

# 탄소나노튜브의 비선형 안정성 해석

## Nonlinear Stability Characteristics of Carbon Nanotubes

최종운\*·송오섭†

Jongwoon Choi and Ohseop Song

(2009년 3월 30일 접수 ; 2009년 6월 4일 심사완료)

**Key Words** : Carbon Nanotube(탄소나노튜브), Nanopipe(나노파이프), Flutter(플러터), Divergence(발산), Critical Flow Velocity(임계유속), Nonlinearity(비선형)

### ABSTRACT

In this paper, the nonlinear dynamics and the stability of nanopipes conveying fluid and modelled as a thin-walled beam is investigated. Effects of boundary conditions, geometric nonlinearity, non-classical transverse shear and rotary inertia are incorporated in this study. The governing equations and the three different boundary conditions are derived through Hamilton's principle. Numerical analysis is performed by using extend Galerkin method which enables us to obtain more exact solutions compared with conventional Galerkin method. Variations of critical flow velocity for different boundary conditions of carbon nanopipes are investigated and compared with linear case.

### 1. 서론

탄소나노튜브(Carbon Nano Tubes ; 이하 CNT)는 그 우수한 전기적, 기계적, 물리적, 화학적 특성 때문에 나노전기기계, 나노파이프, 나노센서, 나노작동기, 나노복합재료 등을 위한 구조요소로서 크게 각광받고 있다. CNT는 완벽한 중공 실린더 구조와 우수한 기계적 특성으로 인하여 가스를 저장하기 위한 나노 컨테이너와 유체를 수송하는 나노파이프(nanopipe)로서 사용될 수 있는 가능성을 지니고 있다. 특히, 나노파이프는 내부를 흐르는 유동 유체의 속도에 따라 그 거동 특성이 크게 달라지므로 이에 대한 연구가 필수적이다. 그러나 CNT의 유동유발 진동 특성에 관한 연구는 아직 활발하지 않다.

나노스케일 구조에 대한 실험은 그 제어가 어려우며, 미시적인 시스템을 다루는 분자동역학 시뮬레

이션은 거시적인 시스템에 비해 많은 비용이 들고 특히 접근이 쉽지 않다. 그리하여, 분자구조역학법 또는 연속체 탄성모델이 정적 처짐, 좌굴, 열진동, 공진주파수와 모드 등과 같은 CNT의 기계적 거동 연구에 광범위하고 성공적으로 사용되어왔다<sup>(1-7,10)</sup>.

Karl Sohlberg와 그의 공동 연구자들<sup>(1)</sup>은 연속체 모델링을 CNT의 진동에 적용하여 CNT 진동 분석에 관한 방법으로서 다양하고 효과적인 대안을 제시하였으며, 분자 진동학 연구의 실효성을 위하여 연속체 방법의 필요성을 주장하였다.

Q. Wang과 V. K. Varadan<sup>(2)</sup>은 다양한 압축하중 상태에서 SWCNT 안정성 해석을 위해 탄성보와 셸 모델을 사용하였으며, Xi Chen과 G. Cao<sup>(3)</sup>는 단일벽 탄소나노튜브(single-walled carbon nanotubes ; 이하 SWCNT)의 변형 거동을 연구하기 위해, 분자동역학의 한계를 이유로 그에 상응하는 3가지 연속체 방법을 제시하고 그 결과가 분자동역학을 사용한 결과와 유사함을 보여주었다.

I. R. Fernandez와 그의 공동 연구자들<sup>(4)</sup>은 분자 구조역학을 사용하여 구한 양단 자유 SWCNT의

† 교신저자; 정회원, 충남대학교 기계공학과  
E-mail : songos@cnu.ac.kr  
Tel : (042)821-5650, Fax : (042)822-5642

\* 충남대학교 대학원 기계공학과

결과와 오일러 보 이론에 기초한 결과를 비교하여 종횡비가 클수록, 원자수가 증가할수록 두 방법의 결과가 유사하다는 것을 밝히고, 작은 종횡비의 CNT를 해석할 경우, 두 방법을 이용한 결과의 상이성을 줄이기 위해 전단 변형과 회전 관성 효과를 고려하여야 함을 주장하였다.

또한, C. M. Wang과 그의 공동 연구자들<sup>(5)</sup>은 작은 종횡비를 가진 나노파이프의 해석을 위해, 티모센코 보(이하 TB) 모델을 사용하여 MWCNT (multi-wall CNT)의 자유진동해석을 하였으며 DQ 방법(differential quadrature method)을 사용하여 종횡비와 경계 조건을 달리하며 운동방정식을 풀어 오일러 보의 결과와 비교하였다.

J. Yoon과 그의 공동 연구자들은 양단 단순지지, 양단 고정 각각의 경우, 오일러 보(이하 EB) 이론을 적용하여 나노파이프 내부를 흐르는 유체가 자유진동에 미치는 영향, 나노파이프의 유체 유동에 의한 구조적 불안정성<sup>(6)</sup>과 외팔보 나노파이프의 유체 유동에 의한 플러터 불안정<sup>(7)</sup>에 관하여 연구하였다.

최근 TB이론에 기초하여 외팔보 나노파이프의 유체 유발 진동에 의한 플러터 불안정성<sup>(8)</sup>과 경계조건에 따른 나노파이프의 안정성 특성에 관한 연구<sup>(9)</sup>를 수행하였으나, 상기 연구들에서 볼 수 있듯이, 선형 시스템을 대상으로 하여 수행되었다. 물론, Y. M. Fu와 그의 공동 연구자들<sup>(10)</sup>은 CNT에 관한 비선형 진동연구를 수행하였으나, EB이론에 기초하여 단순한 CNT의 진동만을 연구한 것일 뿐, CNT 유체 유발 진동에 관한 TB이론에 기초한 비선형 연구는 전무하다.

이에 이 연구에서는 전단 변형과 회전 관성의 영향을 고려한 박판 보 모델(thin-walled beam model)<sup>(11,14,15)</sup>에 기초하여 나노파이프의 비선형 유체 유발 진동에 관한 연구를 수행하여, 양단 단순지지보, 양단 고정보, 외팔보인 각각의 경계 조건에 따른 나노파이프의 다이버전스 및 플러터 불안정성 경향을 도출하고 이들의 결과를 선형 나노파이프의 유체 유발 진동에 관한 결과와 비교, 고찰한다<sup>(11~13)</sup>.

