

# 가변적인 샘플링을 이용한 차원 감소법에 의한 신뢰도 해석 기법

육순민\* · 민준홍\* · 김동호\*\* · 최동훈†

(2008년 10월 14일 접수, 2009년 8월 10일 수정, 2009년 8월 18일 심사완료)

## Reliability Analysis Using Dimension Reduction Method with Variable Sampling Points

Sunmin Yook, Junhong Min, Dong-Ho Kim and Dong-Hoon Choi

**Key Words :** Reliability Analysis(신뢰도 해석), Dimension Reduction Method(차원 감소법), Non-Linearity(비선형성), Variable Sampling(가변적 샘플링), Normalized Distance(정규거리)

### Abstract

This study provides how the Dimension Reduction (DR) method as an efficient technique for reliability analysis can acquire its increased efficiency when it is applied to highly nonlinear problems. In the highly nonlinear engineering systems,  $4N+1$  ( $N$ : number of random variables) sampling is generally recognized to be appropriate. However, there exists uncertainty concerning the standard for judgment of non-linearity of the system as well as possibility of diverse degrees of non-linearity according to each of the random variables. In this regard, this study judged the linearity individually on each random variable after  $2N+1$  sampling. If high non-linearity appeared, 2 additional sampling was administered on each random variable to apply the DR method. The applications of the proposed sampling to the examples produced the constant results with increased efficiency.

### 기호설명

<b>X</b>	확률 변수 벡터
$Y(\cdot)$	시스템 응답 함수
$Y^*(\cdot)$	정규화된 시스템 응답 함수
$f(\cdot)$	결합 확률 밀도 함수
$\mu$	확률 변수에 대한 평균
$\sigma$	확률 변수에 대한 표준 편차
$ND$	정규거리

### 1. 서론

기준에는 시스템의 거동을 해석함에 있어서 해석에 고려되는 여러 변수들이 일정한 불변의 값을 가지고 있다고 가정하는 확정론적인 방법(deterministic approach)을 선호하였다. 확정론적인 방법이 사용된 이유는 첫째, 해석이 수월하며 둘째, 고정되는 값이 실제로는 평균값의 의미를 내포하고 있다는 타당성 때문이었다.

그러나 신뢰성이 매우 중요한 시스템이나, 각 변수들의 분포가 클 경우 확정론적인 해석은 잘못된 결과를 제시할 수 있다. 이를 보완하기 위해 설계자의 경험에 의존하는 안전 계수(safety factor)가 도입되었다. 그러나 안전 계수 역시 시스템의 불확실성(uncertainty)을 정확히 모사하지 못하는 한계가 존재한다.

† 책임저자, 회원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : dhchoi@hanyang.ac.kr  
TEL : (02)2220-0478 FAX : (02)2291-4070

\* 한양대학교 대학원 기계공학과

\*\* 현대자동차 연구개발총괄본부

신뢰도 해석(Reliability Analysis; RA)은 확률 및 통계적인 기법을 이용하여 설계 변수의 불확실성을 고려하고 나아가 시스템의 불확실성을 파괴 확률(Probability of Failure, PF)로 정량화하는 방법이다.<sup>(1)</sup> 다양한 공학 시스템의 해석 및 설계에 있어서 단일 부품의 신뢰도가 전체 시스템의 신뢰도와 동일하지 않으므로 여러 변수의 신뢰도를 복합적으로 고려하여 전체 결과의 신뢰 수준을 정확하게 예측하는 것이 중요하다. 이런 신뢰도 해석을 기반으로 하는 설계는 전통적인 설계 기법에 비해 많은 해석 횟수를 필요로 하기 때문에 스케일이 큰 문제나 다양한 설계 고려 사항을 가지는 실제 문제에 적용하기에 어려움이 따른다. 따라서 주어진 환경 안에서 정확하고 효율적으로 신뢰도를 구하는 기법의 개발이 중요하다.

신뢰도 해석을 하기 위해서는 시스템의 응답 함수와 각 확률 변수들에 대한 결합 확률 밀도 함수(joint Probability Density Function; joint PDF)를 신뢰 영역에서 다중 적분 해야 한다. 그러나 실제 공학 시스템에서의 다중 적분은 해석적으로 계산하기가 까다롭기 때문에 근사적으로 신뢰도를 구하는 여러 방법이 제시 되었다. 대표적인 방법으로 추출법(sampling method), 전개 방법(expansion method), 최대 가능 손상점 기반 방법(MPP-based method), 그리고 근사 적분법(approximate integration method) 등이 있다.<sup>(2)</sup>

추출법으로 몬테카를로 시뮬레이션(Monte Carlo Simulation; MCS)과 라틴 방격 추출법(Latin Hypercube Sampling; LHS)이 있다. 추출법은 무수한 실험점에서의 해석을 기반하여 비교적 정확하지만, 대단위의 해석을 요구하기 때문에 수치적인 비용이 매우 크다.<sup>(3)</sup>

