

직교이방성 적층구조 해석을 위한 부분-선형 층별이론에 기초한 저매개변수요소

Subparametric Element Based on Partial-linear Layerwise Theory for the Analysis of Orthotropic Laminate Composites

안 재 석* 우 광 성†

Ahn, Jaeseok Woo, Kwang-Sung

(논문접수일 : 2009년 3월 9일 ; 심사종료일 : 2009년 3월 30일)

요 지

본 논문에서는 적층구조해석을 위해 부분-선형 층별이론에 의해 정식화된 저매개변수 유한요소 모델을 제안한다. 얇은 직교이방성 문제뿐만 아니라, 두꺼운 직교이방성 적층판 해석을 위해 제안된 모델은 2차원 세분화 기법에 기초를 두고 있다. 즉, 이 모델은 두께방향으로의 면내거동에 대해서는 선형변화로 가정하는 층별분리이론이 적용되고, 두께방향으로의 면외거동에 대해서는 상수로 가정하는 등가단층이론이 사용된다. 변위장을 정의하기 위해 적분형 르장드르 다항식이 사용된다. 또한 가우스-로바토 적분법을 사용하여, 적층평판의 종래의 가우스적분점이 아닌 절점의 위치에 발생하는 최대응력값을 별도의 외삽법을 사용하지 않고 바로 산출하였다. 제안된 모델의 정당성과 특성은 직교이방성 다층적층판 문제를 사용하여 검증되었으며, 그 결과는 출판된 참고문헌의 값들과 비교되었다. 이 연구에서는 최적의 유한요소 적층모델을 결정하기 위해 응력과 최대처짐을 사용한 수렴성조사가 수행되었다. 또한, 적층 수의 증가에 따른 두께방향으로의 변위와 응력분포의 변화가 조사되었다.

핵심용어 : 저매개변수 유한요소모델, 직교이방성 적층평판, 부분-선형 층별이론

Abstract

This paper presents the subparametric finite element model formulated by partial-linear layerwise theory for the analysis of laminate composites. The proposed model is based on refined approximations of two dimensional plane for orthotropic thick laminate plate as well as thin case. Three dimensional problem can be reduced to two dimensional case by assuming piecewise linear variation of in-plane displacement and a constant value of out-of-plane displacement across the thickness. The integrals of Legendre polynomials are chosen to define displacement fields and Gauss-Lobatto numerical integration is implemented in order to directly obtain maximum values occurred at the nodal points of each layer without other extrapolation techniques. The validity and characteristics of the proposed model have been tested by using orthotropic multilayered plate problem as compared to the values available in the published references. In this study, the convergence test has been carried out to determine the optimal layer model in terms of central deflection and stresses. Also, the distribution of displacements and stresses across the thickness has been investigated as the number of layer is increased.

Keywords : subparametric FE model, orthotropic laminate plate, partial-linear layerwise theory

1. 서 론

복합재료 구조물은 중량에 비해 높은 강도를 지니고 있으며, 탁월한 부식 방지능력, 저렴한 유지관리비용, 뛰어난 내

구성, 그리고 우수한 피로특성을 갖는 이유로 2차 구조물에서 점차 1차 구조물로 사용 범위가 확장되고 있으며, 적층수에 있어서도 수십 장에서 수백 장에 이르는 매우 두꺼운 적층 구조물도 존재한다. 이러한 고성능 적층복합재료는 근

† 책임저자, 영남대학교 건설시스템공학과 교수
Tel: 053-810-2593 ; Fax: 053-810-4622
E-mail: kswoo@yu.ac.kr

