

## 크리로프 부공간법에 근거한 모델차수축소기법을 통한 배열형 MEMS 공진기의 주파수응답해석

한 정 삼<sup>†</sup> · 고 진 환<sup>\*</sup>

(2008년 11월 21일 접수, 2009년 7월 28일 수정, 2009년 7월 28일 심사완료)

### Frequency Response Analysis of Array-Type MEMS Resonators by Model Order Reduction Using Krylov Subspace Method

Jeong Sam Han and Jin Hwan Ko

**Key Words :** Krylov Subspace Method(크리로프 부공간법), Moment-Matching Method(모멘트일치법), Model Order Reduction(모델차수축소법), Frequency Response Analysis(주파수응답해석), Array-Type MEMS Resonator(배열형 MEMS 공진기)

#### Abstract

One of important factors in designing MEMS resonators for RF filters is obtaining a desired frequency response function (FRF) within a specific frequency range of interest. Because various array-type MEMS resonators have been recently introduced to improve the filter characteristics such as bandwidth, pass-band, and shape factor, the degrees of freedom (DOF) of finite elements for their FRF calculation dramatically increases and therefore raises computational difficulties. In this paper the Krylov subspace-based model order reduction using moment-matching with non-zero expansion points is represented as a numerical solution to perform the frequency response analyses of those array-type MEMS resonators in an efficient way. By matching moments at a frequency around the specific operation range of the array-type resonators, the required FRF can be efficiently calculated regardless of their operating frequency from significantly reduced systems. In addition, because of the characteristics of the moment-matching method, a minimal order of reduced system with a prearranged accuracy can be determined through an error indicator using successive reduced models, which is very useful to automate the order reduction process and FRF calculation for structural optimization iterations. We also found out that the presented method could obtain the FRF of a 6x6 array-type resonator within a seventieth of the computational time necessary for the direct method and in addition FRF calculation by the mode superposition method could not even be completed because of a data overflow with a half after calculation of 9,722 eigenmodes.

#### 1. 서론

여러 가지 통신시스템(communication system)에서 사용되는 대역통과 필터(band-pass filter)에서는 좁은 통

과대역(pass-band)과 통과대역의 양쪽에서 급격한 롤오프(roll-off)특성이 요구되며 통과대역에서 삽입손실(insertion loss)을 최소화하는 것이 중요한 설계요소이다.<sup>(1)</sup> 일반적으로 기계적 공진기(mechanical resonator)는 높은 Q 인자(Q factor)와 기계적 안정성을 지님으로 협대역 필터에 이용될 수 있다. 그러나, 기계적 공진기는 이러한 우수한 성능에 비해 공정가격과 구조의 크기가 상대적으로 큰 문제를 가지고 있다.

최근 정보통신 분야의 기술적인 발달과 수요가 폭발적으로 증가함에 따라서 무선 통신시스템은 그 규

<sup>†</sup> 책임저자, 회원, 안동대학교 기계공학부  
E-mail : jshan@andong.ac.kr  
TEL : (054)820-6218 FAX : (054)820-5167

<sup>\*</sup> 회원, 서울대학교 기계항공공학부  
E-mail : jhko73@gmail.com

모가 급속히 커지고 매우 빠른 속도로 확대되고 있다. 이에 가용주파수의 수요가 점점 높아져 수백 MHz 에서 수백 GHz 주파수 대역으로까지 요구됨에 따라 원하는 필터 및 시스템을 높은 수율과 저가격의 공정 기술을 이용하여 제작하는 것이 더욱 필요하게 되었다. 이러한 기술적 요구 및 기계적 공진기가 지닌 문제를 해결하면서 동시에 IC(integrated circuit)와의 집적화를 위해 제안된 기술이 MEMS 필터이다.<sup>(2)</sup>

일반적으로 MEMS 필터에는 낮은 삽입손실, 저전력, 높은 Q 인자 등의 특성을 지닌 MEMS 공진기가 요구된다.<sup>(2-5)</sup> 따라서, 이러한 MEMS 공진기의 설계를 위해서는 필터의 관심주파수 대역에 대한 주파수 응답함수의 계산이 필수적이다. 또한 최근에는 MHz 또는 GHz 의 고주파수 대역에서 발생하는 고차의 와인 유리잔 형태의 고유진동모드(extensional wine-glass mode)<sup>(4)</sup>를 사용하여 높은 Q 인자를 가지도록 하거나, 응용 용도에 부합하는 필터의 성능 특성을 가지는 주파수응답을 얻기 위하여 여러 개의 공진기를 연결한 배열형(array-type) MEMS 공진기<sup>(3)</sup>가 제안되어 더욱 복잡한 구조의 공진기 구조체에 대한 방대한 주파수응답함수의 계산이 필요하게 되었다. 즉, 대형 유한요소모델에 대하여 고주파수 영역까지의 주파수응답함수의 계산이 필요함에 따라 대규모의 전산자원과 계산시간이 소요되게 되었다. 따라서, 이러한 MEMS 공진기의 설계에는 사용되는 고주파수 대역에 대한 주파수응답함수를 효율적으로 계산할 수 있는 수치계산방법이 절실히 요구된다.

대형 유한요소모델의 동적 해석에 대한 모델차수 축소기법은 크게 모멘트일치법에 근거한 Krylov 부공간 모델차수축소법,<sup>(6-13)</sup> 부구조화 기법을 연동한 반복적인 동적 축소법,<sup>(14,15)</sup> 대수학 부구조법,<sup>(16)</sup> 고유 모드벡터 및 Ritz 벡터 중첩법<sup>(17)</sup> 등이 널리 연구되고 있으며, 시스템의 고유모드해석 및 주파수응답해석에 사용되고 있다.