## 2. 구조 모델링

### 2.1 박판 보 모델의 변위장

나노파이프 내의 한 점 A의 굽힘진동에 관한 변

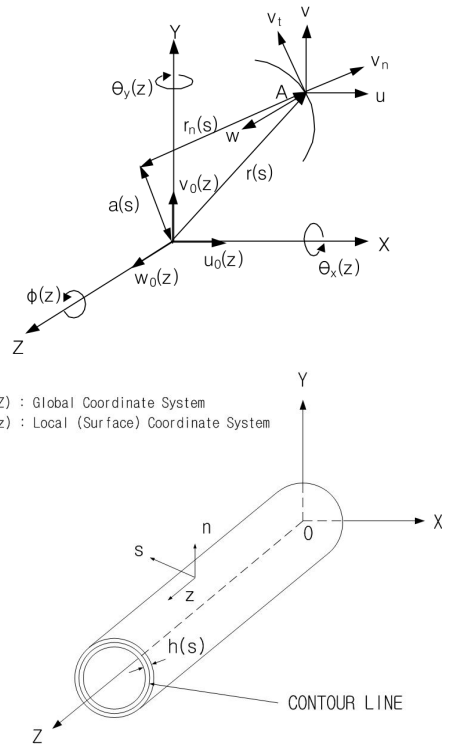


Fig. 1 Kinematic variables, coordinate system and configuration of thin-walled beam

위 벡터를 6개의 변위변수(kinematic variables)로 표시하면 다음과 같다(Fig. 1).

$$\begin{aligned}
 u(s, z, t) &= u_o(z, t), \quad v(s, z, t) = v_o(z, t) \\
 w(s, z, n, t) &= \theta_Y(z, t) [X(s) + n \frac{dY}{ds}] \\
 &\quad + \theta_X(z, t) [Y(s) - n \frac{dX}{ds}]
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기에서,  $u_o, v_o$ 는 각각 X, Y축 방향의 병진 변위이며,  $\theta_X, \theta_Y$ 는 X, Y축에 관한 회전 변위이다. 그리고  $(n, s, z)$  좌표는 각각 반경방향, 원주방향, 축방향 좌표를,  $t$ 는 시간을 나타낸다<sup>(14)</sup>. 이 연구에서는 X-Y 평면에서의 굽힘운동만을 고려하므로 Fig. 1의 Z-방향 병진 변위  $w_0$ 와 비틀림 변위  $\phi$ 는 식(1)에 나타나지 않는다.

### 2.2 비선형 변형률-변위 관계

나노파이프의 변형률-변위 관계는 다음과 같은 기하학적 비선형 그린-라그랑지 변형률 텐서 식으로

부터 유도된다.

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_r}{\partial x_i} \frac{\partial V_r}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

식(2)에 식(1)을 대입하여 정리하면, 다음과 같이 비선형 변위변형률 관계식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \epsilon_{zz} &= \epsilon_{zz}^0 + n\epsilon_{zz}^n = w_0' + y\theta_x' + x\theta_y' \\ &\quad + \frac{1}{2}(u_0'^2 + v_0'^2) \\ &\quad + n \left( \frac{dy}{ds}\theta_y' - \frac{dx}{ds}\theta_x' \right) \\ \gamma_{sz} &= \gamma_{sz}^0 = \theta_y \frac{dx}{ds} + \theta_x \frac{dy}{ds} + u_0' \frac{dx}{ds} + v_0' \frac{dy}{ds} \\ \gamma_{nz} &= (\theta_y + u_0') \frac{dy}{ds} - (\theta_x + v_0') \frac{dx}{ds} \end{aligned} \quad (3)$$

### 2.3 구성방정식

나노파이프의 (n,s,z) 좌표에 관한 응력-변형률 관계는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{ss} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{nn} \\ \sigma_{nz} \\ \sigma_{sn} \\ \sigma_{sz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{ss} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{nn} \\ \gamma_{zn} \\ \gamma_{sn} \\ \gamma_{sz} \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)의 3D 응력-변형률 관계로부터 2D 응력-변형률 관계식을 유도하기 위하여 3D 응력을 두계방향(n)에 대하여 적분하여 s와 z만의 함수인 합응력과 합모멘트를 구하며, 합응력과 합모멘트로 나타낸 구성방정식은 다음과 같다<sup>(14)</sup>.

$$\begin{bmatrix} N_{zz} \\ N_{sz} \\ L_{zz} \\ N_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{zz}^o \\ \gamma_{sz}^o \\ \epsilon_{zz}^n \\ \gamma_{nz} \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 2.4 운동방정식과 경계조건

다음과 같은 해밀턴의 변분원리를 이용하여 나노파이프의 운동방정식과 경계조건을 유도하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_1} (-\delta V + \delta K + \delta W_f) dt = 0 \quad (6) \\ t &= t_0, t = t_1 \text{에서 } \delta u_o = \delta v_o = \delta \theta_y = \delta \theta_x = 0 \end{aligned}$$

식(6)의 나노파이프의 변형에너지 V는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \int_C [N_{zz} \epsilon_{zz}^o + L_{zz} \epsilon_{zz}^n \\ &\quad + N_{sz} \gamma_{sz}^o + N_{nz} \gamma_{nz}] ds dz \end{aligned} \quad (7)$$

식(6)에서 운동에너지 K는 나노파이프의 운동에너지  $K_p$ 와 유체유동의 운동에너지  $K_f$ 의 합으로 표현된다.

