East Asian Mathematical Journal
Vol. 25 (2009), No. 3, pp. 247-262

수세기를 통한 순열과 조합의 이해

정 인 철

ABSTRACT. Permutation and combination are the part of mathematics which can be introduced the pliability and diversity of thought. In prior studies of permutation and combination, there treated difficulties of learning, strategy of problem solving, and errors that students might come up with. This paper provides the method so that meaningful teaching and learning might occur through the systematic approach of permutation and combination. But there were little prior studies treated counting numbers that basic of mathematics′ action. Therefore this paper tries to help the understanding of permutation and combination with the process of changing from informal knowledge to formal knowledge.

Ⅰ. 서론

인간은 원시시대부터 수세기, 분류하기 등을 통한 수학활동을 해 왔으며, '수세기'는 현대사회에서도 유용하게 활용되고 있다. 따라서 '수세기'는 가장 기초적이면서도 중요한 수학활동으로 인식되고 있으며 초등수학의 많은 부분이 '수세기'를 기초로 하고 있다. 초등수학에서 '수세기'에 대한 지도가 비형식적 과정을 거친 사칙연산으로의 형식화 과정을 거치고 있다면 중등수학에서는 '순열과 조합'을 통해서 '수세기'에 대한 비형식적 지식과 형식적 지식의 결합을 추구하고 있다. 한편, 고등학교 교과 과정에서는 순열과 조합을 이산수학의 한 단원으로 또는 수학Ⅰ의 한 단원으로 다루고 있으며, 선행연구에서는 학생들이 순열과 조합 학습에서 느끼는 어려움과 문제 해결 전략, 문제의 난이도를 결정하는 변인에 대한 논의가 주를 이루고 있다(김서령 외, 2007; 이지현 외, 2005; 이지화, 2005; 이주영 외, 2006). 이처럼 순열과 조합에 대한 연구는 근본적으로 '수세기'라는 수학 기초 활동과 밀접한 관련이 있음에도 불구하고 '수세

2009년 6월 투고, 2009년 8월 심사 완료.
본 연구는 고려대학교 사범대학 특별연구비에 의하여 수행되었음.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key words : 수세기, 순열, 조합, 비형식적 지식, 형식적 지식, Permutation, Combination, Counting numbers, Informal knowledge, Formal knowledge

기'와 관련된 고찰이 이루어지지 않고 있으며, '수세기'와 관련된 단원 내적 이해를 등한시 하는 경향이 있다. 즉, 순열과 조합은 '수세기' 와 관련하여 일상 속에서 생활화 되어 있어 '수세기'와의 연관성을 따지거나 중요성을 부각시키는 것이 합당하지 않은 것처럼 여겨졌다고 볼 수 있다. 그러나 학습은 학습자가 이미 알고 있는 것에서 출발해야 하며, 교과의 기본 개념과 개념 사이의 관계를 학습하는 것이 중요하다(Bruner, 1960). 또한 학습자가 이미 알고 있는 것에는 비형식적 지식도 포함되어 있으며, 학교수학의 많은 부분을 차지하고 있는 형식적 지식에 비형식적 지식이 형성되는 과정이 중요한 역할을 한다고 볼 수 있다(김진호, 2002; Ginsburg & Asmussen, 1988). 따라서 순열과 조합의 이해에서 '수세기'를 배제한다는 것은 기본 개념과 형식화를 위한 비형식적 지식의 활용을 배제한다는 것이다.

이에 본고에서는 순열과 조합을 '수세기' 특히, 곱셈과 나눗셈에 관련하여 고찰하여 보고 문제유형과 오류유형 등으로 분류된 이전의 연구를 수세기와 관련지어 분석한다. 또한 '수세기'에 대한 고찰을 토대로 순열과 조합 단원의 비형식적 지식이 형식적 지식으로 전환되는 과정에 대한 이해를 돕고 의미 있는 학습이 일어날 수 있도록 필요한 요소들을 제시하고자 한다.

Ⅱ. 선행연구 고찰

1. 순열과 조합에서의 수세기

수세기와 관련된 사칙연산의 연구는 초등수학에서 활발하게 이루어져 왔다. 이들 연구의 주요 내용은 초등학교 학생들의 비형식적 수세기 활동을 사칙연산으로 형식화 하는 과정에 중점을 두었으며, 수세기를 수 감각과 계산의 기초로서 중요시 하고 있다(이종욱, 2007; 정영옥, 2005; Greer, 1992). 앞뒤로 세기, 10씩 뛰어 세기, 수직선 위에서 뛰어 세기 등 수세기의 방법이 다양하듯이 수의 의미 또한 다양하다. Freudental(1983)은 다양한 수의 의미를 농도수, 순서수, 측정수, 명명수, 계산수로 다양하게 구분하고 있으며, 이들 각각에 대한 의미를 나름 부여하는데 기여를 하기도 하였다.

(1) 순열과 조합에서의 수의 의미

자연수와 연산지도를 위한 교수학적 모델로는 묶음 모델, 직선 모델, 복합 모델 등이 있는데, 이는 각각 농도수, 순서수, 농도수와 순서수를 기초로 하는 모델이다. 정영옥(2005)은 우리나라에서는 주로 묶음 모델이 많이 활용되고 있으며, 묶음 모델은 농도수의 지도에는 적합하지만 순서수의 교수 모델로는 적합하지 않다고 하였다. 순열과 조합에서 사용되는 수세기는 초등학교 수세기와 마찬가지로 비형식적으로 출발하고 있다. 순열과 조합 단원에서는 문제 상황을 집합으로 표현하고, 각 집합 사이의 농도를 이용하여 경우의 수를 구하고 있다. 또한 합의 법칙이나 곱의 법칙, 순열, 조합 등에서 사용되는 기호의 계산에는 덧셈, 곱셈, 나눗셈 연산과 관

련된 묶음 모델이 적용되고 있다. 따라서 순열과 조합의 수세기에서의 수는 유한의 범위에서 사용되는 농도수이며 순서수와는 무관하다. 예를 들어, 아래의 몇 문제를 살펴보자. 다음은 각각 농도수의 덧셈과 뺄셈, 농도수의 곱, 그리고 농도수의 나눗셈을 기반으로 집합의 개수 또는 경우의 수를 구하는 경우이다.