본 논문에서는 수치해석방법론 측면에서 모멘트일치법에 근거한 Krylov 부공간 모델차수축소법을 이용하여 관심 대역인 고주파수 영역에서 전개점을 적용함으로써 고주파수의 통과대역을 가지는 MEMS 공진기의 주파수응답함수를 매우 정확하고 효율적으로 계산할 수 있음을 제시한다. 그리고 수치 예제의 결과는 일반적으로 많이 이용되는 직접적분법(direct integration method) 및 모드중첩법(mode superposition method)과 비교하였다. 또한, 고주파수 영역의 전개점을 이용하는 경우에도 초기 유한요소모델과 축소 모델 사이에 발생하는 결과의 오차를 축소모델의 차수에 따라서 비교하여 설계 측면에서 요구되는 정확

도를 지닌 축소모델의 차수를 자동적으로 결정할 수 있음을 보이고자 한다.

## 2. 모델 차수 축소 기법

구조물의 운동방정식을 유한요소해석의 행렬 형태로 나타내면 다음과 같이 이차 상미분방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{b}u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}\mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서,  $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{R}^N$  은 시간  $t$  의 함수인 상태변수벡터,  $u(t)$  은 입력, 그리고  $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{R}^p$  는 출력벡터를 의미한다. 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$  의 자유도는  $N$ , 출력벡터의 크기는  $p$  로 한다. 행렬  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathcal{R}^{N \times N}$  는 각각 이차 시스템의 질량행렬, 감쇠행렬, 강성행렬이다. 행렬  $\mathbf{b} \in \mathcal{R}^N$  와  $\mathbf{L} \in \mathcal{R}^{p \times N}$  은 각각 하중이 작용하는 위치와 크기를 나타내는 하중분배벡터와 선택한 위치의 응답을 보기 위한 출력측정행렬을 의미한다. 모델차수축소법의 기본 개념은

$$\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{V}\mathbf{z}(t) \quad \text{where } \mathbf{z}(t) \in \mathcal{R}^n, \quad n \ll N \quad (2)$$

의 관계를 만족하는 변환행렬  $\mathbf{V} \in \mathcal{R}^{N \times n}$  을 통하여 초기 시스템의 큰 자유도의 상태변수벡터  $\mathbf{x}(t)$  의 응답을 작은 자유도로 구성된 축소 시스템의 상태변수벡터  $\mathbf{z}(t)$  로 근사화하는 것이다. 이후에 식 (1) 의 이차 시스템을  $\mathbf{V}$  의 부공간에 투영(projection) 시키고, 이 식의 양변에  $\mathbf{V}$  의 전치행렬을 곱하면 식 (1) 과 동일한 형태를 지닌 이차 축소 시스템을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_r \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}_r \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}_r \mathbf{z}(t) &= \mathbf{b}_r u(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{L}_r \mathbf{z}(t) \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, 축소행렬은  $\mathbf{M}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{C}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{K}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V}$ ,  $\mathbf{b}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{b}$  및  $\mathbf{L}_r = \mathbf{L} \mathbf{V}$  로 각각 표현된다. 축소모델의 자유도는  $n \ll N$  이고, 축소모델에서 입력  $u(t)$  와 출력벡터  $\mathbf{y}(t)$  는 초기 시스템과 비교하여 변동이 없다.

### 2.1 모멘트 일치법

라플라스 변환으로 초기 시스템인 식 (1) 의 전달함수  $\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}(\mathbf{y}(t))/\mathbf{L}(u(t))$  를 구하면

$$\mathbf{H}(s) = \mathbf{L}(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{b} \quad (4)$$

이고, 이 식을  $s$  에 대하여 전개점  $s=s_0$  에서 급수 전개(series expansion)을 하면 전달함수는 아래와 같이 급수형태로 표현할 수 있다.<sup>(10)</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{m}_0 + \mathbf{m}_1(s-s_0) + \dots + \mathbf{m}_q(s-s_0)^q + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i (s-s_0)^i \end{aligned} \quad (5)$$

이때, 계수  $\mathbf{m}_i$  를 전개점  $s_0$  에 대한 전달함수의 모멘트(moment)라고 한다. 이 모멘트는 초기 시스템과 축소 시스템의 유사성(similarity)을 나타내는 지표로 사용된다. 즉, 식 (1)과 동일한 이차 형태를 지닌 식 (3)의 축소 시스템의 전달함수를

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{H}}(s) &= \hat{\mathbf{m}}_0 + \hat{\mathbf{m}}_1(s-s_0) + \cdots + \hat{\mathbf{m}}_q(s-s_0)^q + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\mathbf{m}}_i(s-s_0)^i\end{aligned}\quad (6)$$

라고 하면, 결국 모멘트일치법은 요구되는 차수  $n$  에 대하여 다음을 만족하는 축소 시스템인 식 (3)을 찾는 문제를 의미한다.

$$\mathbf{m}_i = \hat{\mathbf{m}}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

비감쇠 시스템을 가정하면 식 (1)의  $\mathbf{H}(s)$ 는

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(s) &= \mathbf{L}(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{L}(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}s^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{m}_i s^{2i}\end{aligned}\quad (8)$$

이며,  $\mathbf{m}_i = \mathbf{L}(-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^i \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$  는 비감쇠 시스템의 모멘트이다.