* 영남대학교 공업기술연구소 연구원

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

본적으로 비균질한 이방성 재료로서 일반적인 균질한 등방성 재료와 비교하여 거동양상이 상당히 복잡해질 수밖에 없다. 그래서 해석 및 설계의 정확성과 효율성을 높이기 위해서, 적용 범위와 모델의 적합성에 따라 전체 적층 구조물의 거시 스케일, 적층 구조물의 층단위 스케일, 그리고 섬유와 모재의 미세구조 스케일 등으로 나누어서 해석, 설계, 평가가 이루어진다. 최근에는 보다 작은 스케일에서의 비균질한 성질이 반영된 물리적 현상을, 균질화 기법을 사용하여 보다 큰 스케일에서의 인자에 반영하여, 더욱 정확한 재료 및 구조물의 물리 현상을 묘사하기 위한 다중 스케일 시스템에 대한 전산 해석에 관심이 증대되고 있다. 이러한 비균질한 이방성을 가지는 복합재료의 다양한 연구 중에서 본 논문에서는 복합재료의 최소 개체가 균질하고 직교이방성이라는 가정에 기초한 층단위 스케일 해석에 초점을 맞추고자 한다.

층단위 스케일에서의 해석해(analytical solutions)에 의한 방법 중에서 Pagano(1969; 1970)는 3차원 탄성이론에 기초하여 원통형 휨과 2방향 휨을 받는 대칭적층평판에 대하여 해석을 하였다. Noor 등(1990; 1992)은 비대칭 적층 평판의 휨, 좌굴, 진동 문제에 대한 이론해를 제시 하였으며, Savithri 등(1992)은 등분포 하중 및 집중하중에 대한 연구로 확장을 하였다. 이러한 이론해에 의한 대부분의 방법들은 푸리에(Fourier) 급수를 사용하여, 지배미분방정식을 푸는 방식으로서 도입된 가정 및 고려되는 개체의 스케일 범위에서는 정확한 해를 구할 수 있는 반면에, 그 적용 범위는 상당히 제한적일 수밖에 없다. 이러한 해석해의 제약을 극복하기 위해서 사용되는 방법이 3차원에 기초한 수치해석적인 방법이다. 다양한 수치해석적 방법 중에서 현재까지는 유한요소해석 방법이 그 주류를 이루고 있다. 3차원 탄성론에 기초한 유한요소해석의 경우, 앞에서 언급한 해석해에 의한 방법보다 그 사용범위에 대한 확장성이 뛰어난 반면에, 과도한 계산시간의 문제라든가, 적층재료에서 일어나는 다양한 현상들을 효율적으로 묘사하기 위한 적절한 모델링 기법에 대한 선택의 어려움을 가지고 있다.

초기의 적층해석 이론은 등방성 평판이론에 사용하는 두께 방향으로 변형률이 연속이라는 C_2^1 함수이론이 적용되어, 층의 경계에서의 성질이 무시되었다. C_2^1 함수이론의 대표적인 방법으로는 C_{xy}^1 기저함수를 사용하는 고전적 적층이론 및 C_{xy}^0 함수를 사용하는 일차 전단변형이론을 들 수 있다. 그 후에 마찬가지로 등방성 평판 또는 셸에 적용되는 다항식 전개이론 또는 감절점셸 요소 이론으로부터 여과없이 그대로 적층복합재료에 적용되었다. 이러한 C_2^1 함수이론들의 공통적인 약점 중에 하나는 모두 횡전단변형률이 연속으로 변한다