농도수의 덧셈과 뺄셈

1부터 10까지의 자연수 중에서 2의 배수 또는 3의 배수의 개수를 구하여라.

[풀이]

A : 2의 배수의 집합

B : 3의 배수의 집합

C : 2의 배수 또는 3의 배수의 집합

$C = A \cup B$

따라서 $\#C = \#A + \#B - \#(A \cap B)$ 이다.

농도수의 곱

서로 다른 7개 중 3개를 뽑아서 순서대로 배열하는 경우의 수를 구하여라.

[풀이]

서로 다른 7개 : a, b, c, d, e, f, g

A : 첫 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

B : 두 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

C : 세 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

D : 서로 다른 7개 중 3개를 뽑아서 순서대로 배열하는 경우의 집합

$$D = A \times B \times C$$

$$\#D = \#(A \times B \times C) = \#A \times \#B \times \#C$$

(여기에서 $\#C$는 집합 C의 농도)

농도수의 나눗셈

5명 중 3명을 뽑는 경우의 수를 구하여라.

[풀이]

농도수의 곱을 활용한 풀이

서로 다른 5명 : a, b, c, d, e

A : 첫 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

B : 두 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

C : 세 번째 자리에 배열할 수 있는 원소로 이루어진 집합

D : 서로 다른 5명 중 3명을 뽑아서 순서대로 배열하는 경우($D=E\times F$)
E : 서로 다른 5명 중 3명을 뽑는 경우
F : 3명을 순서대로 배열하는 경우
$\#D=\#(E\times F)=\#E\times\#F$
$\#D=\#(A\times B\times C)=\#A\times\#B\times\#C$
위의 두 식에서 $\#E$를 구할 수 있다.

(2) 순열과 조합에서의 곱셈

Greer(1992)는 자연수 곱셈 상황을 동수묶음(equal groups), 곱셈적 비교(multiplicative comparison), 직사각형 정렬(rectangular area), 카티션 곱(Cartesian product)으로 분류하였다.

① 동수묶음의 예 : 3명의 아이들이 각각 4개의 사과를 갖고 있다. 모두 몇 개의 사과를 갖고 있는가?
② 곱셈적 비교의 예 : 배의 무게는 사과 무게의 3배라고 한다. 사과의 무게가 2g이라면, 배의 무게는 몇g 인가?
③ 직사각형 정렬의 예 : 직사각형 모양으로 5개씩 4줄 있는 달걀의 수를 구하여라.
④ 카티션 곱 : 서울에서 부산으로 가는 서로 다른 길은 3가지, 부산에서 광주로 가는 서로 다른 길은 5가지가 있다고 한다. 서울에서 부산을 거쳐 광주로 가는 길은 총 몇 가지인가?

순열과 조합에서는 카티션 곱 상황의 문제가 주로 제시된다. 이것은 순열과 조합에서의 경우의 ‘수’를 농도수로 보고 문제에 제시된 상황을 곱집합으로도 표현할 수 있음을 의미한다. 그래서, 초등수학에서는 카티션 곱을 곱셈의 연구에서 깊이 있게 다루고 있지는 않다(이종욱, 2007). 순열과 조합에서는 동일한 문제에 대해서 학습자의 접근 방법에 따라 다양한 곱셈 상황이 제시되고 있다. 카티션 곱은 순열과 조합 개념의 관계적 이해에서 활용되며, 문장제에 직면했을 때 대다수의 학생이 무의식적인 카티션 곱으로 문제를 해결하고 있다. 카티션 곱을 의식화 하는 과정에서 동수묶음을 통한 동수누가 곱셈상황이 전개된다. 동수누가 방법으로의 접근은 수형도 그리기를 통한 경우의 수 찾기에서 자주 활용되며, 수형도를 어떻게 그리느냐에 따라서 동수묶음 곱셈상황에서 3×5와 5×3의 의미가 달라짐을 알 수 있다. 즉, 동일한 답이 나왔다 할지라도 수형도를 그릴 때의 분류 방식에 차이가 있음을 알 수 있다. 결과적으로 같은 결과를 가져오기는 하지만 그 의미와 접근 방식은 정반대가 됨을 쉽게 할 수 있다. 상식적으로 서울에서 부산을 거쳐서 광주로 가는 길을 세는 것이 맞지만, 지적인 구조가 되어 있는 경우라면 무리 없이 부산에서 광주로 가는 길을 먼저 인식하고 서울에서 부산으로 가는 길을 택해도 결과적으로 같은 값을 갖게 되는 것이다. 하지만 이와 같은 경우에는 형식적인 지식이 갖추어져 있지 않은 학생에게 수학적인 접근만을 강요하는 것은 오히려 부작용을 가져올 수 있

으므로 교사의 역할이 아주 중요하다고 할 수 있다.

(3) 순열과 조합에서의 나눗셈

어린 아동의 나눗셈은 곱셈과 마찬가지로 그 근원이 비형식적이며, 분할, 측정, 비교, 비율, 곱셈의 역, 동수누감에 의한 문제 상황을 거쳐서 형식적 나눗셈 연산을 학습한다(황우형・김경미, 2008).

① 분할의 예 : 사탕 12개를 3명의 친구와 똑같이 나누어 먹으려고 한다. 한 명이 몇 개를 받을 수 있을까?
② 측정의 예 : 카드 12개를 3개씩 묶었다. 모두 몇 묶음인가?
③ 비교의 예 : 100원이 25원으로 줄어들었다. 몇 배로 줄어들었나?
④ 비율 : 화살을 한 번 쏘면 한꺼번에 3마리의 토끼를 잡는다고 한다. 12마리의 토끼를 잡으려면 화살을 몇 번 쏘아야 하는가?
⑤ 곱셈의 역 : 어떤 수에 4를 곱했더니 12가 나왔다. 어떤 수는 얼마인가?
⑥ 동수누감 : 12÷3을 12를 0이 될 때까지 3씩 빼는 것으로 인지하는 것. 즉, 나눗셈을 뺄셈에서 유도하고자 함.

