East Asian Mathematical Journal
Vol. 25 (2009), No. 3, pp. 229-245

칸토르와 관련된 주제를 활용한 고등학교 수학영재 교육방안

백 인 수

ABSTRACT. G. Cantor gave a deep influence to the society of mathematics in many ways, especially in the set theory. It is important for gifted and talented high school students in mathematics to understand the Euler constant and the fractal dimension of the Cantor set in a heuristic sense. On the historic basis of mathematics and the standard of high school students, we give the teaching method for the talented high school student to understand them better. Further we introduce the Riesz-Nágy-Takács distribution and its first moment. We hope that from these topics, the gifted and talented students in mathematics will have insight in the analysis of mathematics.

I. 서론

L.J. Sheffield는 수학을 배우는 학생(mathematics students)을 illiterates - doers - computers - consumers - problem solvers - problem posers - creator와 같은 여러 단계(hierarchy)로 나누었는데, 수학영재(gifted and talented student in mathematics)란 문제해결자(problem solver), 문제발견자(problem poser) 및 창조자(creator)의 단계에 해당한다고 주장한다([15]). 이때 "개체발생은 계통발생을 반복한다(Ontogeny recapitualtes phylogeny)."는 주장을 한 유명한 생물학자 E. Haeckel(1834-1919)의 논리에 따르면, 그 계통발생의

2009년 5월 투고, 2009년 9월 심사 완료.
2000 Mathematics Subject Classification: 97D50
Key words: G. Cantor, talented high school students, Euler constant, fractal dimension, RNT distribution

마지막 단계는 창조자란 말이 된다. 우리는 칸토르(Georg Cantor;1845-1918)라는 수학 역사속의 한 인물을 통해서 이러한 창조자를 만날 수 있다.
우리는 장자의 내편에서 다음과 같은 이야기를 주목한다.

숙(儵)과 홀(忽)은 남해와 북해의 임금이다. 혼돈(渾沌)은 耳目口鼻(눈, 코, 입, 귀)에 있는 일곱 구멍이 없는 중앙의 임금이다. 숙과 홀은 혼돈의 집에 놀러가서 늘 융숭한 대접을 받자, 감사의 표시로 논의 끝에 혼돈의 일곱 구멍을 뚫어주게 된다. 그러자 7일 만에 혼돈은 죽어버렸다(南海之帝爲儵 北海之帝爲忽 中央之帝爲渾沌 儵與忽 時相與遇於渾沌之地 渾沌待之甚善 儵與忽謀報渾沌之德 曰 人皆有七竅 以視聽食息 此獨無有 嘗試鑿之 日鑿一竅 七日而渾沌死 (莊子 內篇 應帝王)).

이 이야기를 해석하는 방법은 고금을 통해 여러 가지가 있을 수 있지만, 다음과 같이 해석하고자 한다. 혼돈은 현재를 의미한다. 현재는 과거(숙)의 지식과 미래(홀)의 가능성 사이에서 생각하고 고민하는 학생이라고 볼 수 있다. 교사(teacher)는 학생들이 진정 창조자(creator, problem poser)가 되기를 원한다면 그들에게, 마치 숙과 홀이 그랬던 것처럼 혼돈에게 일곱 구멍을 뚫어 혼돈을 죽이는 일이 없도록 해야겠다. 즉, 학생들이 충분히 생각하고 스스로 새로운 것을 창조하도록 길을 열어주고 참는 것이 필요하다. 그들에게 기존의 공식(일곱 구멍)을 강요하고 생각하는 틈을 주지 않는 일이 없도록 해야겠다는 말이다([8, 9]). 즉 수학영재학생들에게는 폴리아(George Pólya;1887-1985)가 주장하는 자기 발견적(heuristic) 문제해결 지도법이 창조자(creator)를 키우는 좋은 교수법이라 할 수 있다.
필자가 창조자라고 생각되는 칸토르도 처음에는 문제해결자의 길을 걷고, 마침내는 창조자의 길을 걸었다는 사실은 시사하는 바가 크다. 위대한 예술가인 피카소(Pablo Picaso;1881-1973)도 처음부터 독창적인 입체파(창조자)가 아니고 사실적인 그림(문제해결자)에 충실했다는 사실에 또한 주목한다.
이 논문에서는 고등학교 수학 영재 학생들이 창조자가 되는 데 도움을 줄 수 있는 해석학 분야에 관련된 주제로서 칸토르의 업적과 관련 있는 오일러 상수(Euler constant) 및 프랙탈(fractal, [7,11])을 논하고자 한다. 나아가 고등학교 최상위(top hierarchy)의 수학 영재 학생들에게 프랙탈의 자기상사성(self-similarity)([7, 11, 17])을 이용한 역사적인 배경을 지닌 특이함수(singular function, [16, 19])를 소개함으로써 미적분뿐만 아니라 미적분과 확률통계에서 등장하는 분포함수(distribution function) 사이의 연결고리를 스스로 발견할 수 있는 기회를 제공하고자 한다.

