저차 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기의 LMI 기반 설계법

논 문
58-8-20

LMI-based Design of Reduced Order Output Feedback Sliding Mode Controllers

최 한 호†
(Han Ho Choi)

Abstract - This paper presents an LMI-based method to design a reduced order output feedback sliding mode controller for a class of uncertain systems. Using LMIs we derive an existence condition of a reduced order sliding mode control law. And we give explicit formulas of the gain matrices. Finally, we give a numerical design example, together with a design algorithm.

Key Words : Sliding surface, Variable structure control, Matching condition, LMI, Uncertainty

1. 서 론

슬라이딩 모드 제어 이론은 불확실성의 놈크기가 알려진 시스템을 위한 강인한 상태 궤환 제어기 설계에 성공적으로 적용되었다[1-2]. 실제의 경우에는 모든 상태정보를 얻는 것이 힘들 수가 있는데 이를 해결하기 위해 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기가 최근 여러 연구자에 의해 제안되었다. [3-5]의 방법들은 특별한 구조적 제한 조건을 요구하고 슬라이딩 평면의 특별한 선택을 요구한다. 이러한 제한은 [6]에서 동적 출력 궤환을 도입하여 어느 정도 극복되었다. [6]에 따르면 공칭시스템이 안정가능이고 최소위상이며 relative degree가 1이면 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제는 해결이 가능하다. [7]에서는 [6]의 방법이 LMI 최적화로 풀 수 있도록 수정되었다. 그러나 [7]의 방법은 그 논문에 주어진 예제와 부록에서 볼 수 있듯이 tuning 변수의 설정에 따라 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제가 해결가능해도 제어기 설계가 불가능한 경우가 발생하며 적절한 tuning 변수 설정을 위한 체계적인 방법이 제시되지 않았다. 이를 개선한 방법이 [13-14]에 소개되었다. [6-7], [13-14]의 방법을 이용하여 전차수 제어기를 구하는 것은 어느 정도 쉬우나 저차수 제어기를 구하는 것은 비선형 행렬식을 풀어야 하므로 쉽지는 않다. 이러한 것을 고려하여 본 논문에서는 $(n-p)$차의 저차 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기의 LMI기반 설계방법을 제안한다. 여기에서 n은 시스템의 차수이고 p는 출력채널의 수이다. 공칭시스템이 안정가능이고 최소위상이며 relative degree가 1이면 항상 $(n-p)$차의 저차 슬라이딩 모드 제어기가 존재함을 보이고 존재조건을 LMI 형태로 제시한다. LMI 존재조건을 이용하여 제어기 이득을 매개변수화한다. 그러므로 본 논문에서 제안된 방법을 사용하면 $(n-p)$차의 저차 슬라이딩 모드 제어기를 설계하기 위해 비선형 행렬식을 복잡한 과정을 거쳐서 풀 필요가 없고 단지 주어진 LMI식을 풀기만 하면 된다.

2. 문제 설정

본 논문에서는 다음과 같은 동역학 방정식으로 표현 가능한 시스템을 다룬다[3-7].

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B[u(t) + h(t)], \quad y(t) = Cx(t) \tag{1}$$

여기에서 $x(t)\in R^n, u(t)\in R^m, y(t)\in R^p$ 로 각각 상태, 입력, 출력을 가리키며 다음을 만족시킨다고 가정한다.

A1: $A\in R^{n\times n}, B\in R^{n\times m}, C\in R^{p\times n}$ 로 상수들이다.

A2: $\mathrm{rank}(C) = p \geq m = \mathrm{rank}(B)$

A3: $\|h(t)\| \leq \phi\|u\| + \beta(y,t)$, $0 \leq \phi < 1$ 을 만족시키는 상수ϕ, 함수 $\beta(y,t)$가 알려져 있다.