## 2.2 크리로프 부공간법

행렬  $\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{N \times N}$  및 벡터  $\mathbf{r} \in \mathcal{R}^N$ 에 대하여

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{A}, \mathbf{r}) = \text{span}\{\mathbf{r}, \mathbf{A}\mathbf{r}, \mathbf{A}^2\mathbf{r}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{r}\} \quad (9)$$

를  $n$  차 크리로프 부공간( $n$ th Krylov subspace)라 한다. 만약  $\mathbf{A} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$  라고 하면  $n$  차 크리로프 부공간은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) \\ = \text{span}\{\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}, \dots, (\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M})^{n-1}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}\}\end{aligned}\quad (10)$$

크리로프 부공간법은 전달함수의 모멘트  $\mathbf{m}_i$ 를 실제로 계산하지 않고, 초기 및 축소 시스템의 모멘트를 일치시킬 수 있도록 한다. 즉, 식 (2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 의 각 열벡터로 이루어진 모든 선형결합이 식 (10)의  $n$ 차 크리로프 부공간을 구성(span)하면, 비감쇠 초기 시스템과 축소 시스템의 첫  $n$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치한다.<sup>(9,10)</sup> 이때, 변환행렬  $\mathbf{V}$ 를 구하는데 초기 시스템의 질량 및 강성행렬과 하중분배벡터의 정보만을 이용한다. 이러한 열벡터로 이루어진 변환행렬  $\mathbf{V}$ 는 아놀디과정(Arnoldi process)<sup>(10)</sup>을 통하여 계산되며 다음과 같은 정규직교성(orthonormality)을 가지고 있다.

$$\begin{aligned}\text{colspan}\{\mathbf{V}\} &= \mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) \\ \mathbf{V}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{V} &= \mathbf{H}_n \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n\end{aligned}\quad (11)$$

여기서,  $\mathbf{H}_n$ 는  $n \times n$ 의 upper Hessenberg 행렬이며,  $\mathbf{I}_n$

는  $n$  차의 단위행렬이다. 참고로 여기서 생성되는 Krylov 벡터는 Ritz 벡터로 알려진 것과 유사한 형태이나, Ritz 벡터는 질량행렬에 대하여 정규직교(M-orthonormal)한 특징을 가진다.<sup>(17)</sup>

초기 시스템의 감쇠행렬이 비례감쇠(proportional damping)로 표현되는 경우, 식 (2)의 변환행렬  $\mathbf{V}$ 가 단순히  $\mathcal{K}_n(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}, \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}) = \text{colspan}\{\mathbf{V}\}$ 의 관계만을 만족하더라도 초기 시스템과 축소 시스템의 첫  $n$ 번째까지의 모멘트는 서로 일치하므로 축소 시스템의 감쇠행렬은 다음처럼 계산된다.

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_r &= \mathbf{V}^T \mathbf{C} \mathbf{V} \\ &= \mathbf{V}^T (\alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}) \mathbf{V} \\ &= \alpha \mathbf{M}_r + \beta \mathbf{K}_r\end{aligned}\quad (12)$$

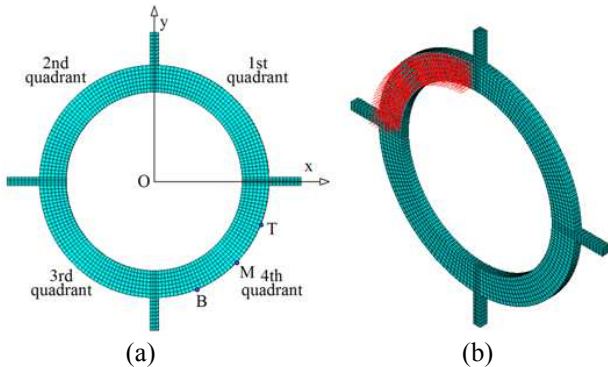
특히, 본 논문에서 고려하고자 하는 문제와 같이 특정한 고주파수 대역에 대한 주파수응답함수를 고려하는 경우는 축소모델의 생성시,  $s_0 \neq 0$ 인 전개점에 대하여 급수전개함으로써 일반적으로  $s_0 = 0$ 인 전개점에 대한 축소모델보다 그 주파수 대역에서 더 높은 정확도를 가진 축소모델을 얻을 수 있다. 만약 주파수응답함수의 관심주파수를  $f_0$  Hz 라고 하면 변환행렬  $\mathbf{V}$ 는 다음 식으로부터 얻어진다.

$$\text{colspan}\{\mathbf{V}\} = \mathcal{K}_n\{(\mathbf{s}_0\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{M}, (\mathbf{s}_0\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b}\} \quad (13)$$

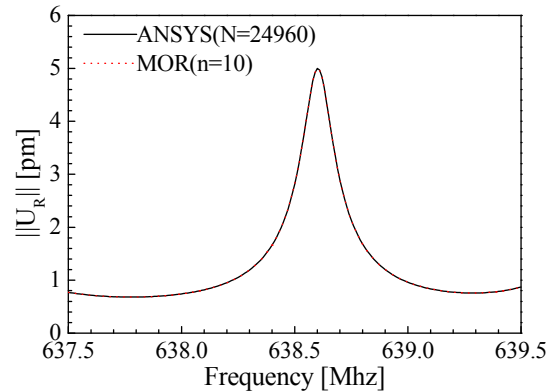
이때,  $s_0 = -(2\pi f_0)^2$ 이다. 이것은 준정적 Ritz 벡터중첩법(quasistatic Ritz vector method)<sup>(18)</sup>과 유사한 개념이다. 이처럼 식 (13)을 이용함으로써 작동 영역이 수백 MHz~ 수십 GHz의 고주파수 대역인 MEMS 공진기의 주파수응답해석에 모멘트일치법에 근거한 축소모델기법은 더욱 효과적으로 적용될 수 있다. 이렇듯 주파수응답함수의 계산에  $n$  자유도로 축소된 수치모델을 해석에 이용하므로 큰 차수의 유한요소모델 및 넓은 주파수구간에 대한 효율적인 주파수응답해석이 가능하다.