Ⅱ. 본론

1. 역사적 배경

과학에 있어서 분류(classification)는 중요한 도구이다. 주어진 대상을 잘 분류할 수 있다면 그 대상을 잘 이해하는 것이다. 0도 세분할 수 있는가? 무한대도 세분할 수 있는가? 이러한 질문을 학생들이 받는다면 학생들은 의아해 한다. 신용불량자 중에도 신용을 회복할 가능성이 없는 사람이 있고, 부자 중에서도 진짜 부자인 갑부가 있는 이치와 같다. 이와 같이 王中王의 이치처럼 0 중의 0 및 무한대 중의 무한대가 있다는 사실을 학생들에게 말한다면, 수학영재 학생들에게 수학의 원리(철학)를 심어줄 수 있는 좋은 기회가 될 것이다. 수학은 수를 이용한 철학이라고도 할 수 있고. 지금까지 알고 있던 것을 완전히 파괴시키는 혁명적인 것, 즉 창의적인 것을 추구하는 학문이 바로 수학이라고도 할 수 있다. 전술한 바와 같이, 수학의 연구는 크게 나누어 문제를 푸는 것과 새로운 것을 만드는 것으로 나눈다고 한다([20]). 문제 해결의 귀재가 오일러(Leonhard Euler;1707-1783) 및 에르디쉬(Paul Erdős;1913-1996)였다면, 새로운 것을 개척한 귀재는 칸토르(Cantor)가 아닌가 한다.

1870년대는 수학 역사상 매우 중요한 10여년이었다. 칸토르는 그의 선배인 하이네(H. Heine;1821-1881)로부터 받은 open problem인 삼각함수로 함수를 유일하게 표현할 수 있다는 사실을 증명하였다. 이 문제는 그 당시 하이네뿐만 아니라 디리클레(Dirichlet), 립쉬츠(Lipschitz), 리만(Riemann)에 의해서도 시도되었지만 풀리지 않았던 어려운 문제였다. 1870년과 1872년 사이에 발간된 이 논문은 그의 스승인 바이엘슈트라스(Weierstrass)의 영향을 극명하게 보여주는데 칸토르도 처음에는 문제를 푸는 쪽에 서 있었던 셈이다.

이러한 영향으로 1872년 당시 27세의 칸토르는 독일 할레(Halle) 대학의 교수로 임명되었고, 같은 해에 스위스에서 만난 데데킨트(R. Dedekind;1831-1916)와 교분을 쌓기 시작했다. 그 해 무리수를 수렴하는 유리수열의 극한으로 정의함으로써 실수를 정의했으며, 데데킨트는 같은 해에 데데킨트 절단(Dedekind cut)을 사용하여 실수를 정의하는 방법을 고안하였다. 이때 데데킨트가 칸토르의 무리수 정의 방법을 참고문헌으로 사용했다는 것은 칸토르의 방법이 데데킨트의 방법보다 빨랐다는 것을 의미한다. 1873년 칸토르는 유리수 집합의 원소 개수가 가산적(countable)이며, 이어서 대수적 수(algebraic number)도 가산적이라는 사실을 밝혔다. 그리고 1874년 실수 집합의 원소 개수가 비가산적(uncountable)이라는 사실을 밝힘으로써, 1851년 루빌(Liouville)이 그 존재성(0.110001000000000000000000010000⋯(모든 자연수 n에 대해 $n!$에 1이 나타나는

소수)는 초월수임을 증명)을 밝힌 정수 계수를 갖는 다항식의 해(대수적 수)가 아닌 초월수(transcendental number) 집합의 원소 개수가 비가산적임을 밝히게 되었다. 이때 처음으로 일대일 대응(1-1 correspondence)이라는 개념이 암묵적으로(implicit) 등장하게 되었다. 즉 20여년 후 "거의 모든" 실수가 초월수임을 밝힌 셈이 된다([12]). 이때부터 칸토르는 새로운 영역을 개척하는 쪽으로 그 방향을 바꾸게 된다.

여기서 "거의 모든(almost all)"이라는 말은 무한의 종류를 또 다시 세분하는 말이기 때문에 매우 중요하다. 이러한 시도는 루베그(Henri Lebesgue; 1875-1941)에 의해서 (1901년)(정수 차원의) 루베그 측도(measure)로써 다시 조명된다. 즉, 가산적인 집합은 루베그 측도가 0이 되는 소위 thin set가 된다. 이러한 thin set는 1918년 하우스돌프(Felix Hausdorff;1868-1942)에 의해 (양수 차원의) 하우스돌프 측도(measure)로써 다시 조명된다. 여기에서 소위 하우스돌프 차원이라는 임계점이 탄생되며, 이것이 바로 프랙탈 차원의 효시가 된다. 이러한 이론은 칸토르의 이론만이 수학을 지배하는 것은 아니라는 반증이기도 하다. 지구에서만 통용되는 뉴턴의 만유인력이론을 우주에서도 통용되도록 더욱 일반화한 아인슈타인(Einstein)의 상대성이론이 물리학을 지배하듯이, 수학에서도 같은 이치가 적용되고 있다. 그러나 상대성이론이 만유인력이론을 바탕으로 생각될 수 있듯이, 칸토르의 이론이 뒷받침이 되지 않았다면 이러한 새로운 수학의 이론이 탄생할 수 없었다는 이치를 간과해서는 안 된다.