3. 주요 결과

다음 $(n-p)$차의 보상기를 고려하자.

$$\dot{v} = L_1 v + L_2 y, \quad v(0) = 0 \tag{2}$$

여기에서 $L_1 \in R^{(n-p)\times(n-p)}$, $L_2 \in R^{(n-p)\times p}$는 보상기 이득으로 앞으로 구할 것이다. 다음처럼 확장된 상태를 도입하자.

$$z = \begin{bmatrix} v \\ x \end{bmatrix} \in R^{2n-p}, \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} v \\ y \end{bmatrix} \in R^n$$

그러면 다음과 같은 확장 모델을 얻을 수 있다.

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}[u + h(t)], \quad \bar{y} = \bar{C}z \tag{3}$$

여기에서 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$는 다음처럼 정의된다.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 C \\ 0 & A \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \tag{4}$$

위의 확장된 상태 공간에서 선형 슬라이딩 평면은 다음처럼 정의될 수 있다.

$$\sigma = S\bar{y} = [S_1, S_2]\bar{y} = S_1 v + S_2 y = 0 \tag{5}$$

---

† 교신저자, 정회원 : 동국대학교 전기공학과 교수
E-mail : hhchoi@dongguk.edu
접수일자 : 2009년 3월 4일
최종완료 : 2009년 5월 27일

정리 1 : 시스템 (1)을 고려하자. 다음 LMI를 만족시키는 해 X, Y, W가 존재한다고 가정하자.

$$X>0,\ \Phi^T AX\Phi+* < 0, \tag{6}$$
$$\Phi Y\Phi^T + C^T WC>0, \quad W=W^T, \quad Y=Y^T,$$
$$\Theta^T\Phi Y\Phi^T A\Theta + * < 0$$

여기에서 $\Theta\in R^{n\times(n-p)}$는 $C\Theta=0, \Theta^T\Theta=I$를 만족시키는 행렬이다. (2)와 (5)의 이득행렬 L_1, L_2, S_1, S_2가 (6)의 해 다 X, Y, W를 사용해서 다음처럼 주어진다고 가정하자.

$$L_1=(\Theta^T P\Theta)^{-1}\Theta^T PA\Theta, \tag{7}$$
$$L_2=(\Theta^T P\Theta)^{-1}\Theta^T PAP^{-1}C^T(CP^{-1}C^T)^{-1},$$
$$S_1=B^TX^{-1}\Theta, \quad S_2=B^TX^{-1}P^{-1}C^T(CP^{-1}C^T)^{-1}$$

여기에서 $P=\Phi Y\Phi^T+C^TWC$이다. 입력이 다음의 출력 궤환 스위칭 제어기로 주어진다고 가정하자.

$$u=-\frac{\gamma}{1-\phi}\sigma-\frac{1}{1-\phi}\frac{\sigma}{\|\sigma\|}[\epsilon+\beta(y,t)] \tag{8}$$

여기에서 $\epsilon>0$이며 γ는 다음을 만족시키는 양수이고.

$$\gamma>\frac{1}{2}\lambda_{\max}[B_g[U-U\Phi(\Phi^TU\Phi)^{-1}\Phi^TU]B_g^T] \tag{9}$$

$B_g=(B^TB)^{-1}B^T$, $U=AX+XA^T$이다. 그러면 전체 제어시스템은 안정하다.

증명 : 변환행렬 M을 다음처럼 정의하자.

$$M=\begin{bmatrix}(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TP\\ C\end{bmatrix}\in R^{n\times n} \tag{10}$$

그러면 M^{-1}이 다음처럼 주어진다.

$$M^{-1}=[\Theta, P^{-1}C^T(CP^{-1}C^T)^{-1}] \tag{11}$$

M에 대응하는 벡터 $q\in R^n$을 다음처럼 정의하자.

$$q=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}=Mx=\begin{bmatrix}(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TPx\\ Cx\end{bmatrix}\in R^n$$

위 식으로부터 $q_2=Cx=y$, $x=M^{-1}[q_1^T, y^T]^T$가 성립함을 알 수 있다. 벡터 $w\in R^n, e\in R^{n-p}$를 다음처럼 정의하자.