순열과 조합은 문제 상황이 곱집합으로 표현되면서 원순열과 조합을 순열에서 유도하고자 할 때, 측정으로서의 나눗셈 또는 곱셈의 역으로서의 나눗셈에 직면하게 된다. 이 때, 고등학생들이 측정으로서의 나눗셈 개념, 또는 곱셈의 역으로서의 나눗셈을 정확하게 이해하지 못하고 있다면 순열에서 원순열과 조합을 유도할 때 어려움을 겪게 된다.

순열의 수에서 조합의 수를 유도할 때 : 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념 활용

P : 서로 다른 n개 중 r개를 뽑아서 순서대로 배열하는 경우의 집합
C : 서로 다른 n개 중 r개를 뽑는 경우의 집합
A_m : m번째 자리에 배열할 수 있는 원소들로 이루어진 집합($m=1,2,3,\cdots,r$)
B : 서로 다른 r개를 순서대로 배열하는 경우의 집합

$$P=(A_1\times A_2\times\cdots\times A_r)$$

$$P=C\times B$$

따라서

$$\#P=\#A_1\times\#A_2\times\cdots\times\#A_r=\#C\times\#B$$

위의 방법은 순열의 의미 속에 조합의 의미가 내재되어 있다는 개념발생적인 차원에서의 유

도 방법이다. 개념발생적인 유도 방법에서는 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념이 사용된다. 그러나 다른 교과서에서는 순열의 수가 조합의 수보다 먼저 제시되며 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$은 순서를 고려하지 않으므로 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$과의 관계에서 측정 나눗셈의 개념을 사용하여 ${}_n\mathrm{C}_r = \frac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$ 이라고 표현하기도 한다.

순열의 수에서 조합의 수를 유도할 때 : 측정 나눗셈 개념 활용

C : 서로 다른 n개 중에서 r개를 고르는 경우의 집합

P : 서로 다른 n개 중에서 r개를 순서대로 배열하는 경우의 집합

$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 중에서 r개를 순서대로 배열하는 특수한 한 가지 경우 $a_1, a_2, \cdots, a_r$을 고른다.

$a_1, a_2, \cdots, a_r$을 순서대로 배열하는 모든 경우가 집합 P에서는 모두 다른 원소이다. 그러나 집합 C에서 $a_1, a_2, \cdots, a_r$을 순서대로 배열한 모든 경우는 $a_1, a_2, \cdots, a_r$과 같은 경우이다. 따라서 $a_1, a_2, \cdots, a_r$을 순서대로 배열한 모든 경우의 수 $r!$가지가 한 묶음으로 세어진다.

다른 경우에도 $r!$가지가 한 묶음으로 세어진다.

이는 측정 나눗셈의 개념에 의해서 $\#C = \#P \div r!$으로 표현될 수 있다.

Fischbein et al.(1985)은 나눗셈의 직관모델을 등분제 상황과 포함제 상황으로 나누어 제시하였는데, 등분제의 경우는 '등분할', 포함제의 경우는 '동수누감'으로 아동의 초기 직관모델을 제시했다. 이러한 모델들은 학생들의 사전 지식과 경험의 정도에 따라 긍정적인 결과를 가져올 수도 있고, 또한 수학적 개념의 이해와 적용에 대한 부정적인 결과를 가져올 수도 있음을 지적하였으며, 이에 대해서 황우형・김경미(2008)는 다수의 아동들이 나눗셈을 등분할의 의미로 이해하고 있고, 초등 교과서의 나눗셈이 포함제 유형에 편중되어 있다는 연구결과를 제시하였다. 이 연구결과는 다양한 나눗셈 개념이 순열과 조합의 관계적 이해를 어렵게 하는 요인임을 암시하고 있다. 이를 기반으로 볼 때, 이러한 개념들을 초기에 접하는 학생들의 경우 학생들의 지적인 네트워크의 형성에 유의하여 위계성을 고려하여 학생들에게 제시하는 것이 아주 중요하다고 볼 수 있다.

2. 순열과 조합에 대한 선행연구

Dubois(1984)는 순열과 조합 문제 유형을 선택문제, 분배문제, 분할문제로 나누었다. 여기에서 동일한 연산의 문제라도 문제 유형이 다른 경우 다른 해결 전략을 사용하는 경향이 나타났다. 즉, 학생들에게 선택, 분할, 분배 문제 간의 변환은 쉽지 않았다는 뜻이다. 따라서 문제 상황과 문맥은 다르지만 해결 방법이 같은 새로운 문제 상황을 주고 두 문제 사이의 관계를 학

습자가 스스로 연결해 보도록 하여 기존에 알고 있는 문제와 구조적 대응을 찾는 사고를 경험하게 하는 것이 중요하다(이주영 외, 2006). 이지현(2005)은 문제 유형의 차이에서 비롯된 어려움에 대한 대안으로 단원배열을 선택, 분배, 분할이라는 수학적인 상황을 중심으로 전개하는 방법을 제시했다. 따라서 순열과 조합의 지도에 있어 문제 유형을 활용한 다양한 의미 구조의 문제를 제시하고, 공식 위주가 아닌 문제 상황을 이해하고 이에 대한 해법을 변형, 확장하는 경험을 강조하는 것이 필요하다고 주장한다. 또한 이지현은 문제이해 과정에서 오류를 범한 경우를 Batanero(1997)의 연구를 토대로 다음과 같이 자세히 분류하였다.