전개 방법으로는 테일러 전개 급수(Taylor expansion method)와 뉴만 전개 급수(Newmann expansion method) 등이 있다. 그러나 전개 방법은 고차 항의 민감도 정보(high-order partial sensitivities)를 요구하기 때문에 민감도 정보를 구하기 힘든 여러 공학 시스템에는 적당하지 않다.<sup>(4)</sup>

최대 가능 손상점 기반 방법은 표준 정규 분포 공간상에서 파괴 면상의 점에서 한계 상태 함수(limit state function)를 근사화하여 신뢰도를 계산하는 방법이다. 대표적인 방법으로는 일차 신뢰도법(First Order Reliability Method; FORM)과 이차 신뢰도법(Second Order Reliability Method; SORM)이 있다.<sup>(5)</sup>

근사 적분법은 신뢰 영역에서 실험점(experiment point)을 선정하여 근사 함수를 만들고, 이에 대한

여 수치 적분을 실시한 뒤 직접 확률 밀도 함수나 통계적 모멘트(statistical moments)를 구하는 방법이다. 실험점을 선택하는 방법에 따라서 전조합 모멘트법(Full Factorial Moment Method; FFMM), 반응 표면 모멘트법(Response Surface Moment Method; RSMM), 개선된 반응표면 모멘트법(enhanced Response Surface Moment Method; RSMM+)으로 나눌 수 있다.<sup>(6)</sup> 최근에는 가법 분해법(additive decomposition)을 사용하여 다중 적분식을 다변수 일차 적분으로 바꾸는 차원 감소법(Dimension Reduction method; DR)이 개발되었다.<sup>(7,8)</sup> 정확성과 효율성 측면에서 더욱 향상된 차원 감소법은 다양한 분야에 응용되었다.<sup>(9)</sup>

차원 감소법은  $2N+1$ , 또는  $4N+1$  ( $N$ : number of random variables)의 샘플링을 활용한다.<sup>(10)</sup> 비선형성이 강한 많은 공학 시스템에서  $4N+1$ 의 샘플링이 적당하다고 알려져 있지만,<sup>(10,11)</sup> 아직까지  $2N+1$  이나  $4N+1$ 의 샘플링을 수행해야 할 비선형성의 근거가 명확히 확립되어 있지 않다. 또한 지금까지 시스템의 여러 유효 변수에 대하여 차등적인 샘플링이 시도되지 않았다.

본 연구에서는 새로 제안한 정규거리(Normalized Distance; ND)를 통해 신뢰 영역 안에서 각 확률 변수의 대한 응답 함수의 비선형 정도를 개별적으로 파악하였다. 이를 통하여 각 확률 변수에 대하여 가변적인 샘플링을 수행하였다. 그 결과 기존  $4N+1$ 의 샘플링 기법과 동일한 신뢰도 해석 결과를 주면서 전체 샘플링 횟수를 줄여 효율성을 증가시킬 수 있었다.

정규거리에 대한 아이디어는 3 절에서 자세히 다룰 것이다. 다음 절에서는 기존의 신뢰도 해석 기법에 대한 설명을 포함할 것이며, 4 절에는 제안한 새로운 샘플링 기법에 대하여 설명 할 것이다. 또한 5 절에는 잘 알려진 예제에 대하여 제안된 기법을 적용하여 그 효율성을 보이고, 마지막 6 절에는 전체 내용에 대한 결론을 내릴 것이다.

## 2. 차원 감소법을 이용한 신뢰도 해석

확률 변수 벡터,  $\mathbf{X} = \{X_1, \dots, X_N\}^T \in \mathbb{R}^N$  에 대하여 시스템의 응답은  $Y(\mathbf{X})$  로 나타낸다. 시스템의 응답에 대한  $l$  번째 통계적 모멘트는 일반적으로 다음과 같이 표현된다.

$$m_l = E\{Y^l(\mathbf{X})\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} Y^l(\mathbf{x}) \cdot f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \quad (1)$$

$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X}) = f_{X_1, \dots, X_N}(X_1, \dots, X_N)$  은  $\mathbf{X}$  에 대한 결합 확률 밀도 함수를 뜻하며,  $E$  는 기대값을 나타낸다. 식 (1)을 직접 해석적으로 적분하는 일은 쉽지 않기 때문에 차원 감소법은 가법 분해법을 이용하여 다중 적분식을 여러 개의 일차 적분으로 변환한다. 가법 분해법에 의한 시스템,  $Y_a$  는 식 (2)와 같이 정의할 수 있다.

$$Y(X_1, \dots, X_N) \equiv Y_a(X_1, \dots, X_N) \tag{2}$$

$$= \sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)y(\mu_1, \dots, \mu_N).$$

$N$  는 확률 변수의 개수를 뜻하며,  $\mu_j$  와  $Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N)$  는 각각  $j$  번째 확률 변수  $X_j$  에 대한 평균과 확률 응답을 의미한다.  $y(\mu_1, \dots, \mu_N)$  는 중앙점(nominal point),  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_N]^T$  에서의 응답을 나타낸다. 식 (1)에 식 (2)를 대입하면 모멘트는 식 (3)과 같이 표현할 수 있다.