이러한 1870년대의 칸토르에 의한 집합의 연구가 바로 수학에서 가장 중요한 부분을 차지하는 현대적 집합론의 출발점이 된다.

2. 칸토르 집합

주어진 집합이 무한과 연결된다면, 그 주어진 집합의 원소의 개수가 유한이 아닌 무한이라는 생각과 함께, 그러한 무한은 다시 세분할 수 없는가? 하는 새로운 의문에 부딪힌다. 이러한 의문의 해답은 어떤 기준, 즉 측도(measure)에 의해 그 집합의 길이(또는 넓이, 부피)가 유한인지 아니면 무한인지 하는 의문일 것이다.

즉 무한집합이라는 것은 원소 하나하나를 셈하는 가산측도(counting measure)에 의한 무한과 그 집합 전체 길이를 재는 측도에 의한 무한이 있게 된다. 가산측도에 의한 첫 번째 무한집합은 보통 가산집합(countable set)이라고 한다. 이러한 가산(countable) 무한보다 더 큰 무한을 비가산(uncountable) 무한집합이라고 한다. 이러한 비가산 무한집합 중 루베그 측도가 0인 집합이 바로 칸토르 집합이다. 이러한 루베그 측도가 0인 집합도 하우스돌프 측도(새로운 기준, 새로운 자)를 만나면 다시 또 나눌 수 있게 된다.

(1) 가산 무한집합 : 가산 측도에 의해 무한대, 루베그 측도에 의해 0, 양수 차원 하우스돌프 측도에 의해 0

(2) 칸토르 집합 : 가산 측도에 의해 무한대, 루베그 측도에 의해 0, log2/log3 차원 하우스돌프 측도에 의해 1(1/2차원 하우스돌프 측도에 의해 무한대, 3/4차원 하우스돌프 측도에 의해 0 ([11]))

3. 고등학교 수학영재학생의 지도내용

칸토르에 대한 위와 같은 배경을 가지고 자기발견적(heuristic) 문제를 통하여 고등학교 수학영재들을 지도할 내용을 살펴보자.

1) 실수의 소수 표현에서 볼 수 있는 실수의 LUB(least upper bound) 성질

우리가 무리수 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$ 또는 $\pi=3.141592\cdots$로 자유롭게 쓰고 있는 것은 칸토르의 무리수를 유리수의 극한으로 표현하는 방법에 의해서이다([6]). 즉 유계이고 증가하는 수열(bounded increasing sequence)은 실수값에 수렴한다는 사실로부터 나온다(LUB 성질과 동치, [10]).

이것을 응용하면 오일러 상수(Euler constant)의 존재성을 알 수 있다.

[문제 1] $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\mathrm{n}})-\log_e n$ (=오일러 상수 γ) 이 존재함을 증명하여라.

(증명) $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$이라고 두자. 그러면

$$z_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n})-\log_e n=x_{n-1}+\frac{1}{n}-\log_e n=y_{n-1}+\frac{1}{n}$$

이 된다. 단, 여기서 $y_n=x_{n-1}-\log_e n$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이므로 이제, $\lim_{n\to\infty}y_n$이 존재한다는 것을 증명하면 된다.

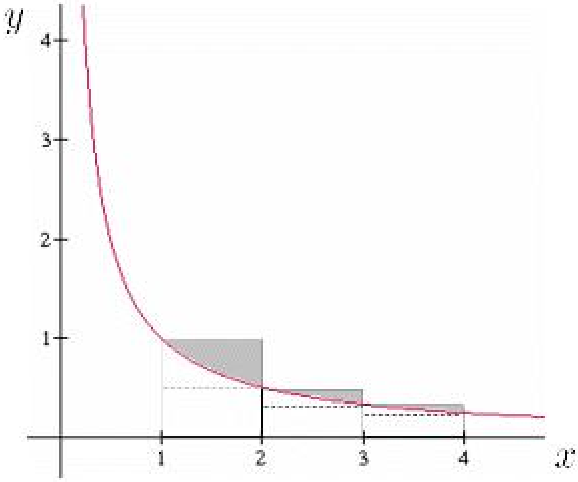
이제, $\frac{1}{4}\le y_n\uparrow\ \le 1$ (단, $n\ge 2$)임을 이용하여 증명하려고 한다.

$y=\frac{1}{x}$의 그래프를 이용하면, $x_{n-1}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}$은 가로가 1인 직사각형의 넓이의 합이고 $\log_e n=\int_1^n\frac{1}{x}dx$ 은 그 아래에 놓인 도형의 넓이이다. 따라서

$$\frac{1}{4}\le y_n\uparrow\ \le(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})=1-\frac{1}{n}\le 1$$

이다(단, $n \geq 2$).

<참고1> 함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 및 사각형 안의 음영 부분의 넓이의 합을 제공하는 그림1을 학생들에게 힌트로 제공하고, 스스로 문제를 풀게 하는 것이 가장 효과적인 방법이다.