① 순서에 관한 오류
순서가 필요하지 않은 경우에도 순서를 고려하거나, 반대로 순서가 필요한데도 고려하지 않은 경우
(예) 4장의 우표를 두 사람이 두 장씩 나누어 가지는 문제 6×2

② 중복에 관한 오류
(예) 네 개의 자동차를 세 사람에게 나누어 주는 문제의 경우 ‘자동차’가 중복될 수 있다고 생각하는 경우 4^3

③ 대상의 구별에 관한 오류
구별할 수 없는 대상을 구별할 수 있는 것으로 생각하거나, 반대로 생각하는 경우
(예) 세 개의 똑같은 연필을 4개의 필통에 넣는 문제: 똑같은 세 개의 연필을 습관적으로 1, 2, 3으로 구별하여 생각

④ 같은 것이 있는 순열에 관한 오류
(예) 파란 공 2개, 흰 공 1개, 빨간 공 1개를 배열하는 문제와 같이, 같은 것이 있는 순열에서 같은 것들이 이웃하는 경우만을 고려하는 경우(파,파) 흰 공, 빨간 공으로 배열하는 경우만 생각하여 3!×2로 계산

⑤ 상자의 구별에 관한 오류
(예) 네 장의 우표를 두 사람이 두 장씩 나누어 가지는 문제에서 4장의 우표를 두 사람이 두 장씩 나누어 놓기만 하고 어느 사람이 우표를 가지게 되는지는 고려하지 않아 3으로 계산

⑥ 분할의 조건에 관한 오류
분할하는 조건을 잘못 이해하거나 가능한 유형 중 일부만을 고려
(예) 네 개의 자동차를 세 사람에게 나누어 주는 문제
분할하는 조건을 잘못 이해하여 갑이 4개, 을이 세 개, 병이 두 개 중 하나를 고르게 되고, 한 사람에게 모두 줄 수도 있으므로 3가지가 더 있다고 생각(4×3×2)+3
문제의 조건에 위배되는 경우와 가능한 유형 중 일부만 고려하여 세 사람은 모두 한대씩은 꼭 받아야 하므로 어느 1명은 반드시 2개를 받아야 한다고 생각 3×6

⑦ 기타 오류 : 이외의 다른 모든 경우의 오류

또한, 김서령 외(2007)는 조합문제에서의 인식론적 장애를 곱의 법칙과 합의 법칙 중심으로 진술하면서, '경우 나누기'의 중요성을 강조하고 그에 대한 많은 연구가 이루어져야 한다고 주장한다. 김서령 외(2007)의 연구는 순열과 조합의 더 근원적인 부분을 고려했다는 점에서 문장제에 대한 위의 선행연구들과 차별화된다.

순열과 조합에 대한 다른 연구에서는 Benjamin & Quinn(2003)의 조합적 등식에 대한 문제해결 전략을 소개하고 있다. 조합적 논증이란 등식을 증명하는 하나의 방법으로 등식을 증명하기 위해서 적당한 집합을 만들고 그 집합의 원소를 서로 다른 방법으로 셈하여 등식의 좌변과 우변이 같음을 보이는 증명방법이다(윤대원 외, 2006). 이는 조합의 기호를 계산하기 위한 수단으로서가 아닌 다양한 개념적 사고를 위한 수단으로 활용했다는 점에서 그 의미를 찾을 수 있다고 하였다.

이상에서 수세기는 순열과 조합에 대한 수학적 개념이 자연스럽게 소개되어 형식적 지식으로의 안내 역할을 하는 초등수학의 가장 기본적인 개념이라 할 수 있다. 수세기가 단순히 무작정 일어나는 것이 아니라, 주어진 상황을 분류해가면서 비형식적으로 제시된 상황을 형식적인 형태로 전환하는 과정에서 필연히 도입되어야 하는 소중한 도구라고 할 수 있는 것이다.

Ⅲ. '순열과 조합' 단원의 이해

1. 수세기를 통한 순열과 조합의 이해

현행 교과서는 순열과 조합 단원을 경우의 수, 순열(순열, 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열), 조합(조합, 이항정리)으로 분류하고 있다. 대부분의 교과서에서는 중요하게 사용되는 수학 공식이나 기호를 글상자 안에 넣어서 표현하고 있다. 글상자 이전의 문단에 각 기호에 대한 개념이 설명되어 있고, 위와 같은 방법으로 기호 계산을 정리함으로써 글상자 안에 계산을 간략하게 제시하고 있다. 따라서 교사는 ${}_n\mathrm{C}_r$과 ${}_n\mathrm{P}_r$의 개념을 좀 더 구체적이고 상세하게 안내해야 하며, 기호는 수학적 개념을 간략하게 표시하기 위해 사용한다는 것을 언급해야 한다. 즉, 순열과 조합에서 사용된 수학적 기호는 교통표지판처럼 사용하는 사람들의 '약속'으로 이루어진 것이며, 이 '약속'을 잘 지켜야 함을 강조해야 하겠다. 따라서 '${}_n\mathrm{P}_r$은 무엇인가?' 라는 질문에 학생이 '${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$' 또는 '${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}\ \ (0 < r \leqq n)$'라고만 답했다면, 교사는 기호의 개념에 대해서 다시 한 번 언급해야 할 필요가 있는 것이다. 즉, 교사는 교과서의 내용을 기호의 개념 위주로 반복해야 하며 서로 다른 n개 중 r개를 뽑아서 순서대로 배열하는 경우의 수 '${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$'은 카티션 곱의 개념에 의해서 유도된다는 것을 인식시켜야 하겠다. 이러한 개념 위주의 반복은 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$과 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$을 계산을 위한 수단이 아니라 사고를 위한 수단으로 활용하기 위한 기초가 된다.