$$m_l = E\{Y^l(\mathbf{X})\}$$

$$\simeq E\left\{ \sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)y(\mu_1, \dots, \mu_N) \right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) - (N-1)y(\mu_1, \dots, \mu_N) \right] \cdot f_{X_j}(X_j) \cdot dX_j. \tag{3}$$

이항 공식(binomial formula)를 사용하여 식 (3)의 우항을 식 (4)와 같이 나타낼 수 있다.

$$m_l \simeq \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} E \left[ \left\{ \sum_{j=1}^N Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) \right\}^i \right] \cdot [-(N-1)y(\mu_1, \dots, \mu_N)]^{l-i} \tag{4a}$$

$$= \sum_{i=0}^l \binom{l}{i} S_N^i [-(N-1)y(\mu_1, \dots, \mu_N)]^{l-i}$$

where

$$S_N^i = \sum_{k=0}^i \binom{i}{k} S_{N-1}^k E[Y^{i-k}(\mu_1, \dots, \mu_{N-1}, x_N)], \quad i = 1, \dots, l \tag{4b}$$

$m = i - k$  로 치환하면 기대값의 정의에 의해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$E[Y^m(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, x_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N)]$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} Y^m(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, x_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N) f_{X_j}(x_j) dx_j \tag{5}$$

$$\simeq \sum_{i=1}^m w_{j,i} y^m(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, x_{j,i}, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N).$$

식 (5)를 수치 적분하기 위해서 차원 감소법은 기존의 모멘트 구적법(moment quadrature rule)이 비선형 시스템에 있어서 수치적으로 불안정해지는 단점을 극복하기 위하여 적응 심슨 구적법(adaptive Simpson rule)을 사용하였다. 이 때 실험점 이외의 응답값은 추가 해석 없이 이동 최소 자승법(Moving Least Square; MLS)을 통해 근사하여 예측하였다. 기존의 반응 표면법(Response Surface Method; RSM)이 전역 근사화(global approximation)이라면, 이동 최소 자승법은 보다 정확한 근사 함수를 계산하기 위해 국소적인 관점으로 접근하는 방법(local approximation)이다.<sup>(12)</sup> 본 연구에서는 그 기저 함수로(basis function)로 다항식(polynomial function)을 사용하였다.

근사 모델을 생성하기 위한 실험점의 수는 차원 감소법의 효율성을 결정한다. 차원 감소법은  $kN + 1$  의 실험점을 샘플링 하여 사용한다.  $N$  은 확률 변수의 수를 나타내고,  $k$  는 각 확률 변수에 대하여 중앙점을 제외한 샘플링 하는 실험점의 수를 의미한다. 일반적으로  $k$  는 2 가 제안되었으며, 비선형성이 큰 공학 문제에서는  $k$  의 값으로 4 가 권장되었다.<sup>(10,11)</sup> 이런 형태의 샘플링을 축 실험계획법(Axial Design of Experiments; ADOE)이라 한다. Fig. 1 에 나타난 것과 같이  $2N + 1$  의 샘플링은 중앙점,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_N]^T$  과 각 확률 변수의  $\mu_j \pm 3\sigma_j$  에서 샘플링을 수행하며,  $4N + 1$  의 샘플링의 경우 추가적으로  $\mu_j \pm 1.5\sigma_j$  에서 샘플링을 한다.

$$\frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} = -\frac{\bar{x} + a}{c_0 + c_1 \bar{x} + c_x \bar{x}^2}. \tag{6}$$

수치 적분을 통해 구한 통계적 모멘트를 피어슨 시스템(Pearson system)을 통해서 확률 밀도 함수를 구하고 신뢰도를 계산할 수 있다. 피어슨 시스템은 4 차까지의 통계적 모멘트 - 평균(mean), 표준 편차(Standard Deviation; SD), 외도(skewness), 첨도(kurtosis)를 이용하여 확률 밀도 함수를 식 (6)과 같은 미분

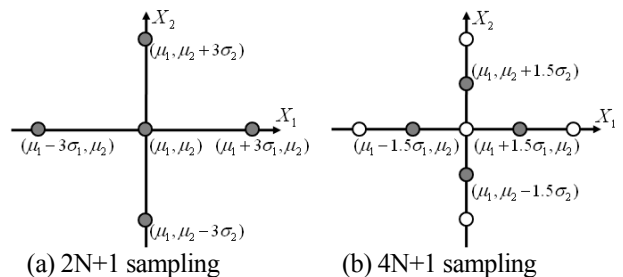


Fig. 1 Axial Design of Experiments

방정식의 형태로 표현하여 구하는 방법이다.<sup>(13)</sup>

$\bar{x}$  는  $x - \mu$  를 의미하며, 계수  $a, c_0, c_1, c_2$  는 수치 적분을 통해 구한 모멘트를 이용하여 나타낸다. 식 (7a)에서  $\mu_2, \beta_1, \beta_2$  는 식 (7b)와 같이 각각 분산(variance), 외도, 침도를 의미한다.