$$w=M^{-1}\bar{y}, \ e=q_1-v \tag{12}$$

(7), (11), (12)은 다음이 성립함을 의미한다.

$$\sigma=B^TX^{-1}w \tag{13}$$

(7), (11)을 이용하여 (2)를 다음처럼 고쳐 쓸 수 있다.

$$\dot{v}=L_1v+L_2y=(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TPAM^{-1}[v^T, y^T]^T$$

그리고 (7), (10), (11), (12)를 이용하여 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{e}=\dot{q}_1-\dot{v}=(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TPAM^{-1}[e^T, 0]^T=(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TPA\Theta e$$
$$\dot{w}=\dot{x}-\Theta\dot{e}=(I-\Theta(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta P)A\Theta e+Aw+B[u+h(t)]$$

결국 (3)의 시스템 방정식을 다음처럼 고쳐 쓸 수 있다.

$$\dot{e}=(\Theta^TP\Theta)^{-1}\Theta^TPA\Theta e \tag{14}$$
$$\dot{w}=\geq + Aw+B[u+h(t)]$$

여기에서 $G=P^{-1}C^T(CP^{-1}C^T)^{-1}CA\Theta$이다. 리아푸노프 함수를 다음처럼 정의하자.

$$L(t)=\eta e\Theta^TP\Theta e+w^TX^{-1}w$$

여기에서 $\eta>0$은 충분히 큰 양수이고 $P=\Phi Y\Phi^T+C^TWC$이고 X, Y, W는 (6)의 해이다. 그러면 리아푸노프 함수의 도함수는 다음처럼 주어진다.

$$\dot{L}=-2\eta e^TQ_1e+2w^TX^{-1}\dot{w} \tag{15}$$

여기에서 Q_1은 다음처럼 주어진다

$$-Q_1=\Theta^T(PA+*)\Theta=\Theta^T\Phi Y\Phi^TA\Theta+*$$

(6)에 의해 $Q_1>0$이므로 (15)는 다음처럼 고쳐 쓰일 수 있다.

$$\dot{L}\leq -2\eta\lambda_{\min}(Q_1)\|e\|^2+2w^TX^{-1}\dot{w} \tag{16}$$

또한 (8), (13)과 (14)에 의해 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{L}\leq -2\eta\lambda_{\min}(Q_1)\|e\|^2+2w^TX^{-1}\geq + 2w^TX^{-1}[Aw+Bu+h(t)]$$
$$\leq -2\eta\lambda_{\min}(Q_1)\|e\|^2+2w^TX^{-1}\geq + 2\|\sigma\|[\phi\|u\|+\beta]+2\sigma^Tu$$
$$\leq -2\eta\lambda_{\min}(Q_1)\|e\|^2+2w^TX^{-1}\geq - w^TQ_2w$$

여기에서 Q_2는 다음처럼 주어진다

$$-Q_2=X^{-1}A+A^TX^{-1}-2\gamma X^{-1}BB^TX^{-1}$$

[8]의 결과와 LMI (6)은 $Q_2>0$를 의미하므로 다음을 얻을 수 있다.

$$\dot{L}\leq -\overline{w}^TQ\overline{w}$$

여기에서 $\overline{w}\in R^2, Q\in R^{2\times 2}$는 다음처럼 정의된다.

$$w=\begin{bmatrix}\|e\|\\ \|w\|\end{bmatrix}, \quad Q=\begin{bmatrix}2\eta\lambda_{\min}(Q_1) & -\|X^{-1}G\|\\ -\|X^{-1}G\| & \lambda_{\min}(Q_2)\end{bmatrix}$$

만약 η가 충분히 커서 $\eta>0.5\|X^{-1}G\|^2\lambda_{\min}(Q_2)/\lambda_{\min}(Q_1)$를 만족시킨다면 다음이 성립한다.

$$\dot{L}\leq -\lambda_{\min}(Q)(\|e\|^2+\|w\|^2)$$

이는 (e, w)가 0으로 수렴함을 의미한다. 결국 폐회로 시스템은 안정함을 알 수 있다. ▽▽▽

주 1 : [9-10]의 결과를 이용하면 LMI (6)의 해가 존재할 필요충분조건은 (A, B)쌍이 안정가능이고 (A, B, C)가 최소위상이며 relative degree가 1이라는 것을 보일 수 있다. $rank(B)=rank(CB)$이면 (A, B, C)는 relative degree가 1이다.