<그림 1> $y=\frac{1}{x}$의 그래프

<참고2> 오일러 상수 γ의 값은 0.57721 56649 01532 86060 65120 90082 40243 10421 59335 93992…이다.

[보조문제] $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\log_e 2$이다.

(힌트 : $\int_0^{1^-}\frac{1}{1+x}=\int_0^{1^-}(1-x+x^2-x^3+\cdots)$

$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots|_{x=1^-}$)

[연습문제] $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$임을 증명하여라.

(힌트 : $(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2}$)

<참고1> 이 문제를 지도하기 위해서는 역함수의 미분을 알아야 한다. 간단히

$y=3x$의 기울기, 즉 미분은 $dy/dx=3$이므로 그 역함수의 미분은 $dx/dy=1/3$이다. 즉, 그 역수 $1/3$이 바로 $y=x/3$의 미분임을 패턴을 통해서 알게 한다. 즉, 미분은 기울기임을 강조한다.

더 나아가 함수 $y=x^2$ 그래프 위의 점 $(a,b)=(3,9)=(x,y)$에서 기울기, 즉 미분은 $2x=2a=6$이다. 따라서 역함수 $y=\sqrt{x}$ 그래프 위의 점 $(b,a)=(9,3)=(x,y)$에서의 기울기는 역수 $1/6=1/2a=1/2y$이다. 즉 $y=\sqrt{x}$의 미분은 $1/2y=1/2a=1/6$이다.

수학영재학생에게는 공식이 아닌 느낌으로서 그 원리를 이해시키는 것이 중요하다. 미분이 국소적인 기울기임을 설명하면 미분의 뜻을 쉽게 이해할 수 있을 것이다.

<참고2> $y=\tan x$에서 $1+y^2=1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$이고

$$\tan' x=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$ 이므로, $y=\tan^{-1}x$에서

$$(\tan^{-1}x)'=\frac{1}{\tan' y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+x^2}$$

이다. 이것은 $x=\tan y$이므로 $\cos^2 y=\dfrac{1}{1+x^2}$이기 때문이다.

[문제 2] $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$의 값을 구하여라.

(풀이) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값을 구하면 된다. 먼저,

$$t_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\pm\frac{1}{n}$$

이라고 두자. 그러면

$$t_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$$

이다. 여기서

$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$$

이라고 하자. 그러면

$$s_{2n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}$$

이다.

이제 $s_{2n}-t_{2n}=s_n$임을 쉽게 알 수 있다. 즉, $s_{2n}-s_n=t_{2n}$이 된다. 따라서 위의 [보조문제]에 의해

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n}-s_n)=\lim_{n\to\infty}t_{2n}=\log_e 2$$

이다.

<참고1> [문제 2]는 [문제 1]로부터 아주 쉽게 구할 수 있다.

[문제 1]의 풀이에서 사용한

$$z_n=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n})-\log_e n$$

을 사용해서 $u_n=z_{2n}-z_n$으로 두면 된다.

이 경우 $\lim_{n\to\infty}z_n=\gamma$ 라고 두면,

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(z_{2n}-z_n)=\lim_{n\to\infty}z_{2n}-\lim_{n\to\infty}z_n=\gamma-\gamma=0$$

을 얻는다.

한편

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}=u_n+\log_e 2$$

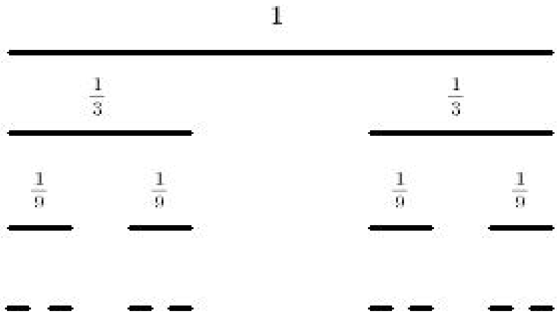
이므로 동일한 극한값을 얻는다.

<참고2> [문제 2]는 [문제 1]에서 자연스럽게 도출된다. 곧 다루게 될 Riesz-Nágy-Takács(RNT) 함수([19])와 관련있는 Viader 등([16])의 참고문헌 [14]에도 [문제 2]와 유사한 문제가 있음을 유의한다.

2) 칸토르 집합의 차원

위에서도 언급하였지만, 칸토르 집합은 비가산적인 루베그 측도가 0인 집합이다. 즉, 자연수의 집합보다 더 많은 원소를 갖고 있는 집합이다. 이때의 기준은 자연수의 집합이다. 그러나 루베그 측도의 값이 0이므로 thin set가 되었다. 이때의 기준은 루베그 측도이다. 그러나 이러한 thin set들도 다시 나눌 수가 있다. 그것은 새로운 기준 log2/log3 차원 하우스돌프 측도에 의해서이다. 이때의 log2/log3 차원 하우스돌프 측도값은 1이다. 즉 칸토르 집합의 하우스돌프 차원은 log2/log3이다. 그러나 비록 수학영재학생들이라고 하더라도 고등학교 학생들에게 이러한 것을 가르치기에는 너무 어렵다([2, 4]). 따라서 다음과 같은 유사 하우스돌프 차원인 box 차원을 고려하면 그 아이디어를 고스란히 보존하면서도 프랙탈 차원을 설명하는 셈이 된다. 먼저 루베그 측도가 0이 됨을 설명한다.