$$\begin{aligned} a &= c_1 \\ c_0 &= \mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^{-1} \\ c_1 &= \sqrt{\beta_1\mu_2}(\beta_2 + 3)(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^{-1} \\ c_2 &= (2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^{-1} \end{aligned} \quad (7a)$$

where,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sigma^2 \\ \beta_1 &= \gamma_1^2 = \mu_3^2\mu_2^{-3} \\ \beta_2 &= \mu_4\mu_2^{-2} \end{aligned} \quad (7b)$$

### 3. 정규거리와 비선형성의 판단

$2N+1$  의 샘플링을 이용한 차원 감소법은 비선형성이 작은 시스템에는 효과적이지만, 시스템의 비선형성이 커지면  $4N+1$  이상의 샘플링이 적당하다고 알려져 있다.<sup>(10,11)</sup> 그러나 복잡한 공학 시스템에서 비선형성을 판별하는 방법이 모호하며, 실제 시스템의 비선형성이 높더라도 신뢰 영역 안에서는 충분히 그 응답이 선형적일 수 있다. 그 원인은 첫째, 나머지 다른 확률 변수는 고정된 상태에서 개별 확률 변수에 대한 응답만을 고려하였기 때문이고, 둘째, 변동 범위가 매우 작기 때문이다. 이런 이유로 많은 복잡한 문제가 단지  $2N+1$  의 샘플링으로도 신뢰할 만한 결과를 제시한다. 본 연구에서도 실제 공학 시스템은 각 확률 변수의 변동이 작고, 변동 범위 내 응답의 변화가 단봉(unimodal), 또는 단조(monotonic) 증가나 감소의 형태라고 가정하였다.

무엇보다 기존의  $2N+1$  또는  $4N+1$  의 샘플링은 시스템에 고려되는 모든 확률 변수에 대하여 동일한 샘플링 기법을 적용하였다. 본 연구에서는 비선형성이 강한 시스템일지라도 신뢰 영역 안에서는 선형적인 응답을 보이는 확률 변수가 존재함을 밝히고 차등적인 샘플링을 제시하였다.

비선형성 여부를 판단하기 위하여 초기  $2N+1$  의 샘플링을 수행한다.  $j$  번째 확률 변수에 대하여  $\mu_j - 3\sigma_j, \mu_j, \mu_j + 3\sigma_j$  에서 샘플링을 수행하여 응

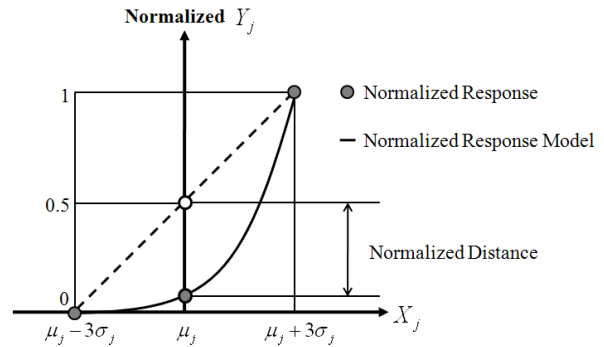


Fig. 2 Normalized Distance

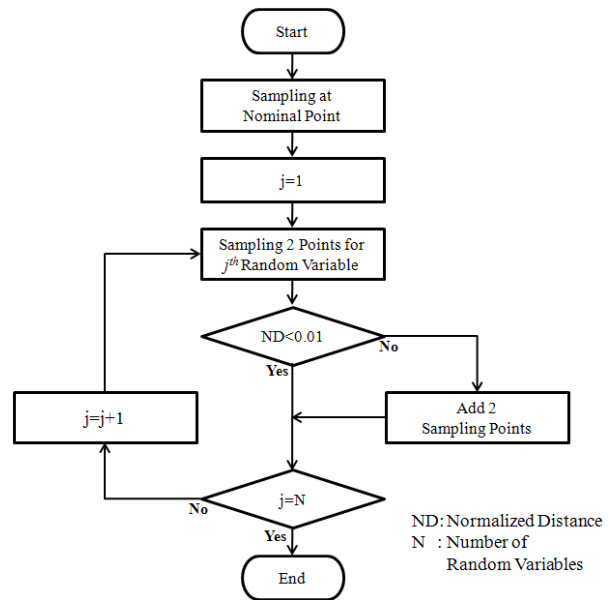


Fig. 3 Overall Process of Variable Sampling

답값을 구하고 식 (8)과 같이 응답값을 정규화 하였다.

$$Y_j^*(X_j) = \frac{1}{Y_j(\mu_j + 3\sigma_j) - Y_j(\mu_j - 3\sigma_j)} (Y_j(X_j) - Y_j(\mu_j - 3\sigma_j)) \quad (8)$$

where,  $Y_j = Y_j(X_j) = Y(\mu_1, \dots, \mu_{j-1}, X_j, \mu_{j+1}, \dots, \mu_N)$ .