나노파이프의 운동에너지는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} K_p &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial t} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] d\tau \end{aligned} \quad (8)$$

파이프의 변형에 의한 2차 유동이 없다고 가정할 때, 유체의 운동은 파이프의 중심선을 따라 움직인다. 따라서 변형 후 파이프 중심선의 임의의 점에 대한 위치벡터를  $\vec{R}_{pc}$ , 같은 점에서 유체의 위치벡터를  $\vec{R}_{f/pc}$ 라 할 때 관계식은 다음과 같다(Fig. 2).

$$\vec{R}_f = \vec{R}_{pc} + \vec{R}_{f/pc} \quad (9a)$$

여기에서,  $\vec{R}_{pc}$ 와  $\vec{R}_{f/pc}$ 는 다음과 같다.

$$\vec{R}_{pc} = u\vec{I} + v\vec{J} + (z+w)\vec{K} \quad (9b)$$

$$\vec{R}_{f/pc} = x_b\vec{i}_b + y_b\vec{j}_b \quad (9c)$$

$\theta_y, \theta_x \ll 1$ 일 때, 식(9b), (9c)의  $(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ 와  $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$  사이의 좌표변환식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \vec{i}_b \\ \vec{j}_b \\ \vec{k}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta_y \\ 0 & 1 & \theta_x \\ -\theta_y & -\theta_x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} \quad (10)$$

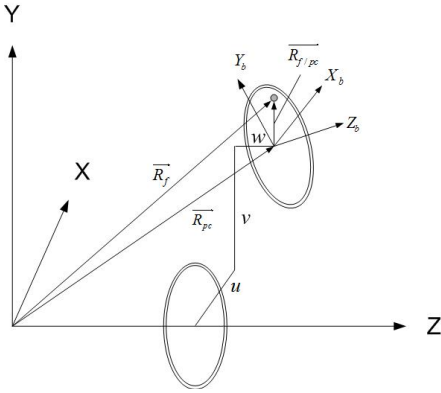


Fig. 2 Displacement of nanopipe conveying fluid

그러므로 유동유체의 운동에너지는 다음과 같으며

$$K_f = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho_f \vec{R}_f \cdot \vec{R}_f d\tau \quad (11)$$

끝단(z=L)에서 유속 U에 의한 가상일(\$\delta W\_f\$)은 비보존계이므로 다음과 같다.

$$\delta W_f = - \int_0^{2\pi} \int_0^{(R-\frac{h}{2})} \rho_f U[(\dot{u}_0 + Uu_0')\delta u_0 + (v_0 + Uv_0')\delta v_0]_{z=L} r dr d\theta \quad (12)$$

식 (7), (8), (11), (12)을 해밀턴의 원리 (6)에 대입하여 정리하면 X-방향의 굽힘운동에 관한 다음과 같은 비선형 운동방정식과 경계조건을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \delta u_o : & \frac{3}{2} a_{11} u_o'^2 u_o'' + a_{44} (u_o'' + \theta_Y') \\ & = b_1 \ddot{u}_o + m_f \ddot{u}_o + 2m_f U \dot{u}_o' + m_f U^2 u_o'' \\ \delta \theta_Y : & a_{22} \theta_Y'' - a_{44} (u_o' + \theta_Y) = (b_5 + b_{15}) \ddot{\theta}_Y \end{aligned} \quad (13)$$

양단 단순 지지 경계조건

$$\text{at } z = 0 \text{ and } L ; u_o = a_{22} \theta_Y' = 0 \quad (14)$$

양단 고정 경계조건

$$\text{at } z = 0 \text{ and } L ; u_o = \theta_Y = 0 \quad (15)$$

외팔보 경계조건

$$\text{at } z = 0 ; u_o = \theta_Y = 0$$

$$\begin{aligned} \text{at } z = L ; & \frac{1}{2} a_{11} u_o'^3 + a_{44} (u_o' + \theta_Y) = 0, \quad (16) \\ & a_{22} \theta_Y' = 0 \end{aligned}$$

여기에서,

$$a_{11} = \int_C [K_{11}] ds \quad (17a)$$

$$a_{22} = \int_C [K_{11} x^2 + K_{44} (\frac{dy}{ds})^2] ds \quad (17b)$$

$$a_{44} = \int_C [K_{22} (\frac{dx}{ds})^2 + A_{44} (\frac{dy}{ds})^2] ds \quad (17c)$$

는 각각 축방향강성, 굽힘강성, 전단강성이며, 또한 \$b\_1, (b\_5 + b\_{15})\$는 각각 나노파이프의 단위길이 당 질량과 관성모멘트를 나타낸다<sup>(13)</sup>.

### 3. 수치 해석

#### 3.1 무차원화(Dimensionless)

다음과 같이 무차원화된 파라미터를 가정한다.

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{z}{L}, \quad \bar{\eta}(\xi, T) = \frac{u_o(z, t)}{L}, \quad \bar{\theta}_Y(\xi, T) = \theta_Y(z, t), \\ \beta &= \frac{m_f}{b_1 + m_f}, \quad \bar{u} = \sqrt{\frac{m_f L^2}{a_{22}}} U, \quad \sigma = \frac{a_{22}}{a_{44} L^2}, \\ T &= \sqrt{\frac{a_{22}}{b_1 + m_f}} \frac{t}{L^2}, \quad \gamma = \left( \frac{b_5 + b_{15}}{b_1 + m_f} \right) \frac{1}{L^2}, \quad (18) \\ \nu &= \frac{a_{11}}{a_{44}} \end{aligned}$$

여기에서 \$m\_f\$는 유체의 단위길이 당 질량이다.

식 (18)을 운동방정식 (13) 및 경계조건 (14-16)에 대입하면, 다음과 같은 무차원화된 비선형식을 유도할 수 있다.

운동방정식

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \nu \bar{\eta}'^2 \bar{\eta}'' + \bar{\eta}'' + \bar{\theta}_Y' &= \sigma \bar{\eta} + 2\sigma \bar{u} \beta^{\frac{1}{2}} \bar{\eta}' + \sigma \bar{u}^2 \bar{\eta}'' \\ \sigma \bar{\theta}_Y'' - \bar{\theta}_Y - \bar{\eta}' &= \sigma \gamma \bar{\theta}_Y \end{aligned} \quad (19)$$

양단 단순 지지 경계조건

$$\text{at } \xi = 0 \text{ and } 1 ; \bar{\eta} = \sigma \bar{\theta}_Y' = 0 \quad (20)$$

양단 고정 경계조건

$$\text{at } \xi = 0 \text{ and } 1 ; \bar{\eta} = \bar{\theta}_Y = 0 \quad (21)$$

외팔보 경계조건

$$\begin{aligned} \text{at } \xi = 0 ; \bar{\eta} = \bar{\theta}_Y = 0 \\ \text{at } \xi = 1 ; \frac{1}{2} \nu \bar{\eta}'^3 + \bar{\eta}' + \bar{\theta}_Y = 0, \sigma \bar{\theta}_Y' = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

여기에서,  $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial T}, (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi}$  이다.