## 3. 배열형 MEMS 공진기의 차수모델링

일반적으로 MEMS 필터에는 낮은 삽입손실, 저전력, 높은 Q 인자 등의 특성을 지닌 MEMS 공진기가 요구된다.<sup>(2-5)</sup> 따라서, 이러한 MEMS 공진기의 설계를 위해서는 필터의 관심주파수 대역에 대한 주파수응답함수의 계산이 필수적이다. 또한 최근에는 링타입의 MEMS 공진기에서 저차의 타원형 모드(oval mode)보다 MHz 또는 GHz의 고주파수 대역에서 발생하는 와인 유리잔 형태의 고차 고유진동모드(extensional wine-glass mode)<sup>(4)</sup>를 사용하여 높은 Q 인자를 가지도록 하는 방법이 소개되었다.(Fig. 2 참고) 이외에도 응용 용도에 부합하는 필터의 성능 특성을



**Fig. 1** A 1×1 resonator: (a) finite element model with 24,960 DOF; (b) pressure on the surface of the second quadrant to model actuation force by dielectric transduction



**Fig. 3** Frequency response of the 1×1 resonator

화된 필터의 성능 특성을 살펴본다. 또한, 응답의 정확성 및 계산 효율성을 초기 ANSYS<sup>(19)</sup> 유한요소모델의 결과와 비교한다.

3.1 유한요소모델링

초기 유한요소모델은 ANSYS 를 이용하여 모델링되었다. Fig. 1 은 단일 공진기에 대한 ANSYS 의 유한요소모델과 입력 및 출력을 나타낸다. 유한요소모델은 솔리드요소인 SOLID45 로 구성되며 화살표는 유전체를 이용한 구동(dielectric transduction)을 모델링한 입력부분의 압력(1 kPa)을 나타낸다.<sup>(5)</sup> 유한요소모델에서 네 면 끝단의 빔 부분은 구속되었다. 주된 변형 방향이 각 공진기의 중심축에 대한 반경방향이므로 각 중심축을 원점으로 하는 원통좌표계를 기본 좌표계로 사용하였다. 출력응답으로는 4 사분면에 있는 세 점 B, T, 그리고 M 에서 반경 방향의 변위 응답을 고려하였다.

3.2 주파수응답해석

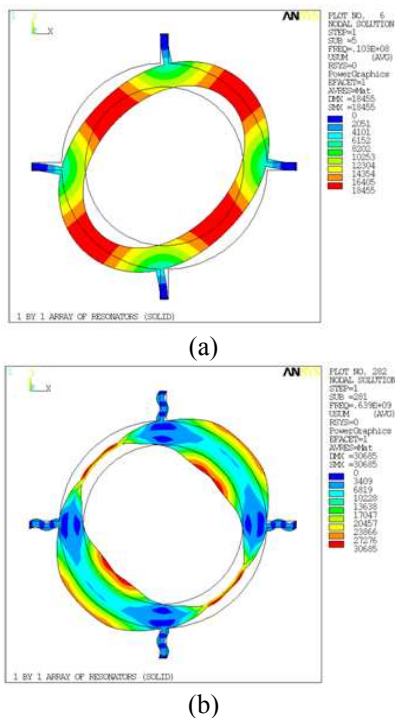
공진기에서 출력응답은 Fig. 1(a)처럼 오른쪽 끝열(column)에 위치하는 각 공진체의 4 사분면에 표시된 세 지점에서의 반경방향 응답의 크기(norm)이며 다음 식으로 계산하였다.

$$\|U_R\| = \sqrt{\sum_{i=1}^k (U_{RTi}^2 + U_{RBi}^2 + U_{RMi}^2)} \quad (14)$$

여기서, k 는 배열형 공진기에서 행의 개수를 표시한다. 주파수응답 해석시, 각 시스템의 감쇠는 주파수 638.6 MHz 에서 Q=4650 을 가정하여  $\alpha=0 \text{ s}^{-1}$  및  $\beta=5.36 \times 10^{-14} \text{ s}$  인 비례감쇠로 하였다.<sup>(4)</sup>

먼저 해당 주파수대역의 201 개의 주파수  $\Omega$ 에서 ANSYS 의 직접적분법<sup>(19)</sup>으로 주파수응답을 계산하였다. 이 방법은 식 (15)를 이용하여 각 주파수 값에서 응답을 계산하는 방법이다.

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M} + i\Omega \mathbf{C})\mathbf{x}_c = \mathbf{b} \quad (15)$$



**Fig. 2** Mode shapes of the 1×1 resonator: (a) oval mode ( $f=10.3 \text{ MHz}$ ) and (b) extensional wine glass (EWG) mode ( $f=638.6 \text{ MHz}$ )

가지는 주파수응답을 얻기 위하여 여러 개의 공진기를 연결한 배열형(array-type) MEMS 공진기<sup>(3)</sup>가 제안되고 있다.