식 (8)에 의해  $Y_j(\mu_j - 3\sigma_j)$  는 0, 그리고  $Y_j(\mu_j + 3\sigma_j)$  는 1로 정규화 된다. 정규거리는 식 (9)와 같이 이들의 평균값인 0.5 와  $Y_j(\mu_j)$  를 정규화한 값과의 차이로 정의하였다.

$$ND_j = \left| 0.5 - \frac{Y_j(\mu_j) - Y_j(\mu_j - 3\sigma_j)}{Y_j(\mu_j + 3\sigma_j) - Y_j(\mu_j - 3\sigma_j)} \right| \quad (9)$$

개별 확률 변수에 대하여 시스템의 응답이 선형이라면 정규거리는 0 이 된다. 즉, 정규거리의 값이 커질수록 비선형성은 증가한다고 판단할 수 있다. 본 연구에서는 전산 또는 실제 실험에서 얻을 수 있는 오차를 고려하여 선형과 비선형을 판단하는 기준을 0.01 로 설정하였다.

#### 4. 가변적 샘플링 기법

가변적인 샘플링 기법은 다음과 같은 4 단계의 절차를 따른다.  $j$  는 각 확률 변수의 번호를 의미하며 단계 1 를 제외한 단계 2 에서 단계 4 까지는 모든 확률 변수의 수,  $N$  만큼 반복적으로 수행된다. 전체 과정을 순서도로 표현하면 Fig. 3 과 같다.

##### Step 1

각 확률 변수에 대하여 동일한 중앙점,  $\mu = [\mu_1, \dots, \mu_j, \dots, \mu_N]^T$  에서 응답값,  $y(\mu_1, \dots, \mu_N)$  을 구한다. 또한  $j$  를 1 로 설정한다.

##### Step 2

$j$  번째 확률 변수  $X_j$  에 대하여  $\mu_j - 3\sigma_j$ ,  $\mu_j + 3\sigma_j$  에서 샘플링을 수행하여 응답값을 구하고 식 (8)과 같이 응답값을 정규화 한다.

##### Step 3

정규거리의 크기가 0.01 보다 작으면 충분히 선형적이라 판단하여, 그 확률 변수에 대해서는 실험점 3 개로 근사 함수를 생성하여 수치 적분을 수행한다. 그리고  $j = j + 1$  로 갱신하여 단계 2 로 간다.

##### Step 4

정규거리가 0.01 보다 크면 추가적으로  $\mu_j - 1.5\sigma_j$  와  $\mu_j + 1.5\sigma_j$  에서 샘플링을 수행하여 총 5 개의 실험점으로 근사 모델을 생성하고 수치 적분을 수행한다. 또한,  $j = j + 1$  로 갱신하여 단계 2 로 간다.

#### 5. 예 제

본 절에는 3 개의 잘 알려진 신뢰도 해석에 관한 문제를 선정하여 제안한 샘플링 기법을 검증하였다.

##### 5.1 예제 1

예제 1 은 이변수 철면 형태(convex type)의 함수이다.<sup>(14)</sup> 한계 상태 함수는 식 (10)와 같이 표현

**Table 1** Property of Random Variables for Example 1

	Distribution	Mean	SD
$X_1$	Normal	6.0	0.8
$X_2$	Normal	6.0	0.8

<sup>a</sup> SD; Standard Deviation

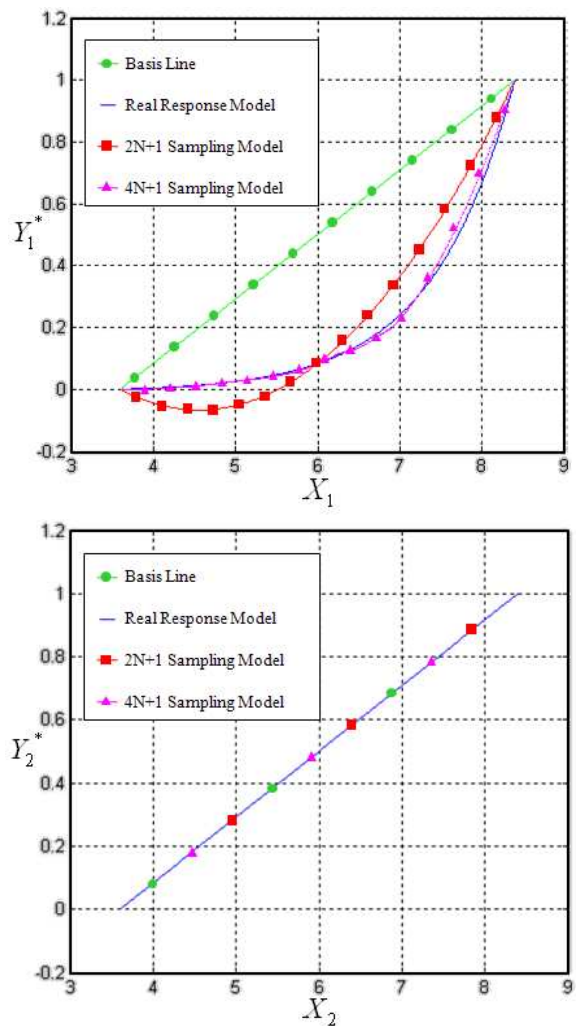
**Table 2** Results of Reliability Analysis for Example 1