주 2 : [6-7], [13-14]에 따르면 (A, B)쌍이 안정가능이고 (A, B, C)가 최소위상이며 relative degree가 1이면 시스템 (1)은 동적 출력 궤환에 의해 안정가능하고 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제는 해결가능하다. 이는 본 논문의 결과와 병합하여 출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제가 해결가능하면 항상 $(n-p)$의 저차 슬라이딩 모드 제어기에 의해 해결가능하다고 확장하여 진술될 수 있다.

주 3 : 앞의 결과는 이전의 [6-7], [13-14]와 같은 방법처럼 저차 슬라이딩 모드 제어기를 설계하기 위해 비선형 행렬식을 복잡한 과정을 거쳐서 풀 필요가 없고 단지 주어진 LMI식 (6)을 풀기만 하면 $(n-p)$의 저차 슬라이딩 모드 제어기를 손 쉽게 설계할 수 있음을 의미한다.

주 4 : 앞의 결과는 다음의 LMI기반 제어 알고리즘으로 요약될 수 있다.

Step 1: (A, B)쌍이 안정가능이고 (A, B, C)가 최소위상이며 $rank(B)=rank(CB)$이 성립하나 확인한다. 아니면 출력궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계 문제는 해결 불가능하므로 빠져나간다.

Step 2 : LMI식 (6)의 해를 LMI Control Toolbox[11]와 같은 매우 효율적인 convex 최적화 기법을 통해 구하라.

Step 3 : 공식 (7)과 (8)을 이용하여 제어기를 구하라.

4. 수치적 예

[12]에 주어진 L-1011 항공기의 lateral 축 동역학 모델을 고려해보자. 다음의 데이터로 표현될 수 있다.

$$A=\begin{bmatrix}-2.98 & 0.93 & 0 & -0.034\\ -0.99 & -0.21 & 0.035 & -0.0011\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0.39 & -5.555 & 0 & -1.89\end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix}-0.032\\ 0\\ 0\\ -1.6\end{bmatrix}, \tag{17}$$
$$C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

상태 변수는 각각 yaw rate, side-slip angle, bank angle, roll rate를 의미하고 입력 변수는 aileron deflection이다[12]. 초기값은 $x(0)=[0,0,1,-0.5]^T$ 이고 $h(t)=\sin t$ 이라고 가정하였다. 주 4에 주어진 설계알고리즘에 따라 다음과 같은 제어기를 얻을 수 있다.

$$\dot{v}=\begin{bmatrix}-2.988 & 1.041\\ -0.990 & -0.210\end{bmatrix}v+\begin{bmatrix}0.012 & 0.028\\ -0.024 & 0.005\end{bmatrix}y,\quad v(0)=0 \tag{18}$$
$$u=-1.275\sigma-2\frac{\sigma}{|\sigma|}$$
$$\sigma=[0.888,-0.279]v+[-3.577,-3.462]y$$

그림 1은 출력결과를 보여주고 있다. [6-7], [13-14]의 방법을 사용하여 (17)에 대하여 제어기를 얻을 수도 있으나 [14]의 방법으로는 4차의 전차수 제어기만을 구할 수 있으며 [6-7], [13]의 방법을 사용하는 경우에는 비선형 조건식을 푸는 매우 복잡한 과정을 통해야만 하며 [6-7], [13]에 주어진 알고리즘들을 수행하면 2차 제어기 이득을 결국에는 제공해 줄 것이라는 보장도 없음에 유의해야 한다.