본 절에서는 우선 Fig. 1 형태의 MEMS 공진기로 수백 MHz 주파수 대역에서 발생하는 와인 유리잔 형태의 고유진동모드<sup>(4)</sup>를 사용하여 높은 작동 주파수 및 Q 인자를 가지도록 설계된 단일 MEMS 공진기에 대한 주파수응답함수를 계산한다.(Fig. 2 및 3 참고) 이를 기본으로 하여 변화된 필터의 성능 특성을 가지도록 2×2, 4×4, 6×6 의 배열 형태로 확장한 배열형 MEMS 공진기에 대하여 앞에서 설명한 모델차수축소법을 이용하여 주파수응답함수를 계산하고 변

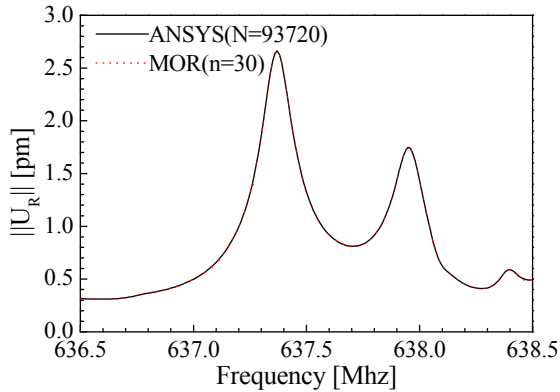


Fig. 4 Frequency response of a 2×2 resonator

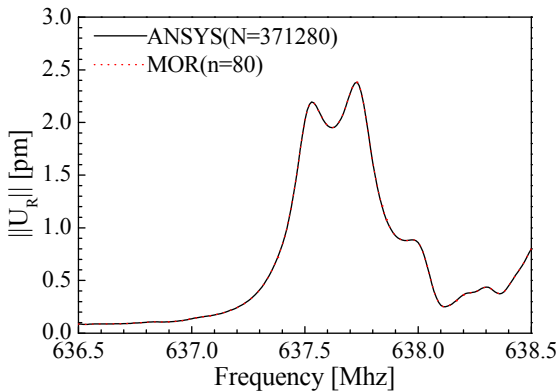


Fig. 5 Frequency response of a 4×4 resonator

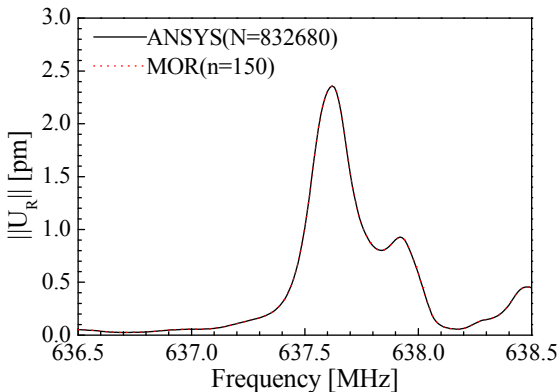


Fig. 6 Frequency response of a 6×6 resonator

Fig. 3 은 단일 공진기에 대하여 EWG 모드 부근 주파수(637.5~639.5 MHz)에서의 주파수응답을 도시한 것이다. EWG 모드가 발생하는 638.6 MHz 에서 피크 값이 발생함을 알 수 있다. 이때, 식 (13)의 전개점  $s_0 = -1.6 \times 10^{19}$  에서 생성한 자유도  $n=10$  인 축소모델로 그래프 상에서 오차를 확인할 수 없을 정도로 정확한 결과를 얻을 수 있었다.

최근에 주파수응답의 대역폭(bandwidth) 및 통과대역(pass-band)을 사용 용도에 부합되도록 설계하기

Table 1 The optimum order of reduced system

MEMS array	1×1	2×2	4×4	6×6
Initial DOF	24960	93720	371280	832680
$f_0$ (MHz)	639.5	638.5	638.5	638.5
$s_0$	$-1.6 \times 10^{19}$	$-1.6 \times 10^{19}$	$-1.6 \times 10^{19}$	$-1.6 \times 10^{19}$
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$
$n_{\min}$	6	36	109	179

위하여 단일 공진기를 배열 형태로 연결한 배열형 공진기가 도입되고 있다.<sup>(3)</sup> Fig. 4~6 은 각각 2×2, 4×4, 6×6 배열형 공진기의 주파수응답을 초기 ANSYS 유한요소모델과 축소모델을 사용하여 계산한 것이다. 배열형 공진기에서 EWG 모드가 발생하는 작동 주파수 대역인 636.5~638.5 MHz 에서의 주파수응답을 도시하였다. 4×4, 6×6 배열형 공진기의 경우, 단일 공진기에 비하여 통과대역은 대략 1 MHz 정도 저주파수로 이동되었고 주파수응답의 대역폭이 넓어지고, 필터의 형상계수(shape factor)가 향상된 주파수응답 특성을 보였다.

수치계산 측면에서 축소모델링시 사용된 각 전개점은 Table 1 에 표시하였다. 2×2 배열형 공진기의 경우에 초기 유한요소모델은 자유도  $N=93,720$  이며 이를  $n=30$  인 축소모델로 관심주파수대역에 대하여 그 그래프상에서 오차를 구분할 수 없을 정도로 정확한 결과를 구할 수 있었다. 4×4 및 6×6 배열형 공진기의 경우에는 각각 초기 유한요소모델은 자유도  $N=371,280$  및  $N=832,680$  이며, 이를  $n=80$  과  $n=150$  인 축소모델로 관심주파수대역에 대하여 그 그래프상에서 오차를 구분할 수 없을 정도로 정확한 결과를 구할 수 있었다.

다음 절에서는 주어진 상대오차를 만족하는 축소모델의 최저 차수를 결정하는 방법을 제시함으로써 모델차수축소법을 실제 적용하는데 있어서 발생하는 차수 결정의 어려움을 해결하고자 한다.