한편, 순열 개념을 먼저 도입한 후 ‘조합’, ‘원순열’, ‘같은 것이 있는 순열’ 을 도입할 때, 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념과 측정 나눗셈의 개념은 매우 중요하게 활용되고 있음을 앞에서 확인할 수 있었다. 여기에서 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$은 서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하여 순서대로 배열하는 경우의 수로, 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$은 서로 다른 n개 중에서 r개를 선택하는 경우의 수로 정의되고 있음을 다시 한 번 인지할 필요가 있다. 개념 발생적 측면에서 순열의 수와 조합의 수 사이의 관계를 따질 때 순열 집합은 조합 집합과 r개를 순서대로 배열하는 집합의 카티션 곱의 상황으로 표현된다(${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \times r!$). 여기에서 개념발생적 측면이란 ‘서로 다른 n개 중에서 r개를 뽑아 순서대로 배열하는 경우의 수’ 인 순열의 수 속에 이미 ‘서로 다른 n개 중 r개를 뽑는 수’인 조합의 수가 내재되어 있음을 의미한다. 개념 발생적 측면에서는 카티션 곱을 활용하여 순열의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$을 곱으로 표현할 수 있으며 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$은 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념을 사용하여 유도할 수 있었다. 그러나가 표현에서 우리는 개념발생 순서의 문제와 형식적 기호 제시 순서가 다르다는 것에 대해 고민하게 된다. 즉, 조합의 개념 후에 순열의 개념이 발생되었음에도 ${}_n\mathrm{P}_r$ 후에 ${}_n\mathrm{C}_r$이 제시된다는 것이다. 개념발생 순서대로라면 ${}_n\mathrm{C}_r$ 후에 ${}_n\mathrm{P}_r$이 제시되는 것이 맞지만, 이것은 조금 더 근원적인 수세기의 형식화 문제에 부딪히게 된다. 즉, ${}_n\mathrm{P}_r$은 즉각적인 카티션 곱으로 표현될 수 있지만, ${}_n\mathrm{C}_r$은 ${}_n\mathrm{P}_r$보다는 복잡한 과정을 거쳐야 사칙연산으로 표현될 수 있다는 것이다. 따라서 ${}_n\mathrm{P}_r$이 ${}_n\mathrm{C}_r$보다 먼저 제시되고 측정 나눗셈의 개념을 사용한 ${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{r!}$이 사용될 때 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념을 사용한 ${}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{P}_r \times r!$보다 비형식적 수세기 활동을 형식화 하는데 용이하다고 볼 수 있다. 여기에서 측정 나눗셈 개념은 비형식적 지식과 형식적 지식을 연결하는 다리 역할을 하고 있다고 볼 수 있다. 따라서 순열과 조합에서 측정 나눗셈 개념은 매우 중요하며, 순열과 조합에서 ‘$6 \div 2$는 무슨 뜻인가?’라고 질문했을 때, $6 \div 2$가 3이라는 결과적 해석을 하기보다 ‘6개를 2개씩 묶었을 때 묶음의 개수’로 인식하도록 해야 한다는 것이다. 이는 측정으로서의 나눗셈 개념에 익숙하지 않다는 것이 순열과 조합의 비형식적 상황을 형식화 하는 데 어려움을 겪게 되는 요인이 될 수 있다는 것을 의미한다. 이처럼, 순열과 조합에서는 계산 자체가 아니라 사칙연산의 개념 특히 곱셈과 나눗셈의 개념을 중요하게 다루고 있음을 알 수 있다.

<table>
<tr><td>개념발생
적 측면</td><td>${}_n\mathrm{C}_r \to {}_n\mathrm{P}_r$
조합→순열</td><td>곱셈의 역으로서의
나눗셈 개념 활용</td></tr>
<tr><td>수세기
측면</td><td>${}_n\mathrm{P}_r \to {}_n\mathrm{C}_r$
순열→조합</td><td>측정으로서의 나눗셈
개념 활용</td></tr>
<tr><td colspan="3">수세기 측면이 비형식적 상황의 형식화에
용이하다.</td></tr>
</table>

<표 1> ${}_n\mathrm{C}_r$과 ${}_n\mathrm{P}_r$의 개념발생 순서와 형식적 기호 제시 순서

원순열이나 같은 것이 있는 순열의 경우도 중요한 것은 계산 방법이 아닌 수세기로서의 형식화 과정이다. 원순열의 경우 $(n-1)!$과 $\frac{n!}{n}$ 사이에는 순열과 조합 사이의 표현과 마찬가지로 원순열의 수를 형식화하는 과정에서 미묘한 차이가 있다. 서로 다른 n개를 원탁 위에 배열하는 경우의 수를 $(n-1)!$로 계산하는 경우는 첫 번째 배열하는 대상이 어디에 위치하든 그것은 나머지 $n-1$개를 배열하는 기준으로서의 역할을 할 뿐이라는 것을 강조한다. 그러나 $\frac{n!}{n}$로 계산하는 경우는 순열의 수 $n!$에서 출발하여 측정 나눗셈의 개념을 활용하고 있다는 의미가 강조된 것이다. 따라서 $(n-1)!$이 직관적 사고에 용이하다면 $\frac{n!}{n}$은 순열과의 관계적 사고를 도울 수 있다고 볼 수 있다.

$(n-1)!$	직관적 사고에 용이
$\frac{n!}{n}$	순열 $n!$과의 관계 해석에 용이

<표 2> 원순열에서 $\frac{n!}{n}$과 $(n-1)!$

한편, 같은 것이 있는 순열의 해석은 순열과 조합 사이의 관계를 해석할 때와 같다. 이것은 같은 것이 있는 순열을 곱셈의 역으로서의 나눗셈 개념을 활용하거나 측정으로서의 나눗셈 개념을 활용한다는 점에서 차이가 없다. 그러나 선행 연구에서 살펴보았듯이, 학생들은 문제 유형이 다른 경우 다른 해결 전략을 사용하는 경향이 나타났다고 한다(이주영 외, 2006). 같은 수학적 개념에 대해서 상황에 따라 그 해석이 다양하게 나타남은 물론, 학생들이 쉽게 드러내는 그 오류의 다양성 또한 유의 깊게 지켜보아야 할 사항이다.