### 3.2 고유치 문제 및 모드 형상

Extended Galerkin's method를 사용하여 위의 고유치문제의 해를 구하기 위하여 다음과 같이 해를 가정한다.

$$\bar{\eta}(\xi, T) = \sum_{j=1}^N a_j(T) \phi_j^{(1)}(\xi) \quad (23a)$$

$$\bar{\theta}_Y(\xi, T) = \sum_{j=1}^N b_j(T) \phi_j^{(2)}(\xi) \quad (23b)$$

단순지지의 경우, 시험함수  $\phi_j$ 는 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_j^{(1)}(\xi) = \text{Sin}(j\pi\xi), \quad (24a)$$

$$\phi_j^{(2)}(\xi) = \text{Cos}(j\pi\xi) \quad (24b)$$

양단 고정인 경우, 시험함수  $\phi_j$ 는 내부 유동유체가 없는 경우의 TB의 고유 함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_j^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\omega_j^2} (-\phi_j^{(2)}(\xi))''' \quad (25a)$$

$$\begin{aligned} \phi_j^{(2)}(\xi) = & q_j^3 [\text{Cosh}(q_j) - \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j\xi) \\ & - [q_j^3 \text{Sinh}(q_j) - p_j^3 \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j\xi) \\ & - q_j^3 [\text{Cosh}(q_j) - \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j\xi) \\ & - \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j^3 \text{Sinh}(q_j) - p_j^3 \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j\xi) \end{aligned} \quad (25b)$$

여기에서,  $p_j, q_j$ 는 다음과 같으며,  $s_j$ 는 외팔보의  $j$ 번째 고유치이다.

$$(p_j^2, q_j^2) = \frac{1}{2} (\pm \sigma s_j^2 + \sqrt{\sigma^2 s_j^4 + 4s_j^2}) \quad (26)$$

외팔보의 시험함수  $\phi_j$ 는 외팔보 경계조건을 만족시키는 TB의 고유함수를 이용하여 다음과 같이 가정한다.

$$\phi_j^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\omega_j^2} (-\phi_j^{(2)}(\xi))''' \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} \phi_j^{(2)}(\xi) = & -[q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cosh}(q_j\xi) \\ & + [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sinh}(q_j\xi) \\ & + [q_j \text{Cosh}(q_j) + \frac{q_j^3}{p_j^2} \text{Cos}(p_j)] \text{Cos}(p_j\xi) \\ & + \frac{q_j^3}{p_j^3} [q_j \text{Sinh}(q_j) + p_j \text{Sin}(p_j)] \text{Sin}(p_j\xi) \end{aligned} \quad (27b)$$

여기에서,  $p_j, q_j$ 는 식 (26)과 같으며,  $s_j$ 는 양단 고정정보의  $j$ 번째 고유치이다.

위 식 (24), 식 (25), 식 (27)을 운동방정식 (19)와 경계조건식 (20~22)에 대입한 후  $j=1$ 부터  $N$ 까지 Extended Galerkin 적분을 행하고 행렬식으로 정리하면 다음과 같다.

$$[M]\{\ddot{q}\} + [C]\{\dot{q}\} + [K]\{q\} + \{f_N\} = \{0\} \quad (28)$$

여기에서,  $\{\ddot{q}\}, \{\dot{q}\}, \{q\}$  및  $[M], [C], [K], \{f_N\}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \{\ddot{q}\} = & \begin{bmatrix} \ddot{a}_j \\ \ddot{b}_j \end{bmatrix}, \quad \{\dot{q}\} = \begin{bmatrix} \dot{a}_j \\ \dot{b}_j \end{bmatrix}, \quad \{q\} = \begin{bmatrix} a_j \\ b_j \end{bmatrix} \\ M_{ij}^{(11)} = & \sigma \int_0^1 \phi_j^{(1)} \phi_i^{(1)} d\xi, \\ M_{ij}^{(22)} = & \gamma \sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)} d\xi \\ C_{ij}^{(11)} = & 2\beta^{\frac{1}{2}} \sigma \bar{u} \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} d\xi \\ K_{ij}^{(11)} = & \sigma \bar{u}^2 \int_0^1 \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)} d\xi \\ & - \int_0^1 \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)} d\xi + [\phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)}]_0^1 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 K_{ij}^{(12)} &= \int_0^1 \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(2)} d\xi = K_{ij}^{(21)} \\
 K_{ij}^{(22)} &= -\sigma \int_0^1 \phi_j^{(2)''} \phi_i^{(2)} d\xi \\
 &\quad + \int_0^1 \phi_j^{(2)} \phi_i^{(2)} d\xi + \sigma [\phi_j^{(2)'} \phi_i^{(2)}]_0^1 \\
 \{f_N\} &= \begin{bmatrix} f_i \\ 0 \end{bmatrix} \\
 f_i &= \\
 &-\frac{3}{2} \nu \int_0^1 \sum_{l=1}^N a_l \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k \phi_k^{(1)'} \sum_{j=1}^N a_j \phi_j^{(1)''} \phi_i^{(1)} d\xi \\
 &+ \frac{1}{2} \nu [ \sum_{l=1}^N a_l \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k \phi_k^{(1)'} \sum_{j=1}^N a_j \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} ]_0^1
 \end{aligned}$$

상기 식 (28)을 상태 공간 방법으로 표현하면, 다음과 같다.

$$\{\dot{Z}\} = [A]\{Z\} + \{F\} \quad (30)$$

여기에서,

$$\begin{aligned}
 \{Z\} &= \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix}, [A] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}[K] & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}, \\
 \{F\} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -[M]^{-1}\{f_N\} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

이다.