### 3.3 축소모델의 차수 결정방법

MEMS 공진기의 주파수응답 해석에서 설계에 필요한 높은 정확도를 가지면서 최저 차수( $n_{\min}$ )을 가지는 축소모델을 생성하는 것은 해석의 정확도와 경제적인 측면에서 중요한 문제이다. 이러한 측면에서 모멘트일치법이 가진 중요한 특징은 식 (5)의 전달함수  $\mathbf{H}(s)$ 의 급수전개시, 전개점으로부터 출력 주파수 대역이 멀어지게 되면 초기모델의  $\mathbf{H}(s)$ 와 축소모델의  $\hat{\mathbf{H}}(s)$  사이의 오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 높이면 더 넓은 주파수 대역까지 두 전달함수의 응답이 일치하게 된다는 점이다.

먼저, 축소모델의 차수가  $n$  인 경우, 주파수응답함

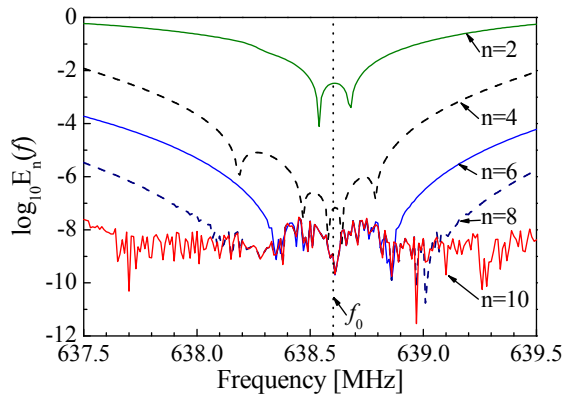


Fig. 7 True errors  $E_n(f)$  according to the order of reduced modes in the case of  $1 \times 1$  resonator

수의 상대 진오차( $E_n$ )는 다음 식으로 정의된다.

$$E_n(f) = \frac{\|\hat{\mathbf{H}}_n(f) - \mathbf{H}(f)\|}{\|\mathbf{H}(f)\|} \quad (16)$$

여기서  $\mathbf{H}(f)$ 와  $\hat{\mathbf{H}}_n(f)$ 는 각각 초기 유한요소모델과  $n$  차 축소모델의 주파수응답함수를 의미한다. Fig. 7 에는 단일 공진기의 경우에 대하여 식 (13)의 전개점  $s_0 = -(2\pi f_0)^2$  을 EWG 모드가 발생하는 고유진동수인  $f_0 = 638.6$  MHz 로 설정하고 계산한 상대 진오차( $E_n$ )을 축소모델의 차수에 따라서 도시하였다. 이 결과에서 출력 주파수 대역이  $f_0$  에서 멀어지게 되면서 상대 진오차가 점차 증가되지만 축소모델의 차수를 높이면 더 넓은 주파수 대역까지 주파수응답이 일치하게 되는 특징을 관찰할 수 있다. 따라서, 이를 이용하면 주파수응답함수에서 필요한 최저( $f_l$ ) 및 최고( $f_u$ ) 관심 주파수에서의 상대 진오차를 사용자가 설정한 상대 오차 수준( $\epsilon$ )보다 작게 되도록 축소모델의 차수를 결정할 수 있다. 그러나, 이 방법을 이용하기 위해서는 초기 유한요소모델에서 계산한  $\mathbf{H}(f)$ 가 필요하다. 또 다른 방법으로 주파수응답에 대한 오차지표(error indicator)<sup>(7,13)</sup>를 이용하면 공학적 측면에서 사용자의 개입없이 자동적으로 축소모델의 최저 차수를 결정할 수 있다. 이 방법은 초기 유한요소모델에서 계산한  $\mathbf{H}(f)$ 가 필요하지 않으므로 계산시간 측면에서 더 유리하다. 축소모델의 차수가  $n$  일 때, 특정한 관심 주파수에 대한 주파수응답함수의 오차지표( $e_n$ )는 아래의 식으로 정의한다.

$$e_n(f) = \frac{\|\hat{\mathbf{H}}_n(f) - \hat{\mathbf{H}}_{n+1}(f)\|}{\|\hat{\mathbf{H}}_{n+1}(f)\|} \quad (17)$$

즉,  $E_n(f)$ 는  $n$  차 축소모델로 계산한 주파수응답함수와 초기 유한요소모델의 주파수응답함수와의 상

대오차를 의미하는 반면에  $e_n(f)$ 는  $n$  차 축소모델과  $n+1$  차 축소모델로 계산한 주파수응답함수의 상대 오차를 의미한다. 여러 가지 문제의 경우에 넓은 주파수 대역에서 다음과 같은 관계가 성립됨이 수치적 계산을 통하여 확인되었다.<sup>(7,13)</sup>

$$E_n(f) \approx e_n(f) \quad (18)$$

Fig. 8 은 각 공진기에 대하여 각각의 최고 관심 주파수( $f_u$ )에서 상대 진오차와 오차지표로 계산한 상대 오차를 비교한 결과인데, 상대 진오차가 기계정확도(machine precision)에 수렴할 때까지 식 (18)의 관계가 대부분 성립하며 그 이후에는 오차지표가 오히려 더 작은 값을 가지는 경향을 가짐을 확인할 수 있다. 따라서, 이를 활용하여 식 (19)를 통하여 상대 진오차를 계산하지 않고도 적은 계산량으로 관심 주파수에 대하여 사용자가 설정한 상대오차 수준( $\epsilon$ )에 해당되는 축소모델의 최저 차수( $n_{min}$ )를 자동적으로 구할 수 있다.

$$n_{min} = \min\{n \mid e_n(f) \leq \epsilon\} \quad (19)$$

Table 1 에는 각 MEMS 공진기에 대하여 상대오차 수준을  $\epsilon = 10^{-4}$  로 설정하였을 경우, 최고 관심 주파수( $f_u$ )에 대하여 식 (19)로 결정한 축소모델의 최저 차수( $n_{min}$ )를 나타내었다. 이 결과로부터 본 수치예제에서 초기 유한요소모델의 차수에 대한 축소모델의 최저 차수의 비는 대략 3:10,000 임을 알 수 있으며 이로써 축소모델링기법의 수치계산 측면의 효율성을 확인할 수 있다.