[정의] 전체의 중앙의 1/3씩을 계속 잘라내서 만든 도형을 칸토르 집합 (classical ternary Cantor set)이라고 정의한다([2, 7, 11]).



<그림 2> 칸토르 집합

[문제 3] [0,1]의 길이는 1이다. 칸토르 집합의 길이는 얼마인가?

(풀이) 중간에 없어진 구간의 합을 1에서 빼면 된다. 그러면

$$1-(1/3+2/9+4/27+\cdots)=1-(1/3)/(1-2/3)=1-1=0$$

이 된다.

<참고> 칸토르 집합을 구성하는 단계별 구간(interval)의 길이에 log2/log3 제곱을 해서 더하면, 단계에 관계없이 그 합이 1이 된다. 이것이 칸토르 집합의 log2/log3 차원 하우스돌프 측도값이 1인 이유이다. 이때, 1/2 제곱을 해서 더하면, 단계가 커질수록 즉 그 구간의 길이가 점점 짧아질 때 그 합이 무한대로 가고, 3/4제곱을 해서 더하면 단계가 커질수록 즉 그 구간의 길이가 점점 짧아질 때 그 합이 0에 가까이 간다. 이러한 원리가 앞에서 말한 1/2차원 하우스돌프 측도에 의해 무한대, 3/4차원 하우스돌프 측도에 의해 0인 것을 의미한다. 한편, [문제 3]은 칸토르 집합이 1차원 하우스돌프 측도(=1차원 루베그 측도)에 의해 0이 되는 원리이다.

<참고> n 차원 루베그 측도는 n 차원 유클리드 공간 내의 집합에서만 측정하지만, 양수 차원 하우스돌프 측도는 그러한 제약이 없다.

[정의] 도형을 덮는(도형과 만나는), 눈금이 ϵ인 가장 적은 그물의 개수를

$N(\epsilon)$이라할 때, 그 도형의 box 차원은 $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon}$이 존재하면 그 값으로 정의한다.

[예제 1] 한 변의 길이가 1인 정사각형 $[0,1] \times [0,1]$의 box 차원은 2임을 보여라.

(증명) $N(\frac{1}{k}) = k^2$이므로

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\frac{1}{k})}{-\log \frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log k^2}{\log k} = 2$$

이다.

[연습문제] 한 변의 길이가 1인 정육면체 $[0,1] \times [0,1] \times [0,1]$의 box 차원은 3이다.

[연습문제] [0,1]의 box 차원은 1이다.

<참고> 이상으로부터 box차원은 상식적인 차원(topological dimension)과 일치한다.

[문제 4] 칸토르 집합의 box 차원을 구하여라.

(풀이) $N(\frac{1}{3^k}) = 2^k$이므로

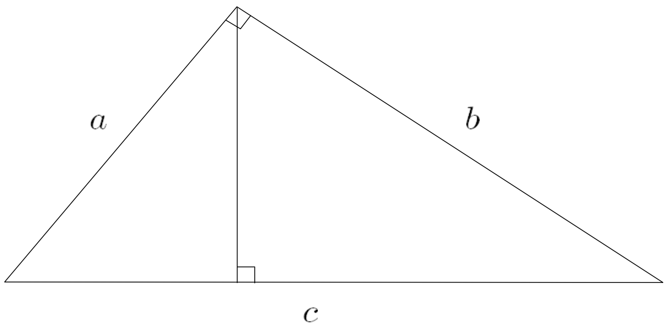
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(\epsilon)}{-\log \epsilon} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log N(\frac{1}{3^k})}{-\log \frac{1}{3^k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\log 2^k}{\log 3^k} = \frac{\log 2}{\log 3}$$

이다.

[연습문제] 전체의 중앙의 1/2씩 잘라낸 이진법적 칸토르 집합 binary Cantor set의 box 차원은 1/2=log2/log4 이다.

<참고> binary Cantor 집합 K를 4배로 하면, 즉 $4K$를 생각하면 두 개의 동일한 binary Cantor 집합 K를 얻을 수 있다. 바꿔 말하면, 다음의 배

율법칙(scaling law)을 얻는다. 즉 1/2차원 하우스돌프 측도를 $H^{1/2}$라고 두면, $H^{1/2}(4K) = 4^{1/2}H^{1/2}(K) = 2H^{1/2}(K) = 2\times 1 = 2$를 얻는다. 이러한 하우스돌프 차원의 배율법칙을 이용하면 피타고라스 정리도 증명할 수 있다.