2. 이항정리 $(a+b)^n$의 종합적 측면

$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + {}_n\mathrm{C}_n b^n$이 왜 이렇게 표현되었는지 유도하는 과정에서 $(a+b)^n$은 $(a+b)$가 몇 번 곱해진 것인가를 인지한다. 대부분의 학생들이 $(a+b)^2$ 또는 $(a+b)^3$을 공식으로 암기하면서도 그것이 $(a+b)$가 두 번 곱해진 것, 또는 $(a+b)$가 세 번 곱해진 것이라는 것을 기억의 저편에 묻어두고 있다. 그리고 교사는 $(a+b)^2$과 $(a+b)^3$의 전개공식을 분배법칙을 이용하여 $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ba+b^2$을 보여주었던 증명법에서 탈피하여 $(a+b)$ 괄호묶음 속 두 개의 항 중 반드시 하나를 선택해야 하는 이항정리 개념으로의 사고 전환을 유도해야 한다. 또한 $(a+b)$ 괄호묶음 속 두 개의 항 중 반드시 하나를 선택해야 한다는 것에서 ‘이항정리’라는 용어가 나오게 되었음을 알려주는

것이 바람직하다고 할 수 있다. 이 과정에서 학생들은 $(a+b)^2$ 또는 $(a+b)^3$ 공식에 대한 사고의 전환이 필요하며 이것은 $(a+b)^n$을 조합으로 표현하기 위해서 반드시 필요한 과정이라고 할 수 있다. $(a+b)^3$에서 $(a+b)(a+b)(a+b)$ 각각의 괄호 묶음 속 두 개의 항 중 반드시 하나를 선택하는 과정을 수형도로 그리면서 a^3, a^2b, ab^2, b^3이 몇 개씩 나오는가 알아본 후, a^3이 한 개, a^2b가 3개가 나오게 되는 과정을 '조합의 관점'에서 해석해 보고, 그것이 '같은 것이 있는 순열의 관점'에서 해석하는 것과 어떤 차이가 있는가를 학생 스스로 찾아보도록 해야 한다.

그렇다면, '조합'과 '같은 것이 있는 순열'을 구분할 필요가 있는가? '조합'과 '같은 것이 있는 순열'은 의미론적인 면과 계산적 측면에서 모두 동일하다. 그럼에도 불구하고 현행 교과서는 두 분야로 구분하면서 '조합'과 '같은 것이 있는 순열'이 서로 다른 것처럼 기술하고 있다. 이것은 앞에서도 살펴보았듯이 같은 구조이지만 다른 문제 유형을 가지고 있는 예로 조합과 같은 것이 있는 순열을 다루고 있다고 보아야 할 것이다. 대신, '이항정리'를 통해서 '조합'과 '같은 것이 있는 순열'의 형식적 동일성을 추구하고자 하였다. 이처럼 '이항정리'는 '조합'과 '같은 것이 있는 순열'의 의미론적 동일성 및 형식적 동일성을 확고하게 하기 위한 역할을 하고 있으며, 교사는 이항정리를 통해서 '같은 것이 있는 순열'과 '조합' 사이의 관계를 정리함으로써 학생들의 유연한 사고를 유도하는 것이 바람직하다고 할 수 있다.

$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r + {}_n\mathrm{C}_n b^n$ 이 왜 이렇게 표현되었는가? $\Leftrightarrow$ $(a+b)^n = (a+b)(a+b)(a+b)\cdots(a+b)$: $(a+b)$가 n번 곱해짐 $=(\ \square\ )(\ \square\ )(\ \square\ )\cdots(\ \square\ )$: 두 항 중에서 한 개씩 반드시 선택 $\Leftrightarrow$ ① n개의 자리에 a가 3번 나왔다면 b는 몇 번 나올까? ② n개의 자리에 a가 r번 나왔다면 b는 몇 번 나올까? ③ ①의 경우는 총 몇 가지인가? ④ ②의 경우는 총 몇 가지인가? ⑤ ③을 기호로 표현하면? ⑥ ④를 기호로 표현하면?

<표 3> 이항정리 개념 형성 과정

한편, 이산수학 교과서 조합 단원에서 다음과 같이 기술한 부분이 있다.

정호는 10개의 ○, × 문제를 각 문제마다 임의로 ○, ×를 써서 답을 해 보기로 하였다. 임의로 답을 적었을 때, 모두 틀리는 경우, 한 문제만 맞는 경

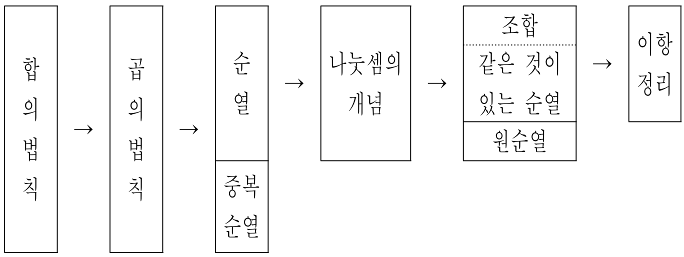
우, …, 열 문제 모두 맞는 경우가 있을 수 있다. 이 모든 경우의 수의 합은 얼마인가?
10개의 문제 중에 r개의 문제를 맞힐 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_r$이므로 위의 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}$이다.
한편, 각 문제는 맞거나 틀리는 2가지 경우가 있으므로 곱의 법칙에 의하여 10문제를 답하는 모든 경우의 수는 2^{10}이다. 그러므로
${}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}=2^{10}$이다(이산수학, p. 24)