#### 4. 고찰

수치계산의 소요시간 및 필요한 전산자원의 관점에서  $6 \times 6$  배열형 공진기의 경우를 비교하였다. 모든 수치계산은 16 GB 메모리 및 Intel Xeon CPU 를 장착한 HP workstation xw8400 에서 수행되었다. 모델차수 축소법을 사용한 경우, ANSYS 의 시스템 행렬 추출, 축소모델링 및 축소모델을 이용한 주파수응답해석에 총 1,200 s 정도가 소요된 반면에 초기 ANSYS 유한요소모델을 direct method 으로 해석한 경우는 대략 93,000 s 가 소요되었다. 관심 주파수의 1.01 배인 644.6 MHz 까지의 고유모드를 이용하는 ANSYS 의 모드중첩법을 사용한 경우는 고유모드 9,722 개가 계산된 후, 전산자원의 용량초과로 수치계산이 중지되었다. 이때, 9,722 개의 고유모드 계산에는 대략 84,600 s 가 소요되었고 디스크의 임시파일은 130 GB 이상이 필요하였다. 위 비교를 통하여 모델차수축소법을 통한 주파수응답은 계산시간 및 전산자원의 문제로 인하여 해결할 수 없는 문제를 효율적으로 해



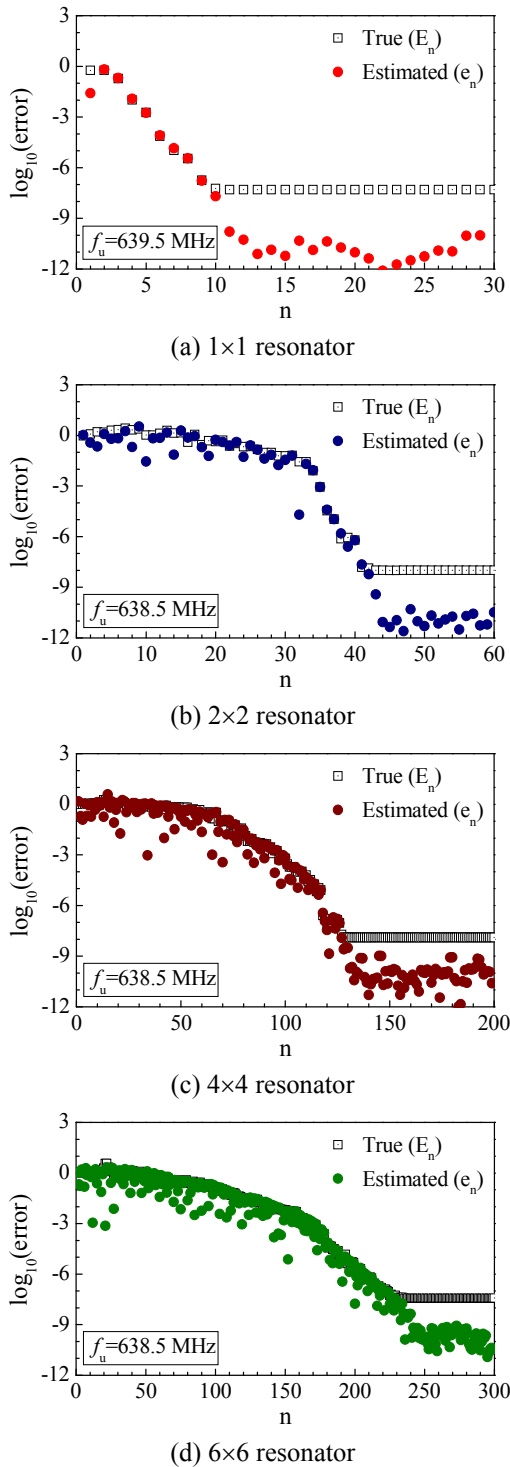


Fig. 8 Comparison between relative true errors  $E_n(f)$  and estimated errors by error indicator  $e_n(f)$

결할 수 있는 수치계산 방법임을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문은 MEMS RF 필터에 사용되는 MEMS 공

진기의 설계 및 해석에 필요한 수백 MHz 급 고주파수 대역에서의 주파수응답함수의 계산에 모델차수 축소법을 효과적으로 적용할 수 있음을 보였다. 관심 고주파수 영역에서 시스템의 전달함수를 급수전개하는 모멘트일치법과 크리토프 부공간법을 이용한 모델차수 축소법을 통하여 거의 백만 자유도 크기의 유한요소모델을 가지는 MEMS 공진기의 주파수응답함수를 매우 효율적으로 계산하였다. 이러한 축소모델링기법을 사용함으로써 다양한 배열형 MEMS 공진기의 해석과 설계가 가능하여 통과대역의 변경, 주파수응답의 대역폭의 확장 및 필터의 형상계수 향상 등 주파수응답 특성의 변경이 가능하였다. 본 논문을 통하여 다음과 같은 결론을 도출하였다.