<그림 3> 직각 삼각형

그림 3과 같이, 밑변이 a이고 높이가 b이고 빗변이 c인 직각삼각형을 직각을 꼭지점으로 하는 점에서 대변에 수선을 내려서 닮음인 두 개의 직각삼각형으로 나누자. 그러면 두 직각삼각형의 넓이의 합은 전체 직각삼각형의 넓이와 같다. 즉 원래 직각삼각형 T의 하우스돌프 차원은 2이고, 두 직각삼각형은 각각 $\frac{a}{c}T$, $\frac{b}{c}T$로 볼 수 있다. 따라서

$$H^2\left(\frac{a}{c}T\right) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 H^2(T) \text{ 및 } H^2\left(\frac{b}{c}T\right) = \left(\frac{b}{c}\right)^2 H^2(T)$$

을 얻는다. 한편, 이 두 도형의 2차원 하우스돌프 측도값의 합은 $H^2(T)$이므로

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 H^2(T) + \left(\frac{b}{c}\right)^2 H^2(T) = H^2(T)$$

을 얻는다. 따라서 $a^2 + b^2 = c^2$을 얻게 된다. 이 증명의 아이디어는 아인슈타인이 어릴 때 증명한 방법으로 알려져 있다. 이 모두는 s-차원 하우스돌프 측도에 대해, 배율법칙 $H^s(\lambda K) = \lambda^s H^s(K)$으로부터 파생된 것이다.

[연습문제] 전체의 중앙에서 $1/n$(n은 자연수)씩 잘라낸 n-ary 칸토르 집합의 box 차원은 $\dfrac{\log 2}{\log\dfrac{2n}{n-1}}$ 이다.

[연습문제] 위의 연습문제에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{\log 2}{\log\frac{2n}{n-1}}=1$이다. 무엇을 말할 수 있는가?

(답) 칸토르 집합의 중앙의 축소율 $1/n$을 0으로 점점 가까이 하면, 보통 단위구간과 같은 모습으로 가까이 간다. 이것의 box 차원은 단위구간의 box 차원인 1로 가까이 간다는 것을 알 수 있으므로, 중앙에서 축소하는 양(quantity)의 연속적인 성질을 알 수 있다. 간단히 말하면, 중앙의 축소량 $\frac{1}{n}\to 0$이면 n-ary 칸토르 집합 $\to[0,1]$이다. 이를 통해서 집합의 수렴성을 상식적으로 이해시킬 수 있다.

이상의 몇 문제를 통해 고등학교 수학영재학생을 위한 역사적 배경을 지닌 칸토르와 관련된 지도내용을 알아보았다. 아직 고등학교 교과과정에 넣기에는 다소 이른 감이 있지만, 수학영재학생에게는 앞으로 어떻게 수학을 공부할 것인가 또는 어느 방향으로 나아가야 할 것인가? 또는 자신의 위치를 돌아보는 지표가 될 수 있을 것으로 본다.

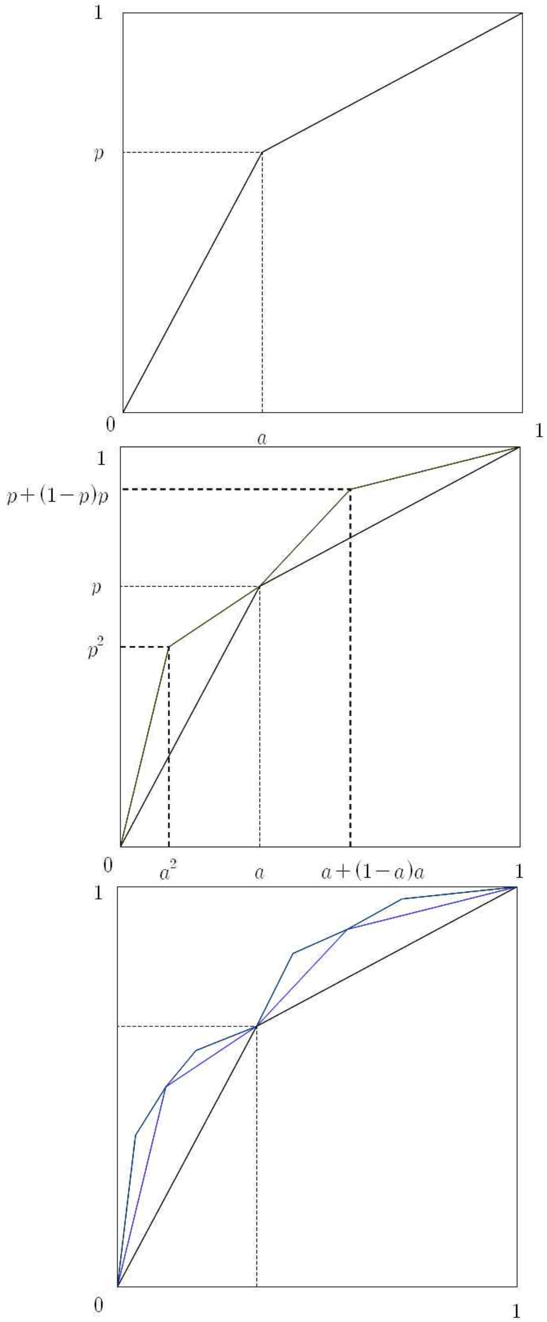
3) Riesz-Nágy-Takács(RNT) 함수([16], [19])

다음 문제들은 아주 수준이 높은 고등학교 수학영재학생에게 적합한 문제이다. 이 문제를 통하여 프랙탈 기하(fractal geometry)의 자기상사성(self-similarity)의 성질이나 해석학의 미분, 적분, 확률론의 분포함수(distribution function) 및 평균, 분산을 쉽게 계산하도록 하는 적률(moment)을 이해하고, 그러한 분포함수를 연구하면 특이함수(singular function)가 자연스럽게 등장한다는 사실들을 알려줄 수 있다. 이러한 특이 분포함수의 구성은 칸토르 집합에서 등장하는 자기상사성의 자연스러운 확장임을 학생 스스로 알 수 있도록 유도하는 것이 좋을 것이다.