이 문제는 조합과 중복순열의 관계적 이해와 논증적 사고를 요구하고 있다. 이 부분을 수학 I 에서는 $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^r$에 $x=1$을 대입하여 증명하고 있다. 즉, 조합과 중복순열과의 호환에 이항정리를 활용하여 의미론적인 부분을 대수적이고 형식적으로 증명하고 있다. 이처럼 이항정리는 순열과 조합 단원 내에서는 각 개념의 형식적인 면과 비형식적인 면을 연결하는 통로로 사용되면서 확률과 미분 또는 적분에서도 유용하게 활용되고 있다.
확률에서는 확률변수 X가 이항분포를 이루고 있을 때, 다음과 같이 이항정리를 활용한다. n번의 독립시행을 했을 때 1번 시행할 때마다 사건 A가 일어날 확률을 p(사건 A가 일어나지 않을 확률은 $1-p$)라고 하자. 이때, 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 하면 X에 대한 확률분포표를 만들고 확률의 합이 1이어야 한다는 의미론적인 부분을 이항정리를 활용하여 명확히 하고 있다. 그리고 'X가 이항분포를 이룬다' 고 기술하고 있는데, '이항분포'라는 용어는 확률변수 X의 확률 $P(X=x)$을 나타낼 때 사용되는 조합 기호, 확률의 합 계산과 관련하여 사용된 용어이다. 또한 미분과 적분에서는 $(1+x)^n=\sum_{r=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_r x^r$을 미분하고 적분하여 조합의 합으로 이루어진 식을 간단히 표현하고 있다. 이처럼 이항정리는 사칙연산의 개념을 넘어서 순열, 조합, 같은 것이 있는 순열, 중복순열, 미분, 적분, 확률의 형식적 요소와 비형식적 요소를 아우르는 종합적인 측면을 갖고 있다.

3. '순열과 조합'의 개념 흐름도

대부분의 수학 교과서는 순열과 조합 단원을 '경우의 수→순열→원순열→중복순열→같은 것이 있는 순열→조합→이항정리'의 순서로 전개하고 있다. '경우의 수'의 특별한 경우로 순열, 원순열, 조합 등을 다루고 있으며, 각각의 개념을 순열에서 출발하여 카티션 곱과 측정 나눗셈을 개념 등 다양한 사칙연산의 개념을 활용하고 있다. 즉, 카티션 곱을 활용하여 순열의 수와 중복순열의 수를, 측정 나눗셈의 개념을 활용하여 순열에서 원순열과 조합, 같은 것이 있는 순열의 수를 유도하고, 마지막으로 이항정리에서 순열과 조합을 형식적으로 완성하고 있다. 이 때,

개념발생적 측면과 수세기의 형식화 측면에서 순열과 조합의 제시 순서에 대한 의문점이 생긴다. 이에 대해서 수세기의 형식화 측면에서 순열의 기호가 조합의 기호보다 먼저 제시되는 것이 더 용이하다고 했다. 개념발생적 측면은 서로 다른 n개 중에서 r개를 순서대로 배열하는 경우의 수 ${}_n\mathrm{P}_r$에는 이미 r개를 고르는 조합의 개념이 내재되어 있다는 것이었다. 이러한 개념발생론적 측면에서의 순열과 조합 사이의 표현은 ${}_n\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r \cdot r!$이었다. ${}_n\mathrm{C}_r$의 기호가 ${}_n\mathrm{P}_r$보다 먼저 제시되었을 때의 문제점은 형식화에 있었다. 즉, ‘경우의 수’에서 제시한 곱의 법칙과 합의 법칙 이상의 개념 즉, 측정 나눗셈의 개념을 활용해야 하는 것이다. 따라서 ${}_n\mathrm{C}_r$의 기호를 ${}_n\mathrm{P}_r$보다 먼저 제시하고자 한다면, ‘경우의 수’에서 측정 나눗셈 개념 활용에 대한 내용이 추가되어야 할 것이다. 이와 같은 흐름은 학생들에게 체계적인 이해와 의미 있는 접근을 유도하여 단순한 암기에서 벗어나 이해를 바탕으로 한 주어진 문제의 상황에 맞게 적용할 수 있을 것으로 기대된다.



<그림 1> 순열과 조합의 개념 흐름도

Ⅳ. 결론 및 제언

순열과 조합은 기하학과 더불어 인간의 삶 속에서 지속적으로 발전해 온 원초적이고 필수적인 분야이다. 순열과 조합의 기초 활동인 수세기는 인간의 일상 속에 살아있는 수학 활동이고, 수세기의 대부분이 초등수학에서 다루어지고 있다. 그럼에도 불구하고 순열과 조합은 교사와 학생 모두 교수·학습에 어려움을 겪고 있는 단원 중의 하나로 분류되고 있다(김원경 외, 2006). 따라서 순열과 조합에 대한 연구가 꾸준히 이루어져 왔으나 수세기를 통한 근본적 고찰은 거의 이루어지지 않고 있다. 이에 본고에서는 ‘수세기’를 통한 순열과 조합의 고찰을 통해서 수세기의 개념이 어떻게 활용되고 있으며, 수세기의 형식화인 사칙연산이 비형식적 상황의 형식화에 어떤 역할을 하는지를 살펴보았다. 그 결과 순열과 조합에서 사용되는 ‘수’는 농도수이며, 따라서 형식화 과정에서 묶음 모델이 주로 활용된다는 것을 알 수 있었다. 또한 순열과 조합의 개념 발생적 순서와 형식적 기호 제시 순서가 뒤바뀌어 있음을 확인하고, 개념 발생적 측면보다는 수세기 형식화의 측면에서 순열이 조합보다 먼저 제시되어야 한다고 했다. 또한

수세기 형식화의 관점에서 보았을 때 측정 나눗셈의 개념이 매우 중요하며 측정 나눗셈 개념의 결여가 순열과 조합 단원의 이해에 영향을 줄 수 있음을 알 수 있었다. 또한, '수세기'라는 비형식적 상황이 형식화 되어 가는 순열과 조합 단원에서 이항정리는 형식화의 최종단계에 있음을 알 수 있었다.

수세기를 통한 순열과 조합의 이해는 다음과 같이 세 가지로 요약할 수 있다.

