서의 수업에도 적용이 가능한지에 대해서는 아직 미지수이다. 앞으로 다수의 학생들을 위한 수업에서 적용이 가능한지를 확인하고, 문제점을 보완하여 다듬는 연구가 있어야 할 것이다.

셋째, 이 연구는 상위권 학생 한명과 중위권 학생 한명을 대상으로 하였고, 그 결과 상위권의 학생에게 더 효과적임을 보였다. 이에 다양한 수준의 학습자들에게 적용이 가능하도록 하는 연구가 더 필요할 것으로 보인다.

넷째, 본 연구에서는 RCGP 모델을 바탕으로 한 예제를 옳은 증명의 문제만으로 구성하였는데, 비적절한 증명을 내용으로 하는 예제도 수업내용에 포함해서 학습자들의 기하학적 증명에 대한 사고력을 증진시키도록 보다 심도 깊은 연구가 필요하다.

참고문헌

[1] 노명완 (2000). Bloom의 교육 목표 분류 체계에 대한 새로운 이해-몇 가지 국어교육계의 논쟁점을 중심으로-, 고려대학교.

[2] 류성림. 중학생의 기하 증명 능력과 오류에 대한 연구, 한국수학교육학회지 시리즈 A: 수학교육, 32 (2) (1993), 137-149.

[3] 이보배 (2007). Branford의 역사·발생적 기하 교육을 활용한 증명의 의미 지도 – 피타고라스 정리를 중심으로-, 전국수학교육연구대회 프로시딩 (한국수학교육학회), 제 39회, 33-48.

[4] Kai-Lin Yang & Fou-Lai Lin. A model of reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 67 (1) (2008), 59-76.

[5] van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: a theory of mathematics education*. Academic Press.

Chulju Hwang
Department of Mathematics Education
Silla University
Busan, 617-736, Korea
E-mail address: cjhwang@silla.ac.kr

Ji-youn Lee
Department of Mathematics Education
Silla University
Busan, 617-736, Korea
E-mail address: yiji-love@hanmail.net

Sun Hee Kim
Department of Mathematics Education
Silla University
Busan, 617-736, Korea
E-mail address: mathsun@silla.ac.kr

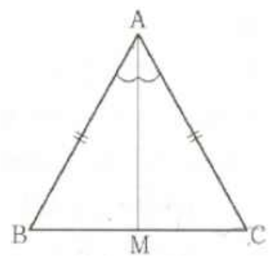
【부록1】 사전 검사 문제지

문제1. $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$일 때, $\angle A$의 이등분선 $\overline{BC}$가 만나는 점을 M이라고 하면 $\overline{AM}$은 $\overline{BC}$의 수직이등분선임을 증명하여라.

<모범답안>

가정 $\triangle ABC$에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAM = \angle CAM$

결론 $\overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AM} \perp \overline{BC}$



증명

$\triangle ABM$과 $\triangle ACM$에서

$\overline{AB} = \overline{AC}$ (가정), $\overline{AM}$은 공통인 변,

$\angle BAM = \angle CAM$ (가정) 이므로

$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (SAS합동)

따라서 $\overline{BM} = \overline{CM}$ (대응변)

그런데 $\angle AMB = \angle AMC$ (대응각)이고,

$\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ 이므로

$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$

따라서 $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

$\therefore \overline{BM} = \overline{CM}$, $\overline{AM} \perp \overline{BC}$

<채점 기준>

	채점 요소	배점
문제 이해	가정을 제대로 쓴다.	1점
	결론을 제대로 쓴다.	1점
해결 과정	$\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ (SAS합동)임을 안다. $\overline{AB} = \overline{AC}$ (가정) ......1점 $\overline{AM}$은 공통인 변 ......1점 $\angle BAM = \angle CAM$ (가정) 1점	3점
	$\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$ 임을 안다. $\angle AMB = \angle AMC$ (대응각) ......1점 $\angle AMB + \angle AMC = 180^\circ$ ......1점 $\angle AMB = \angle AMC = 90^\circ$ 1점	3점
결론 도출	$\overline{BM} = \overline{CM}$ (대응변)	1점
	$\overline{AM} \perp \overline{BC}$	1점
총점		10점

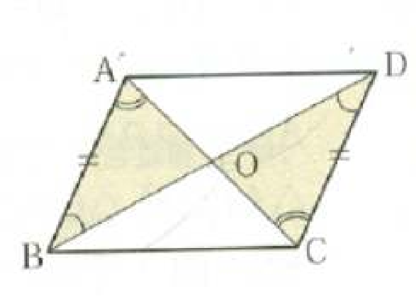
문제2. **평행사변형** $ABCD$**에서 두 대각선** AC**와** BD**의 교점을** O**라고 할 때,**

$\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$**임을 증명하여라.**

<모범답안>

<ins>가정</ins> $\square ABCD$에서 $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$

<ins>결론</ins> $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$



<ins>증명</ins>

$\triangle AOB$와 $\triangle COD$에서

$\angle BAO = \angle DCO$ (엇각), ...①

$\angle ABO = \angle CDO$ (엇각), ...②

또 $\triangle ABC$와 $\triangle CDA$에서

$\angle BCA = \angle DAC$ (엇각)이고,

$\angle BAC = \angle DCA$ (엇각),

$\overline{AC}$는 공통이므로 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (ASA합동)

$\therefore \overline{AB} = \overline{CD}$ (대응변) .....③

①, ②, ③에 의해 $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (ASA합동)

따라서, $\overline{AO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{DO}$ (대응변)

<채점 기준>

	채점 요소	배점
문제 이해	가정을 제대로 쓴다.	1점
	결론을 제대로 쓴다.	1점
해결 과정	$\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (ASA합동)임을 안다. $\angle BAO = \angle DCO$ (엇각) ....1점 $\angle ABO = \angle CDO$ (엇각) ....1점 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$ (ASA합동) ....3점 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 1점	6점
결론 도출	$\overline{AO} = \overline{CO}$ (대응변)	1점
	$\overline{BO} = \overline{DO}$ (대응변)	1점
총점		10점