### 3.3 비선형 해석

고정점 근방의 비선형 해석을 수행하기 위해 다음 식으로부터 고정점을 구하며, 0은 고정점을 의미한다.

$$[K]\{q^0\} + \{f_N\} = \{0\} \quad (31)$$

4장의 수치적 해석 결과 및 고찰에서 볼 수 있듯이, 다이버전스가 발생하는 비선형계는 고정점들의 궤적을 유속의 증가에 따라 살펴보았다. 또한, 플러터가 발생하는 비선형계는 유속에 따른 변위 특성을 살펴봄으로써 그 동적 안정성 특성을 파악하였다<sup>(11)</sup>.

식 (31)을 통해 구한 고정점에 관하여 섭동량을 다음과 같이 고려한다.

$$\{q\} = \{q^0\} + \{p\}, \quad \{\dot{q}\} = \{\dot{p}\} \quad (32)$$

식 (28)~(32)를 고려하여 구한 섭동 방정식은 다

음과 같다.

$$\{\dot{S}\} = [M]\{S\} \quad (33)$$

여기서,

$$\{S\} = \begin{pmatrix} p \\ \dot{p} \end{pmatrix},$$

$$[M] = \begin{bmatrix} [0] & [I] \\ -[M]^{-1}([K] + [NT]) & -[M]^{-1}[C] \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 NT_{ij}^{(11)} &= -\frac{3}{2} \nu \int_0^1 \left( \sum_{l=1}^N a_l^0 \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k^0 \phi_k^{(1)'} \phi_j^{(1)''} \right. \\
 &\quad + \sum_{l=1}^N a_l^0 \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k^0 \phi_k^{(1)''} \phi_j^{(1)'} \\
 &\quad + \sum_{l=1}^N a_l^0 \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k^0 \phi_k^{(1)'} \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} \left. \right) d\xi \\
 &+ \frac{3}{2} \nu [ \left( \sum_{l=1}^N a_l^0 \phi_l^{(1)'} \sum_{k=1}^N a_k^0 \phi_k^{(1)'} \right) \phi_j^{(1)'} \phi_i^{(1)} ]_0^1
 \end{aligned}$$

식 (33)의 해는  $e^{\lambda t}$  형태이며  $|[M] - \lambda[I]| = 0$ 을 만족시키는 고유치  $\bar{\lambda}_r$ 에 의해 그 거동이 결정된다. 고유치는 감쇠가 존재하는 경우 다음과 같은 복소수의 형태로 표현된다.

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\alpha}_r \pm i\bar{\omega}_r \quad (34)$$

여기에서,  $\bar{\alpha}_r$ 은 감쇠,  $\bar{\omega}_r$ 은 고유진동수를 나타내며 각각의 고유진동수에 대한 계수벡터 값은 모드 형상을 나타낸다.

이 연구에서 수행된 Extended Galerkin method는 수렴성이 우수한 최소 자유도  $N=2$ 인 경우의 결과를 산출하였으며, 수치해석에 사용된 나노파이프 및 유체의 재료 특성과 기하학적 특성은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 E &= 1 \text{ TPa}, \quad G = 0.4 \text{ TPa}, \\
 \nu &= 0.25, \quad \rho_{out} = 2.3 \text{ g/cm}^3, \quad \rho_f = 1 \text{ g/cm}^3, \\
 R_{out} &= 40 \text{ nm}, \quad h = 20 \text{ nm}, \quad L = 800 \text{ nm}
 \end{aligned}$$

### 3.4 안정성

나노파이프의 안정성은 식 (34)의 고유치  $\bar{\lambda}_r$ 의 실수부인  $\bar{\alpha}_r$ 의 부호에 의해 결정된다. 즉,  $\bar{\alpha}_r < 0$ 이면 안정,  $\bar{\alpha}_r > 0$ 이면 불안정이다. 특히,  $\bar{\alpha}_r > 0$ 인 경우 중,  $\bar{\omega}_r \neq 0$ 이면 플러터(flutter) 형태의 불안정,  $\bar{\omega}_r = 0$ 이면 발산(divergence) 형태의 불안정성을 나

타내게 된다.

### 3.5 무차원 상대 유속

무차원화 된 유속의 상대비교를 위해, 상대 유속을 다음과 같이 정의한다.

$$\bar{U}_{rel} = \bar{u} \bar{R} \frac{1}{\bar{L}} \quad (35)$$

여기에서,  $\bar{R} = \sqrt{\frac{m_f^*}{a_{22}^*}} / \sqrt{\frac{m_f}{a_{22}}}$ ,  $\bar{L} = \frac{L}{L^*}$  이며, (\*)는  $h = 20 \text{ nm}$ ,  $L = 800 \text{ nm}$ ,  $R_{out} = 40 \text{ nm}$  일 때의 수치이다.

### 4. 수치 해석 결과 및 고찰

Figs. 3, 7, 10은  $R_{out} = 40 \text{ nm}$ 로 고정하고  $R_{in}/R_{out}$ 이 0.5인 경우에 대하여, 0에서 8까지 유속 변화에 따른 선형 나노파이프의 처음 저차 2개 고유치의 실수부와 허수부의 변화를 나타낸 것으로 Figs. 3, 7은 다이버전스를 쉽게 관찰 할 수 있도록 허수부만을 y축에 표현한 그림이며, Fig. 10은 실수부를 x축에, 허수부를 y축에 표현한 전형적인 아르강 도표(Argand diagram)이다.