[정의] 그림4는 3단계까지의 RNT 함수 그래프의 구성에 관한 그래프이다. 이와 같이 무한단계까지 계속해서 얻은 그래프가 RNT 함수의 그래프이고, 이것은 하나의 분포함수가 된다. 이 RNT함수는 약 50년 정도의 역사를 지닌 특이함수(singular function)이다([16]). 고등학교 수학영재학생들이 특이함수에 대해서 반드시 알 필요는 없지만, 그렇게 어렵지 않게 특이함수를 접할 수 있을 것으로 본다. 이때 그 구성에서 나타나는 자기상사성(self-similarity)을 함께 학습할 수 있는 기회를 부여할 수 있게 된다.

[문제 5] 위의 RNT 함수는 그래프의 구성에서 꺾이는 모든 점

$(a,\, a^2,\, a+(1-a)a,\, \cdots)$에서 미분이 불가능함을 설명하여라.



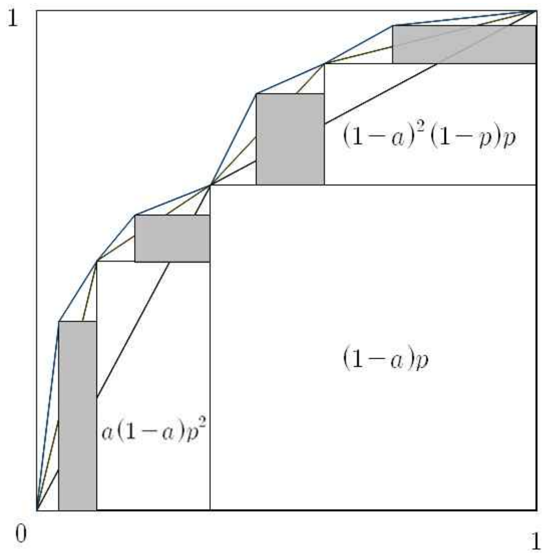
<그림 4> RNT 함수 그리는 3단계

(풀이) 좌미분은 모두 0이고 우미분은 모두 무한대이므로 미분이 존재하지 않음을 그 구성에서 쉽게 알 수 있다.

<참고> RNT 함수는 거의 모든 (루베그 측도의 의미에서) 점에서 미분가능하다([16], [19]).

[문제 6] 위의 RNT 분포함수를 F라고 할 때, $y=F(x)$의 그래프에 대해서 $\int_0^1 F(x)\,dx$의 값을 구하여라.

(풀이)



<그림 5> RNT 분포함수

그림5(제 1, 2단계에서는 그 넓이의 값을 주었으며, 제 3단계는 음영으로 처리)에서 보는 바와 같이 n단계에서 나타나는 그래프 아래의 직사각형 넓이의 합은

$$\begin{aligned} T_n = &\ (1-a)p\,[1+(ap+(1-a)(1-p)) \\ &+(ap+(1-a)(1-p))^2+\cdots+(ap+(1-a)(1-p))^n] \end{aligned}$$

이다. T_n의 극한이 $\int_0^1 F(x)\,dx$이다. 그러므로

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{(1-a)p}{1-[ap+(1-a)(1-p)]} = \frac{(1-a)p}{a+p-2ap}$$

이다.

<참고> RNT 분포함수 F의 1차 적률

$$c_1 = \int_0^1 x dF(x) = 1 - \int_0^1 F(x)\, dx$$

이다(단, 1차 적률에서 Riemann-Stieltjes 적분을 사용하였다([19])). 일반적으로 RNT 분포함수 F의 n차 적률 $c_n = \int_0^1 x^n dF(x)$은 점화식을 이용하는 등 조금 복잡하다([19]).

4. 기대효과

이상과 같은 교본으로 학생들이 묵시적으로 배우는 내용은 다음과 같다.