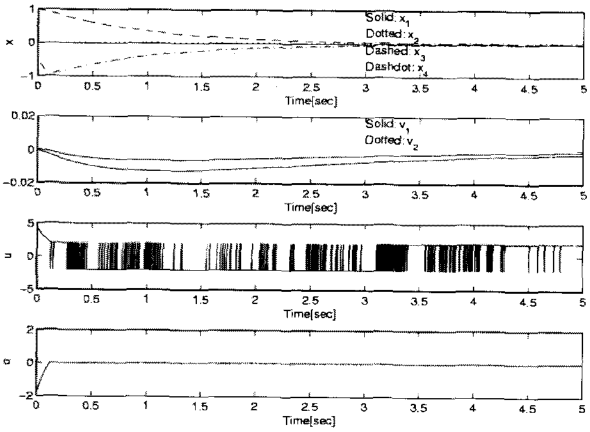

그림 1 시뮬레이션 결과

Fig. 1 Simulation results

5. 결 론

본 논문에서는 다변수 시스템을 위한 $(n-p)$ 차의 저차 슬라이딩모드 제어기 설계 문제가 고려됐다. LMI를 이용하여 제어기 이득의 공식을 유도하였고 설계 예를 통해 효용성을 보였다.

참 고 문 헌

[1] R.A. DeCarlo, S.H. Zak, and G.P. Mathews, "Variable structure control of nonlinear multivariable systems: A tutorial," IEEE Proceedings, vol. 76, pp. 212-232, 1988

[2] V.I. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 22, pp. 212-222, 1977

[3] C. Edwards, "A practical method for the design of sliding mode controllers using linear matrix inequalites," Automatica., vol. 40, pp. 1761-1769, 2004

[4] S.H. Zak and S. Hui "On variable structure output feedback controllers for uncertain dynamic systems" IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, no. 10, pp. 1509-1512, 1993

[5] H.H. Choi, "Variable structure output feedback control design for a class of uncertain sysnamic systems," Automatica, vol. 38, pp. 335-341, 2002

[6] S.K. Bag, S.K. Spurgeon, and C. Edwards, "Output feedback sliding mode design for linear uncertain systems," IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 144 pp. 209-216, 1997

[7] C. Edwards, and S.K. Spurgeon, "Linear matrix inequality methods for designing sliding mode output feedback controllers," IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 150 pp. 539-545, 2003

[8] T. Iwasaki and R.E. Skelton, "All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existnce condition and state space formulas," Automatica, vol. 30, pp. 1307-1317, 1994

[9] S. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in system and Control Theory, Philadelphia, SIAM, 1994.

[10] H.H. Choi, "Frequency domain interpretations of the invariance condition of the sliding mode control theory", IET Proc.-Control Theory and Appl., vol. 1, pp. 869-874, 2007

[11] P. Gahinet, A. Nemirovski and A.J. Laub, LMI Control Toolbox User's Guide, Natic, MA:The MathWorks Inc., 1995.

[12] A.R. Galimidi, and B.R. Barmish, "The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 31, pp. 410-419, 1986

[13] 최한호, "출력 궤환 슬라이딩 모드 제어기 설계를 위한 선형행렬부등식 접근법," 대한전기학회 논문지, 56권, 7호, pp. 1298-1301, 2007

[14] P. Park, D.J. choi, and S.G. Kong, "Output feedback variable structure control for linear systems with uncertainties and disturbances," Automatica, vol. 43, pp. 72-79, 2007

저 자 소 개

최 한 호 (崔 漢 浩)

1966년 8월 25일생. 1988년 서울대학교 제어계측 공학과 졸업. 1994년 한국과학기술원 전기및전자공학과 졸업(공박). 2003년~현재 동국대학교 교수

Tel : 02-2260-3777

Fax : 02-2275-6013

E-mail : hhchoi@dongguk.edu