Figs. 4~6, 8, 9, 11, 12는 Figs. 3, 7, 10에 각각 대응하여 0에서 8까지 유속 변화에 따른 비선형 나

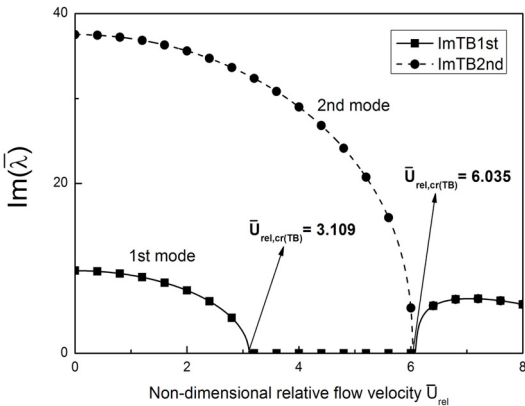


Fig. 3 Variation of  $Re(\bar{\lambda})$  and  $Im(\bar{\lambda})$  parts of non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for simply supported-simply supported linear nanotube case ( $\bar{L} = 1$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ )

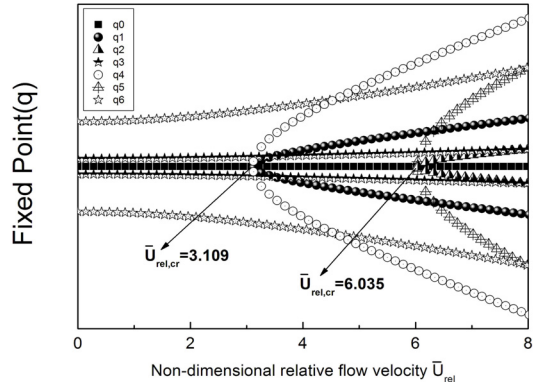


Fig. 4 Variation of fixed points with fluid velocity for simply supported-simply supported nonlinear nanotube case ( $\bar{L} = 1$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ )

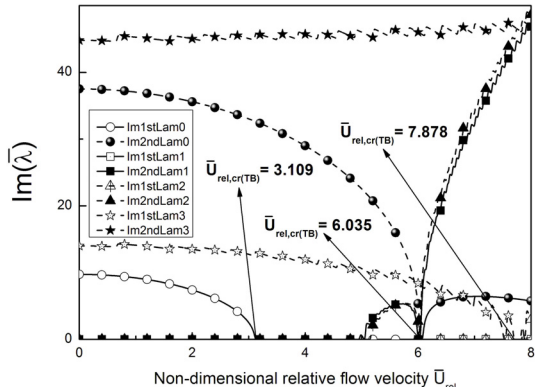


Fig. 5 Variation of  $Re(\bar{\lambda})$  and  $Im(\bar{\lambda})$  parts of non-dimensional eigenvalues with fluid velocity for perturbation equation on the fixed points of simply supported-simply supported nonlinear nanotube case ( $\bar{L} = 1$ ,  $R_{in}/R_{out} = 0.5$ )

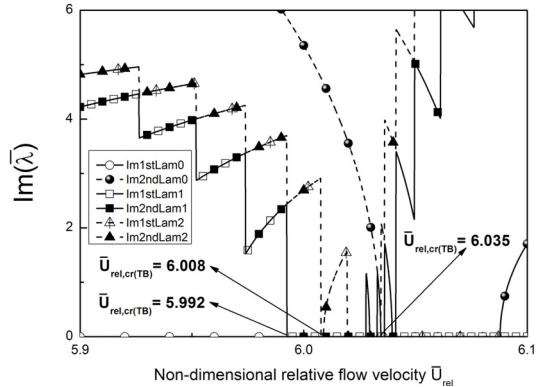


Fig. 6 Enlarged diagram of Fig. 3

노파이프의 특성을 나타낸 그림으로, Figs. 4, 8, 11은 식 (31)에 의한 고정점 또는 변위의 변화를, Figs. 5, 6, 9, 12는 식 (33)에 의해 분석된 고유치의 변화를 나타낸 것이다.

Figs. 3~6은 경계조건이 양단 단순 지지보인 경우로서, Fig. 3은 선형 나노파이프의 경우, 허수부가 점점 감소하여 0이 되는 점에서 유속이 임계유속이 되며 이때부터 다이버전스가 발생된다. 이때, 최저 임계유속은 1차 모드에서 발생한다는 것을 알 수 있다.

Figs. 4~6은 비선형 나노파이프의 경우, 유속 증가에 따른 고정점 및 안정성 해석 그림으로, Fig. 4에서 x축 선상에 형성된 고정점  $q_0$ 와 또 다른 고정점들인  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$ 의 궤적을 관찰할 수 있으며, 특히 고정점  $q_0, q_1, q_4$ 와  $q_0, q_2, q_5$  각각의 교차점에서 임계 유속이 발생됨을 확인 할 수 있다. Fig. 5는 식 (33)에 의해 구해진 고유치의 변화와 다이버전스가 나타나는 임계유속을 표현 한 것이며 Fig. 6은 Fig. 5의 유속 5.9에서 6.1까지를 확대하여 보여주고 있다. Figs. 5, 6에서 볼 수 있듯이 2번째 선형 임계유속 6.035 전에 비선형 임계유속 2개, 후에 임계유속 1개가 관찰된다. 또한, 5.992, 6.008 두 개의 임계유속은 각각 1차 모드와 2차 모드 모두에서 동일하게 일치하는 것으로 관찰된다.

Figs. 7~9는 양단 고정보인 경우로서, Fig. 7의 선형 나노파이프의 경우, 허수부가 점점 감소하여 0이 되는 점에서 유속이 임계유속이 되며 이때부터 다이버전스가 발생된다. 이때, 최저 임계유속은 1차 모드에서 발생하며 양단 고정인 경우의 최저 임계유속보다 약 2배 정도 크다는 것을 알 수 있다.

Fig. 8은 비선형 나노파이프의 경우 유속 증가에 따른 고정점 그림으로 x축 선상에 형성된 고정점  $q_0$ 와 또 다른 고정점인  $q_1$ 의 궤적을 관찰 할 수 있으며, 특히 고정점  $q_0, q_1$ 의 교차점에서 임계 유속이 발생됨을 관찰할 수 있다. Fig. 9는 식 (33)으로부터 구해진 비선형 나노파이프의 고유치 변화를 표현 한 것으로  $q_0$ 를 기준으로 발생된 임계 유속과  $q_1$ 을 기준으로 발생된 임계유속이 동일하게 일치하는 것이 관찰된다. 또한, 0에서 8까지 유속 내에서는 선형에서 관찰되는 임계유속 이외의 또 다른 비선형 임계유속은 관찰되어지지 않는다.