① 칸토르의 현대집합론 및 함수, 수열([12]) : 집합의 원소들의 개수, 현대집합론, 함수, 수열
② 무한집합과 연속체 가설 및 그 돌파구([3], [5], [12]) : 연속체 가설, 루베그 측도, 하우스돌프 측도
③ 칸토르 집합과 위상([7]) : 칸토르 집합, 위상적 차원
④ 프랙탈 차원([7], [11]) : box 차원, 하우스돌프 차원, 패킹 차원, 프랙탈 차원
⑤ 무한의 세분([12]) : 원소들의 개수, 루베그 측도, 하우스돌프 측도, 패킹 측도
⑥ 임계점 이론([12]) : 임계점, 하극한, 상극한, 하 리만합, 상 리만합([10]), 프랙탈을 더욱 세분한 다중프랙탈([7], [11]), 분포집합([7]), 분기, 역학, 혼돈([1]), 리만 스틸체스 적분, 적률([19])
⑦ 칸토르가 끼칠 장래의 비전 : 다중프랙탈을 이용한 주가의 예측([13], [18]), 무작위 프랙탈([11]), 특이함수([14], [16])
⑧ 근대수학의 역사([12]) : Euler, Goldbach, Cantor, Kronecker, Poincaré, Weierstrass, Gauss, Dedekind, Newton, Leibniz, Lebesgue, Hausdorff, Riemann, Russel, Mandelbrot, Julia, Riesz, Nágy

Ⅲ. 결론

위의 문제들은 고등학교 수학영재교육을 위한 역사적 배경을 지닌 기본적인 문제들이다. 따라서 이것을 바탕으로 하여 교사들이 직접 문제를 만들어 나갈 수 있다. 예를 들면, 오일러 상수에 관련된 문제는 테일러급수(Taylor series) 및

유사문제들로 여러 문헌([10], [14])에 잘 나와 있다. 칸토르 집합의 차원문제와 관련해서는 2차원 칸토르 집합(Cantor dust) 및 그 차원 또는 그 사영(projection) 차원 문제 등을 들 수 있다([11]). 위의 지도내용을 가능하면 학생 스스로 발견할 수 있도록 지도하면 더욱 효율적이 될 수 있다([8], [9]). 한편, RNT 특이함수의 문제는 학생들이 대학에 진학하여 최신 주제(topic)를 배울 때 생소한 기분이 들지 않고, 더 나아가 창의적으로 문제를 만들어 나가거나 창조자의 길을 가는 데 도움을 줄 것이다.

참고문헌

[1] 조한혁. 프랙탈수학과 카오스. 한국수학사학회지 8 (1)(1995), 61-68.

[2] 김수환, 김남균. 차원분열도형(Fractal)탐구를 통한 교수/학습 활동. 한국수학교육학회지 시리즈 E: 수학교육논문집 5(1997). 168-181.

[3] 박창균. Cantor의 무한관. 한국수학사학회지 10 (1)(1997) 33-38.

[4] 최정숙, 신인선. 프랙탈의 고등학교 수학교육과정에의 도입가능성에 관한 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 A 수학교육 37 (1)(1998), 115-138.

[5] 임종록, 한정순. 무한으로의 접근(칸토르를 중심으로). 한국수학사학회지 11 (1)(1998), 47-51.

[6] 백인수. 중학교 수학교육에서의 수의 이해. 외대논총 19 (4)(1999), 479-486.

[7] 백인수. 프랙탈과 다중프랙탈의 연구. Comm. Korean Math. Soc. 21 (3)(2006), 409-417.

[8] 백인수. Heuristic 지도법(발견적인 지도법)의 중요성, 경북중등수학교육연구회 소식지 제5호(2007), 3-7.

[9] 백인수. 중등수학과 해석학. 2007 중등수학 수준별 수업 직무연수(대구광역시 교육연수원) 강의교재(2007), 1-8.

[10] R. Creighton Buck(1978). Advanced Calculus. 3rd Edition, Waveland Press, Inc..

[11] K.J. Falconer(1997). Techniques in Fractal Geometry. John Wiley and Sons, Ltd., Chichester.

[12] O'Connor, John J. & Robertson, Edmund F.(1998). "Georg Cantor". MacTutor History of Mathematics archive.

[13] Xia Sun, Huiping Chen, Yongzhuang Yuan, Ziqin Wu. Predictability of multifractal analysis of Hang Seng stock index in Hong Kong. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 291(2001), 473-482.

[14] Lluís Bibiloni, Pelegrí Viader, Jaume Paradís. On a Series of Goldbach

and Euler. American Mathematical Monthly 113 (3)(2004), 206-220.
[15] L. J. Sheffield(1994). Gifted and talented mathematics students and curriculum and evaluation standards for school mathematics from council of teachers of mathematics, commissioned by the National Research Council for Gifted Education, University of Connecticut.
[16] J. Paradís, P. Viader and L. Bibiloni, Riesz-Nágy singular functions revisited. J. Math. Anal. Appl. 329 (2007), 592 - 602.
[17] I.S. Baek, L. Olsen, Snigireva. Divergence points of self-similar measures and packing dimension, Advances in Mathematics 214 (1)(2007), 267-287.
[18] Yu Wei and Peng Wang. Forecasting volatility of SSEC in Chinese stock market using multifractal analysis, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 387 (7)(2008), 1585-1592.
[19] I.S. Baek. A note on the moments of the Riesz-Nágy-Takács distribution. J. Math. Anal. Appl. 348 (1)(2008), 165-168.
[20] Timothy Gowers. The Two Cultures of Mathematics, preprint.

In Soo Baek
Department of Mathematics
Pusan University of Foreign Studies
Busan, 608-738, Korea
E-mail address: isbaek@pufs.ac.kr