첫째, 순열과 조합의 비형식적 상황의 형식화 과정에서 수세기 형식화 과정이 매우 중요하다는 것이다. 순열에서 조합을 유도할 때 측정 나눗셈의 개념이 형식화 과정에서 매우 중요하며, 원순열에서는 $(n-1)!$과 $\dfrac{n!}{n}$이 함께 사용되지만 그 의미는 다르게 해석된다고 했다. 또한 조합과 같은 것이 있는 순열은 같은 구조이지만, 다른 문제 유형을 가지고 있는 예로 조합과 같은 것이 있는 순열을 다루고 있었다.

둘째, 이항정리에 대해서는 이항정리가 교과서 전개상 순열(같은 것이 있는 순열, 중복 순열, 원순열), 조합의 각 개념을 연결하는 다리 역할을 하고 있으며, 미분과 적분, 확률 등 다른 수학 분야에 다양하게 활용되고 있음을 알 수 있었다. 또한 이항정리는 각 분야에서 비형식적 요소를 형식적으로 명확하게 해주는 역할을 한다고 보았다.

셋째, 순열과 조합의 개념 흐름을 살펴보면서 순열의 개념에는 이미 n개 중에서 r개를 선택하는 조합의 개념이 내재되어 있으며 따라서 개념 발생적 측면에서 조합의 기호가 먼저 제시되어야 한다고 했다. 그러나 현행 교과서들은 수세기의 형식화 측면에서 순열을 조합 먼저 제시하고 있다고 했다. 만약 개념발생적 측면에서 조합이 순열보다 먼저 제시되려면, 경우의 수에서 합의 법칙, 곱의 법칙과 더불어 나눗셈의 개념도 다루어야 한다고 했다.

한편, 김원경 외(2006)는 교사의 수학 내용적 지식에 따라 교육과정의 운영과 수업방식에 차이가 날 수 있다고 주장하였다. 즉, 교사는 수업 또는 평가방식이 학생에게 미칠 수 있는 영향을 고려하여 자신의 지식체계와 사고양식에 대해 숙고(熟考)할 필요가 있다는 것이다. 따라서 어떤 단원에서든 학생과 교수방법에 대한 관심 이전에 그 단원의 근본적인 핵심 개념에 대한 이해가 선행되어야 한다(Bruner, 1960). 일찍이 브루너는 어떠한 지식이든지 누구에게나 가르칠 수 있다는 전제를 과감히 제시하였다. 이런 주장이 단순히 전달되는 것에 불과하다면 성공적인 교수 학습이 일어난다고 볼 수가 없다. 의미있는 학습에는 교사의 확실한 지식과 더불어 특정 수학개념의 흐름도를 파악하고, 학습자를 잘 파악하는 가운데 이들의 지식 네트워크까지 고려하여 전달할 때 브루너의 주장은 의미 있게 우리에게 영향을 미친다고 할 수 있다.

참고문헌

[1] 김서령 · 박혜숙 · 김완순. 조합문제에서의 인식론적 장애. <u>수학교육</u> 46 (2) (2007), 193-205.
[2] 김진호. 비형식적 수학적 지식과 형식적 수학적 지식의 결합에 관한 소고. <u>학교수학</u> 4 (4)

(2002), 555-563.
[3] 박두일 외 (2002). 고등학교 수학Ⅰ. 서울 : (주)교학사.
[4] 이지현・이정연・최영기. 순열 조합 문장제의 문제 변인과 오류 분석. 학교수학 7 (2) (2005), 123-137.
[5] 이지화 (2005). 학습도구를 활용한 순열과 조합의 지도에 관한 연구. 단국대학교 교육대학원 석사학위 논문.
[6] 이주영・김서령・박혜숙・김완순. 조합문제 사이의 구조적 동형. 수학교육 45 (1) (2006), 123-138.
[7] 이종욱. 한 초등학교 2학년 아동의 곱셈과 나눗셈 해결 전략에 관한 사례 연구. 수학교육 46 (2) (2007), 155-171.
[8] 윤대원・김은주・유익승. 조합적 논증을 이용한 문제해결에 대한 연구. 수학교육논문집 20 (3) (2006), 373-389.
[9] 조태근・임성모・정상권・이재학・홍진곤. 고등학교 수학Ⅰ. 서울:(주)금성출판사.
[10] 정영옥. 네덜란드의 초등 수학 교육과정에 대한 개관: 자연수와 연산영역을 중심으로. 학교수학 7 (4) (2005), 403-425.
[11] 최상기 외 (2002). 고등학교 수학Ⅰ, 서울:(주)고려출판사.
[12] 최용준 외 (2002). 고등학교 수학Ⅰ, 서울:(주)천재교육.
[13] 황우형・김경미. 자연수의 사칙연산에 대한 아동의 이해 분석. 수학교육 47 (4) (2008), 519-543.
[14] Batanero, C, Navarro-Pelayo, V. & Godino, J. D. Effecy of the Implicit Combinatorial Model on Combinatorial Reasoning in Secondary School Pupils, *Educational Studies in Mathematics* 32 (1997), 181-199.
[15] Bruner, J. S. (1960). The Process of Education. Cambridge: Harvard University Press.
[16] Carpenter, T. P., Ansell, E., Franke, K. L., Fennema, E., & Weisbeck, L. Models of problem solving processes. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24 (1993), 428-441.
[17] Fischbein. E., Deri, M., Nello, M. S., & Merino, M. S. The role of Implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16 (1985), 3-17.
[18] Freudental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.
[19] Ginsburg, H. P., & Asmussen, K. A. (1988). Hot mathematics. In. G. B. Saxe & M, Gearhart (Eds.), *Children's Mathematics.* New Directions for Child Development, Monograph No. 41. San Francisco: Jossey-Bass.
[20] Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws

(Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Inchul Jung
Department of Mathematics Education
Korea University
Anam-dong Seongbuk-gu, Seoul, 136-701 Korea
E-mail address: ijung@korea.ac.kr