	MCS	eDR		
		2N+1	4N+1	Proposed
Mean	2.493	2.446	2.502	2.502
SD	0.932	1.076	0.936	0.936
Skewness	-0.495	-0.444	-0.475	-0.475
Kurtosis	5.037	3.600	4.334	4.334
<b>PF</b>	9.100E-3	2.06E-2	1.120E-2	1.120E-2
Function Calls	1,000,000	5	9	7

<sup>a</sup> Results are from 1,000,000 Sampling Using MATLAB™

<sup>b</sup> SD; Standard Deviation

<sup>c</sup> PF; Probability of Failure



**Fig. 4** Normalized Response for each Random Variables in Reliable Design Space for Example 1

**Table 3** Property of Random Variables for Example 2

	Distribution	Mean	SD
$X_1$	Weibull	10.0	3.0
$X_2$	EVD <sup>a</sup>	5.0	1.5
$X_3$	Lognormal	10.0	3.0
$X_4$	EVD	10.0	3.0
$X_5$	Lognormal	5.0	1.5
$X_6$	Weibull	10.0	3.0

<sup>a</sup> Type I Extreme Value Distribution

<sup>b</sup> SD; Standard Deviation

**Table 4** Normalized Distance for each Random Variables

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$
ND	0.0000	0.0000	0.0000	0.4596	0.4233	0.4787

<sup>a</sup> ND; Normalized Distance

**Table 5** Results of Reliability Analysis for Example 2

	MCS	eDR		
		2N+1	4N+1	Proposed
Mean	4.993E6	5.591E6	4.890E6	4.890E6
SD	5.641E6	8.127E6	5.427E6	5.427E6
Skewness	3.190	1.185	2.779	2.779
Kurtosis	21.18	4.987	15.21	15.21
<b>PF</b>	5.700E-3	1.399	0.000	0.000
Function Calls	1,000,000	13	25	19

<sup>a</sup> Results are from 1,000,000 Sampling Using MATLAB™

<sup>b</sup> SD; Standard Deviation

<sup>c</sup> PF; Probability of Failure

되며 각 확률 변수에 대한 정보는 Table 1 에 나타내었다.

$$g(\mathbf{X}) = -\exp(X_1 - 7) - X_2 + 9. \quad (10)$$

Fig. 4 와 같이 각 확률 변수에 대하여 정규화된 신뢰 영역 안에서 경향을 보면,  $X_1$  의 응답은 비선형성이 강한 반면  $X_2$  는 선형적임을 알 수 있다.

두 확률 변수에 대하여 정규거리를 구하면, 비선형성이 큰  $X_1$  은 정규거리의 값이 0.4168 인 반면  $X_2$  는 0 이다. 제안한 방법은  $X_1$  에 대하여 추가적으로 2 점에서 샘플링 하게 된다. Fig. 4 와 같이  $X_1$  의 응답은 2N+1 보다 4N+1 의 샘플링을 수행하여 근사화 했을 때, 실제 시스템을 잘 모사함을 알 수 있다.

제안한 샘플링 기법의 효율성을 판단하기 위하

여 기존의 샘플링 기법과 MCS 결과를 비교해 보았다. Table 2 에서와 같이 2N+1 의 샘플링 보다 4N+1 의 샘플링 결과가 MCS 의 결과와 유사하였으며, 제안된 샘플링 기법은 4N+1 의 샘플링과 동일한 결과를 주면서, 이에 비해 28% 감소된 해석을 수행함을 알 수 있다.

5.2 예제 2

예제 2 는 비선형성이 강한 다변수 함수로 각 확률 변수가 다양한 형태의 분포를 갖는다.<sup>(15)</sup> 한계 상태 함수는 식 (11)와 같이 표현되며, 각 확률 변수에 대한 정보는 Table 3 에 나타내었다.

$$g(\mathbf{X}) = 1 + 1.5X_1X_4^5 - 2X_2X_5^4 + X_3X_6^6. \quad (11)$$

예제 2 의 6 개 확률 변수에 대하여 정규거리를 구하면 Table 4 와 같다.  $X_1, X_2, X_3$  는 정규거리의 값이 0 이며 그 응답이 선형적임을 예상할 수 있다. 실제로 3 개의 확률 변수에 대하여  $\pm 3\sigma_j$  의 신뢰 영역에서 경향을 보면 Fig. 5 와 같이 직선의 형태이다. 그러나 정규거리가 비교적 큰  $X_4, X_5, X_6$  은 비선형성이 존재함을 알 수 있다.