(1) 모멘트일치법의 특징에 근거하여 고주파수 대역에 존재하는 관심주파수 영역에서 초기 시스템의 전달함수를 급수전개함으로써 초기 유한요소모델의 차수에 비하여 매우 작은 차수의 축소모델로도 고주파수 대역의 주파수응답함수를 효율적이며 정확하게 계산할 수 있었다.

(2) 참고문헌<sup>(3)</sup>의 실험결과와 같이 배열형 공진기의 경우, 단일 공진기에 비하여 통과대역은 저주파수 영역으로 이동되었고 주파수응답의 대역폭이 넓어지고, 필터의 형상계수(shape factor)가 향상된 주파수응답 특성을 수치계산으로 확인하여 향후 해석 및 최적화를 통한 설계 향상이 가능할 것이다.

(3) 고주파수의 전개점을 이용한 모델차수 축소법의 경우에도 제안된 오차지표를 이용함으로써 특정 주파수에 대한 주파수응답함수의 상대 오차값을 사용자가 설정한 후, 이를 만족하는 최소 차수의 축소모델을 자동적으로 결정할 수 있었다.

(4) 이러한 오차지표를 이용하는 모델차수 축소법은 향후에 배열형 MEMS 공진기의 대역폭 및 통과대역 향상을 위한 최적설계, 제작오차를 고려한 강건설계 등에서 효율적인 주파수응답함수 계산에 이용되어 계산시간 단축 및 전산자원의 효율적 사용에 크게 도움이 될 것이다.

후 기

이 논문은 2008 학년도 안동대학교 학술연구조성비에 의하여 연구되었음.

참고문헌

(1) Varadan, V. K., Vinoy, K. J. and Jose, K. A., 2003, *RF MEMS and their applications*, John Wiley.  
 (2) Nguyen, C. T. C., 2004, "Vibrating RF MEMS for next generation wireless applications," *Custom Inte-*

- grated Circuits Conference, Proceedings of the IEEE 2004*, pp. 257~264.
- (3) Weinstein, D., Bhawe, S. A., Tada, M., Mitarai, S., Morita, S. and Ikeda, K., 2007, "Mechanical Coupling of 2D Resonator Arrays for MEMS Filter Applications," *IEEE International Frequency Control Symposium (FCS 2007)*, Geneva, Switzerland, pp. 1362~1365.
- (4) Xie, Y., Li, S. S., Lin, Y. W., Ren, Z. and Nguyen, C. T. C., 2003, "UHF Micromechanical Extensional Wine-Glass Mode Ring Resonators," *Technical Digest, IEEE International Electron Devices Meeting*, Washington, DC, pp. 953~956.
- (5) Weinstein, D., Chandralalim, H., Cheow, L. F. and Bhawe, S.A., 2006, "Dielectrically Transduced Single-Ended to Differential MEMS Filter," *IEEE International Solid-State Circuits Conference (ISSCC 2006)*, pp. 1236~1243.
- (6) Han, J. S., 2006, "Efficient Vibration Simulation Using Model Order Reduction," *Transactions of the KSME A*, Vol. 30, No. 3, pp. 310~317.
- (7) Han, J. S., 2007, "Eigenvalue and Frequency Response Analyses of a Hard Disk Drive Actuator Using Reduced Finite Element Models," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 5, pp. 541~549.
- (8) Rudnyi, E. and Korvink, J., 2006, "Model Order Reduction for Large Scale Engineering Models Developed in ANSYS," *Lecture Notes in Computer Science*, Vol. 3732, pp. 349~356.
- (9) Su, T. J. and Craig, Jr. R. R., 1991, "Krylov Model Reduction Algorithm for Undamped Structural Dynamics Systems," *J. Guid. Control Dyn.*, Vol. 14, pp. 1311~1313.
- (10) Freund, R. W., 2000, "Krylov-Subspace Methods for Reduced-Order Modeling in Circuit Simulation," *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 123, pp. 395~421.
- (11) Han, J. S., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Efficient Optimization of Transient Dynamic Problems in MEMS Devices Using Model Order Reduction," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 822~832.
- (12) Salimbahrami, B., Lohmann, B. and Eid, R., 2006, "Order Reduction of Second Order Systems with Proportional Damping," Book of Abstracts for the Joint GAMM-SIAM Conference on Applied Linear Algebra, July 24-27, Düsseldorf, Germany, p. 168.
- (13) Bechtold, T., Rudnyi, E. B. and Korvink, J. G., 2005, "Error Indicators for Fully Automatic Extraction of Heat-Transfer Macromodels for MEMS," *J. Micromech. Microeng.*, Vol. 15, pp. 1205~1214.
- (14) Choi, D., Kim, H. and Cho, M., 2007, "Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (I)," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 2, pp. 211~220.
- (15) Choi, D., Kim, H. and Cho, M., 2007, "Iterated Improved Reduced System (IIRS) Method Combined with Sub-Structuring Scheme (II)," *Transactions of the KSME A*, Vol. 31, No. 2, pp. 221~230.
- (16) Ko, J. H., Jung, S. N., Byun, D. and Bai, Z., 2008, "An Algebraic Substructuring Using Multiple Shifts for Eigenvalue Computations," *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 22, pp. 440~449.
- (17) Wilson, E. L., Yuan, M. W., and Dickens, J. M., 1982, "Dynamic analysis by direct superposition of Ritz vectors," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp. 813~821.
- (18) Gu, J., Ma, Z. and Gregory, H., 2000, "A new load-dependent Ritz vector method for structural dynamics analyses : quasi-static Ritz vectors," *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 36, pp. 261~278.
- (19) ANSYS, 2007, *ANSYS Theory Reference 11.0*, SAS IP, Inc.