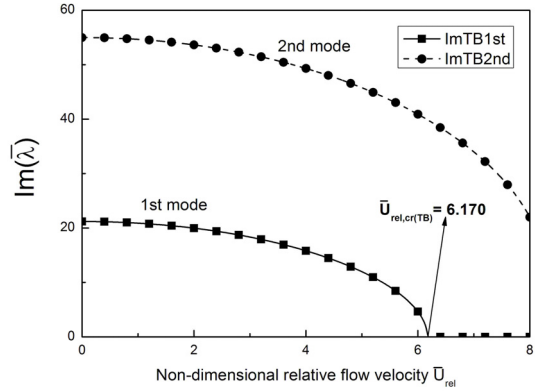


Fig. 7 Counterpart of Fig. 3 for clamped-clamped case

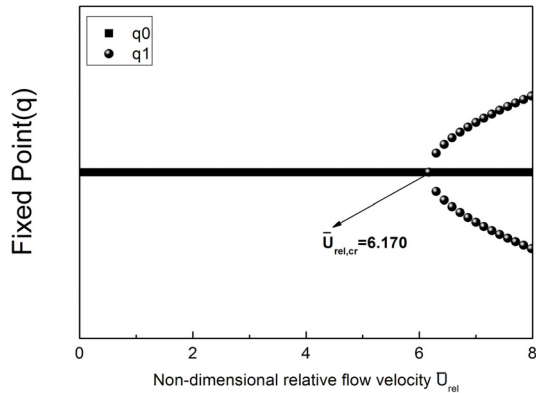


Fig. 8 Counterpart of Fig. 4 for clamped-clamped case

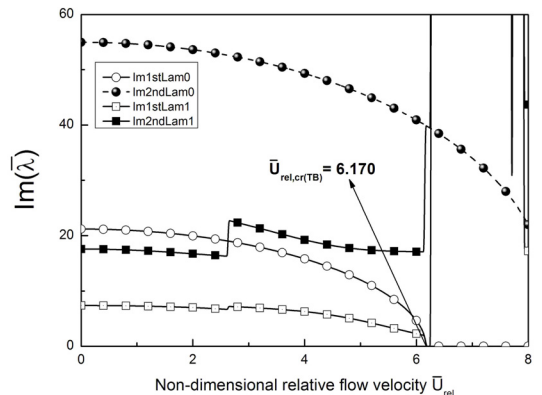
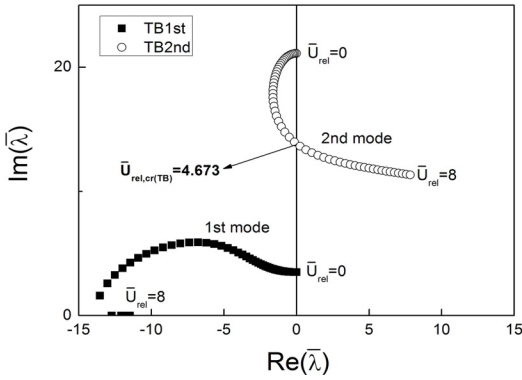


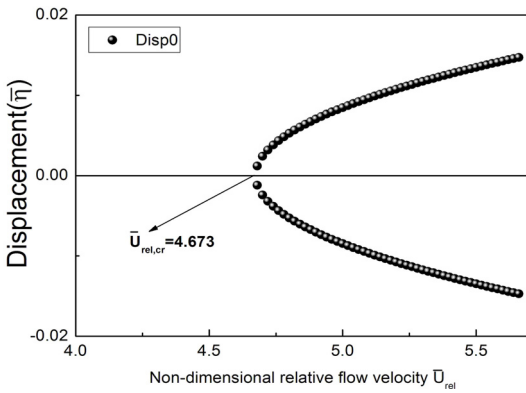
Fig. 9 Counterpart of Fig. 5 for clamped-clamped case

Figs. 10~12는 경계조건이 외팔보인 경우로서, Fig. 10의 선형 나노파이프의 경우, 실수부가 음수

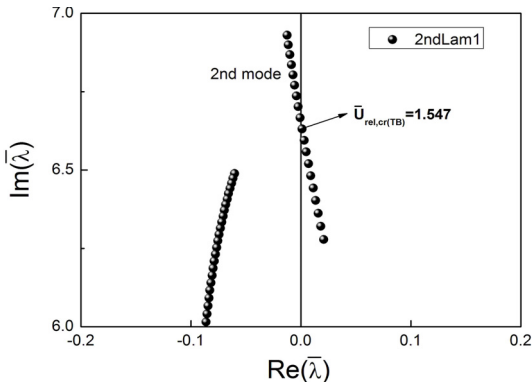




**Fig. 10** Variation of non-dimensional complex eigenvalue diagram with fluid velocity for linear cantilevered nanotube case ( $\bar{L} = 1, R_{in}/R_{out} = 0.5$ )



**Fig. 11** Variation of displacement with fluid velocity for non-linear cantilevered nanotube case ( $\bar{L} = 1, R_{in}/R_{out} = 0.5$ )



**Fig. 12** Variation of non-dimensional complex eigenvalue diagram with fluid velocity for nonlinear cantilevered nanotube case ( $\bar{L} = 1, R_{in}/R_{out} = 0.5$ )

**Table 1** Variation of relative critical velocity,  $\overline{U_{rel,cr}}$  ( $\frac{R_{in}}{R_{out}} = 0.5, R_{out} = 40 \text{ nm}, \bar{L} = 1$  fixed)

Boundary condition	$\overline{U_{rel,cr}}$		
	Linear	Present result	
		Linear	Nonlinear
S. Supported - S. Supported	3.109 (1st) 6.035 (2nd)	$q0$	3.109 (1st) 6.035 (2nd)
		$q2, q5$	5.992 (1st) (2nd) 6.008 (1st) (2nd)
		$q3, q6$	7.878 (1st)
Clamped -clamped	6.170 (1st)	$q0$	6.170 (1st)
		$q1$	6.170 (1st)
Clamped -free	4.673 (2nd)	$q0$	4.673 (2nd)
		$q1$	1.547 (2nd)