예제 2 에 대하여 기존의 샘플링 기법과 제안한 샘플링 기법을 적용하여 그 결과를 Table 5 에서와 같이 비교하였다. 4N+1 의 샘플링을 수행했을 때의 결과가 2N+1 의 샘플링 보다 더 정확했으며, 제안된 샘플링 기법은 4N+1 의 샘플링과 같은 결과를 주었다. 그러나 확률 변수에 대하여 가변적으로 샘플링을 수행했을 때의 총 샘플링 횟수는 19 번으로, 4N+1 샘플링을 수행했을 때의 25 번 보다 31% 감소함을 알 수 있다.

5.3 예제 3

예제 3 는 비선형성이 높은 항들이 교호(coupling) 되어 있는 형태로, 한계 상태 함수는 식 (12)와 같이 표현되며, 각 확률 변수에 대한 정보는 Table 6 에 나타내었다.

$$g(\mathbf{X}) = (e^{X_1} \cdot \sin X_2)^{\ln X_3} - 3. \quad (12)$$

예제 3 의 경우에도 Table 7 에서와 같이 4N+1 의 샘플링의 결과가 2N+1 의 샘플링의 결과 보다 좋음을 알 수 있다. 또한 제안한 샘플링 기법은 기존의 4N+1 의 샘플링에 상응하는 결과를 주면서 전체 샘플링 횟수가 감소됨을 알 수 있다.

예제 3 을 통해서 제안된 기법은 4N+1 샘플링

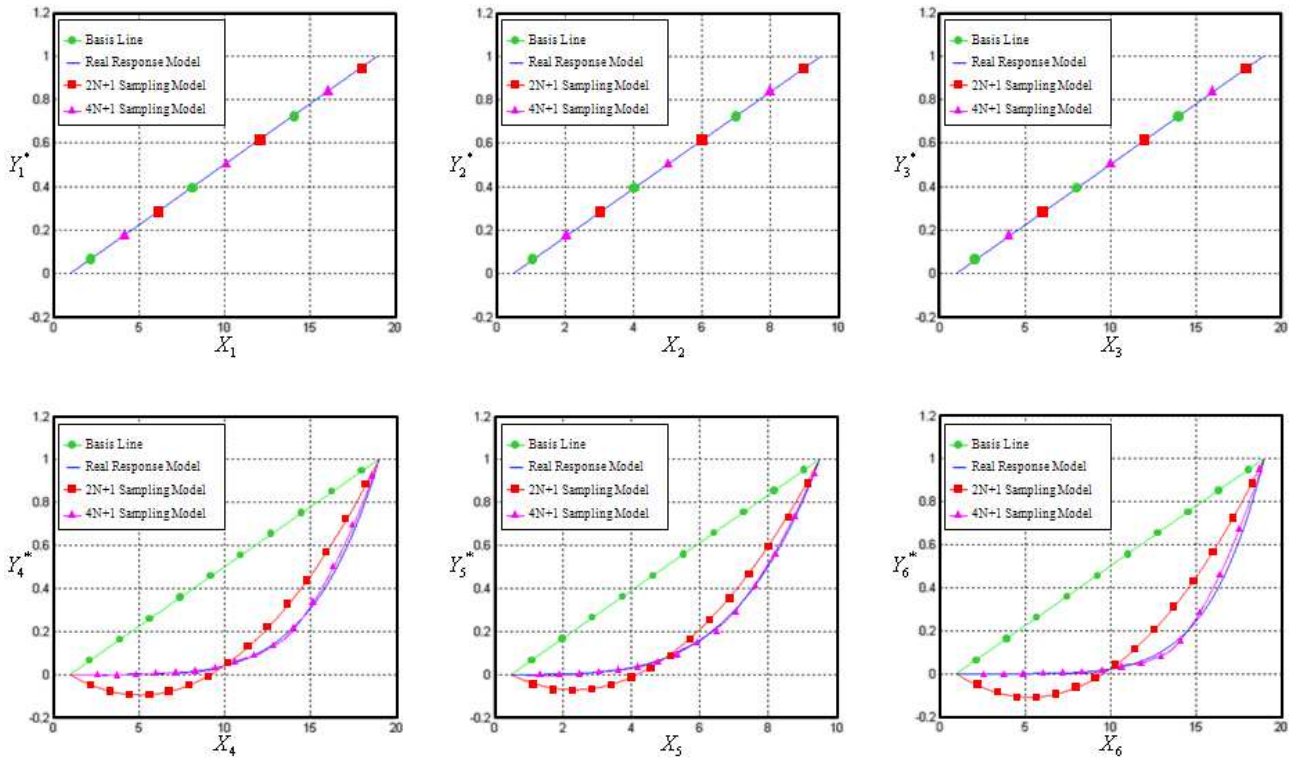


Fig. 5 Normalized Response for each Random Variables in Reliable Design Space for Example 2

Table 6 Property of Random Variables for Example 3

	Distribution	Mean	SD
$X_1$	Normal	2.0	0.1
$X_2$	Normal	2.0	0.1
$X_3$	Normal	2.0	0.1