에서 양수로 변하는 점에서의 유속이 임계유속이 되며 이때부터 플러터가 발생한다. 이 경우, 임계유속은 2차 모드에서 발생하는 것을 알 수 있다. Fig. 11에서 비선형 나노파이프의 경우는 유속증가에 따른 변위가 임계유속 이후 발생되며, x축 상에 임계유속이 표현된다. 플러터의 경우는 다이버전스의 경우와는 달리 유속에 따른 고정점 궤적곡선으로는 임계 유속의 표현이 곤란하여 주로 변위 궤적곡선으로 표현한다. 이때 변위는 비선형 이론인 centre manifold 이론과 averaging 방법을 사용하여 구한 것이며, 임계점 이후 1이하의 유속에서 유효하다<sup>(8)</sup>. Entre manifold 이론과 averaging 방법은 이 논문에는 소개하지 않으며, 참고문헌 (11), (12), (16)을 참고하여 실행되었다. Fig. 12는 식 (33) 비선형섭동 방정식의 안정성 해석에 의하여 구하여진 비선형 임계유속을 아르강 도표에 의해 확대 표현한 것으로, 그 비선형임계유속이 2차 모드에 나타나며 선형 임계유속의 1/3 정도의 값을 갖는다는 것을 알 수 있다.

Table 1은 이 연구에서 산출된 임계 유속을 정리한 것으로, 선형과 비선형 경우에 따른 임계 유속의 차이를 경계조건으로 구분하여 나타낸다.

양단 단순지지보와 외팔보의 경우, 선형에서 보이지 않던 비선형 특성에 따른 임계유속이 관찰되며, 양단 고정보의 경우에는 선형의 경우와 다르지 않다는 것을 알 수 있다.

## 5. 결 론

이 연구에서 내부에 유체가 흐르는 비선형나노튜브는 경계조건에 따라서 유체의 속도를 1에서 8까지 변화 시켰을 때, 선형나노튜브의 경우에서 발생되었던 임계유속 이외의 임계유속에서도 다이버전스(divergence) 또는 플러터(flutter)가 발생됨을 알았으며, 이에 따른 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 비선형나노튜브의 안정성은 고정점을 기준으로 전개되며 경계조건에 따라 유속 변화 시 선형나노튜브보다 더 많은 임계유속을 가지기도 한다.

(2) 양단 단순지지보 및 외팔보의 경우, 임계유속은 고정점에 따라 선형 임계유속이외의 비선형 임계유속을 가지며 이때 양단 단순지지보의 경우는 다이버전스가, 외팔보의 경우는 플러터가 발생한다.

(3) 양단고정보의 경우, 비선형 임계유속은 각 고정점 근방에서도 선형 임계유속과 같으며 이때 다이버전스가 발생한다.

(4) 양단 단순지지보와 외팔보의 경우, 비선형시스템을 고려하는 것이 선형시스템에서 나타나지 않는 임계유속 및 이에 따른 물리적 거동을 논하기에 적합하다.

(5) 양단고정보의 경우, 비선형시스템의 임계유속과 선형시스템의 임계유속이 유사하여 접근이 복잡하고 제한된 비선형시스템을 고려하는 것보다 선형시스템을 고려하는 것이 유리하다. 다만, 8 이상의 유속에서는 또 다른 비선형 임계유속이 나타날 수도 있으리라 예견된다.

## 참 고 문 헌

(1) Sohlberg, K., Sumpter, B. G., Tuzun, R. E. and Noid, D. W., 1998 "Continuum Methods of Mechanics as a Simplified Approach to Structural Engineering of Nanostructures," *Nanotechnology*, Vol. 9, pp. 30~36.

(2) Wang, Q. and Varadan, V. K., 2005, "Stability Analysis of Carbon Nanotubes via Continuum Models," *Smart Materials and Structures*, Vol. 14, pp. 281~286.

(3) Chen, X. and Cao, G., 2006 "A Structural

Mechanics Study of Single-walled Carbon Nanotubes Generalized from Atomistic Simulation," *Nanotechnology*, Vol. 17, pp. 1004~1015.

(4) Fernandez, I. R., Fangohr, H. and Bhaskar, A., 2006, "Normal Modes of Carbon Nanotubes : Similarities and Differences with their Continuum Counterpart," *Journal of Physics : Conference Series*, Vol. 26, pp. 131~134.

(5) Wang, C. M., Tan, V. B. C. and Zhang, Y. Y., 2006, "Timoshenko Beam Model for Vibration Analysis of Multi-walled Carbon Nanotubes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 294, pp. 1060~1072.

(6) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2005, "Vibration and Instability of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," *Composites Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1326~1336.

(7) Yoon, J., Ru, C. Q. and Mioduchowski, A., 2006, "Flow-induced Flutter Instability of Cantilever Carbon Nanotubes," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 43, pp. 3337~3349.

(8) Choi, J. W., Gil, B. R. and Song, O. S., 2008, "Flow-induced Vibration of Carbon Nanotubes Conveying Fluid," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 6, pp. 654~662.

(9) Choi, J. W. and Song, O. S., 2001, "Stability Analysis of Composite Material Pipes Conveying Fluid," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 11, No. 8, pp. 314~321.

(10) Fu, Y. M., Hong, J. W. and Wang, X. Q., 2006, "Analysis of Nonlinear Vibration for Embedded Carbon Nanotubes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 296, pp. 746~756.

(11) Paidoussis, M. P., 1998, "Fluid-structure Interactions : Slender Structures and Axial Flow," Vol. 1, Academic Press.

(12) Semler, C. and Paidoussis, M. P., 1996, "Non-linear Analysis of the Parametric Resonances of a Planar Fluid-conveying Cantilevered Pipe," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 10, pp. 787~825.

(13) Wadham-Gagnon, M., Paidoussis, M. P. and Semler, C., 2007, "Dynamics of Cantilevered Pipes Conveying Fluid. Part 1: Nonlinear Equations of Three-dimensional Motion," *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 23, pp. 545~567.

(14) Librescu, L. and Song, O. S., 2006, "Thin-walled Composite beams: Theory and Application," Springer.

(15) Choi, J. W. and Song, O. S., 2008, "Effect of Boundary Conditions on the Stability Characteristics of Nanopipes," *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 18, No. 10, pp. 1057~1064.

(16) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, "Nonlinear Oscillations," John Wiley & Sons.