<sup>a</sup> SD; Standard Deviation

Table 7 Results of Reliability Analysis for Example 3

	MCS	eDR		
		2N+1	4N+1	Proposed
Mean	0.750	0.748	0.748	0.748
SD	0.460	0.459	0.458	0.458
Skewness	0.422	0.090	0.092	0.090
Kurtosis	3.340	3.018	3.020	3.029
<b>PF</b>	3.783	4.113	4.091	4.095
Function Calls	1,000,000	7	13	11

<sup>a</sup> Results are from 1,000,000 Sampling Using MATLAB™

<sup>b</sup> SD; Standard Deviation

<sup>c</sup> PF; Probability of Failure

## 6. 결론

본 연구에서는 효과적인 신뢰도 해석 기법으로 알려진 차원 감소법을 이용함에 있어서 새로운 샘플링 기법을 적용하였다. 제안한 샘플링 기법은 정규거리의 개념을 도입하여 차등적인 샘플링을 통해 신뢰도 해석을 수행하였다. 차등적인 샘플링은 기존의  $4N+1$ 의 샘플링 기법에 준하는 결과를 주면서 샘플링 횟수를 줄여 전체 효율성을 증가시킬 수 있었다.

제안한 방법은 설계 변수의 수가 많을수록, 그리고 시스템 안에 선형성과 비선형성이 혼재될수록 더욱 효과적으로 사용할 수 있다. 비선형성의 판단과 가변적인 샘플링 기법은 신뢰도 해석에 있어서 좀 더 효율적으로 접근할 수는 있는 근거를 제시하였다.

본 연구에서는  $2N+1$ 의 샘플링 후 응답의 비선형성을 판단하고 비선형성이 클 때는  $4N+1$ 의 샘플링을 택했지만, 향후 연구에서는 변형된  $3N+1$  또는  $6N+1$ 의 샘플링이 가능할 것이다. 또한, 정규거리 이외에 효과적으로 선형성을 판단하는 기준을 연구하고자 한다.

의 절대적인 정확성을 떠나서 언제나 그에 상응하는 결과를 보장함을 확인할 수 있다.

## 후 기

본 연구는 최적설계기술연구센터(iDOT)와 두뇌 한국 21(BK 21) 사업에 의하여 지원 받았습니다.

## 참고문헌

- (1) Wu, Y. -T., 1994, "Computational Methods for Efficient Structural Reliability and Reliability Sensitivity Analysis," *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 8.
- (2) Choi, K. S., 2007, "Reliability-Based Design Optimization Using Kriging Metamodel with Latin Hypercube Sampling," M. S. thesis, Hanyang University.
- (3) Rubinstein, 1981, "Simulation and the Monte Carlo Method."
- (4) Kleiber, 1992, "The Stochastic Finite Element Method."
- (5) Hasofer and Lind, 1974, "An Exact and Invariant First-Order Reliability Format."
- (6) Kim, D. H., 2006, "Reliability Analysis Using Enhanced Response Surface Augmented Moment Method (RSMM+)," M. S. thesis, Hanyang University.
- (7) Xu, H. and Rahman, S., 2005, "Decomposition Methods for Structural Reliability Analysis," *Prob. Eng. Mech.*, Vol, 20, Issue 3, pp. 239~250.
- (8) Rahman, S. and Xu, H., 2004, "A Univariate Dimension-Reduction Method for Multi-Dimensional Integration in Stochastic Mechanics," *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 19, Issue 4, October 2004, pp.393~408.
- (9) Choi, J., Lee, W., Park, J. and Youn, B., 2007, "A Study on Robust Design Optimization of Layered Plates Bonding Process Considering Uncertainties," *Trans. Of the KSME A*, Vol 31, Issue 1. pp. 113~120
- (10) Youn, B. D., Zhimin, X., Wells, L. and Lamb, D., 2006, "The Enhanced Dimension-Reduction (eDR) Method for Reliability-Based Robust Design Optimization," Submitted, International Journal of Numerical Methods in Engineering, and AIAA-MAO, AIAA-2006-6977, Portsmouth, Virginia, Sept. 6-8.
- (11) Youn, B. D., Zhimin, X., Wells, L. and Wang Pingfeng, 2006, "Enhanced Dimension-Reduction (eDR) Method for Sensitivity-Free Uncertainty Quantification," 11th AIAA /ISSMO 6~8 Sept. 2006, Portsmouth, Virginia.
- (12) Kim, B. S., Lee, Y. B. and Choi, D. H., 2007, "Comparison Study on the Accuracy of Metamodeling Techniques for Non-Convex Functions," Proceeding of KSME 2007, pp. 979~984.
- (13) Johnson, 1995, "Continuous Univariate Distributions."
- (14) Choi, Youn and Park, 2003, "Hybrid Analysis Method for Reliability-based Design Optimization," journal of mechanical design, ASME.
- (15) Wu, Y. -T., 1987, "Demonstration of a New, Fast Probability Integration Method for Reliability Analysis," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 109, pp. 24~28.