는 가정을 사용하고 있기 때문에, 층마다 서로 다른 전단변형률을 가지는 복합적층재료의 전단응력 연속조건을 만족시킬 수 없다는 것이다. 한편, 일차 전단변형이론을 사용하는 경우, 두께 형상비(aspect ratio)가 10이상인 경우에는 적층의 전체거동(변형, 좌굴, 자유진동 등)을 예측할 시에는 비교적 정확한 값을 얻을 수 있다. 하지만, 적층 형태와 입력되는 전단수정계수값이 종속관계에 있기 때문에, 적절한 전단수정계수값을 결정하는 것이 문제가 되었으며, 전단수정계수값을 결정하기 위한 연구는 Whitney(1972; 1973)에 의해 행해졌으며, Cho 등(1993)은 일차전단변형이론을 적용한 후에 후처리기법을 사용하여, 일차전단변형에서의 전단변형에 대한 약점을 보완하고자 했다. 최근에는 김준식 등(2006)은 혼합변분이론을 이용하여 개선된 일차전단변형 이론에 의한 해석기법을 소개하였다. 한편, 우광성 등(2004)은 감절점셸 요소에서 확장된 저매개변수요소에 기초한 적층이론을 응용하여 패치 보강된 RC보와 슬래브의 극한강도 산정을 하였다. 이와 같은 다양한 C_2^1 함수이론들이 일반적으로 2차원탄성이론에 기초하여 해석의 간편성에 대한 이점이 있는 반면에, 층경계에서의 변위 및 응력조건을 명확하게 묘사할 수 없는 것은 물론이고, 두께 형상비가 10이하인 경우에는 전체 거동에서조차도 큰 오차를 유발하기 때문에 이를 극복하기 위한 다양한 C_2^0 함수 이론들이 제시되고 있다. 층별분리이론(layerwise model)으로 불리는 C_2^0 함수 이론들의 공통적인 초점은 적층복합재료의 층경계에서의 횡전단응력연속조건을 만족시키는 것과 아울러 두께 형상비가 10이하인 경우 면내변위의 지그재그변형분포의 정확한 예측에 있다. C_2^0 함수 이론은 사용되는 자유도가 두께 방향으로의 층수와 종속적인 관계를 가지는 모델과 독립적인 관계를 가지는 모델로 나누어 볼 수 있다. 자유도와 층의 수가 종속적인 관계를 가지는 층별분리이론들의 공통적인 특징은 해석의 정확성이 보장되는 반면에, 다른 방법에 비하여 과도한 계산시간이 요구되는 것이 큰 단점이다. 이와 다르게 자유도와 층의 수가 독립적인 관계를 가지는 층별분리이론들은 대부분 C_{xy}^1 기저함수를 요구하고 있으며, 현재까지는 다양한 문제에 대한 방법의 안정성 및 해의 수렴성이 증명되지 못하고 있다. 앞에서 언급한 층단위 스케일상의 적층복합재료해석에 대한 평가 논문은 Rohwer 등(2005), Carrera 등(2005)에서 현재까지의 연구동향에 대해 잘 나타나있다.

본 연구에서는 해의 정확성이 보장되면서 층별분리이론에서의 약점인 자유도의 효율성 측면을 극복하기 위하여 부분-선형 층별이론에 기초한 저매개변수요소(subparametric element)를 개발하였다. 개발된 요소는 면내변위와 면외변

위에 대한 가정을 분리시키는 즉, 면내변위에 대해서는 C_z^0 함수 이론이 적용되고 면외변위에 대해서는 C_z^1 함수 이론이 적용된다. 면내변위의 두께방향으로의 층간의 관계는 선형으로 가정을 한다. 변위에 대해 가정되는 함수는 적분형 르장드르 형상함수가 사용되고 계층적 성질을 가지는 1차원 적분형 르장드르 함수는 2차원으로 확장된다. 기하형상에 대해 가정되는 함수는 변위함수와 독립적인 관계를 가지면서 모두 선형으로 가정을 하는 저매개변수개념이 사용된다. 또한 해의 수렴방식은 p -수렴방식을 채택하였다. 개발된 요소의 검증을 위해서 싸인과 하중(sinusoidal loading)을 받는 단순 지지된 3개 적층평판에 대해서 해석되었다. 또한 최대응력값들을 계산하기 위해서 별도의 외삽기법을 사용하지 않고 절점에서의 응력값이 직접 산출되도록 가우스-로바토 적분법을 채택하였다.

2. 부분-선형 층별이론에 의한 저매개변수요소의 정식화

그림 1과 같이 두께 h 를 가지는 복합재료 적층평판을 고려한다. 기하형상에 대한 함수는 선형함수로 가정을 하며 변위함수는 기하형상에 대한 함수와 무관하게 따로 정의를 하는 저매개변수요소 개념을 채택한다. 변위함수에 대한 가정은 각 층별로 따로 분리한다. 층별분리이론에서의 임의의 층 i 에서의 3개의 변위 u, v, w 에 대한 일반적인 형태는 식 (1)과 같다.

$$\begin{Bmatrix} u^i(x,y,z) \\ v^i(x,y,z) \\ w^i(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^i(x,y) \\ v_0^i(x,y) \\ w_0^i(x,y) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_k^i(x,y)\chi_k^i(z) \\ v_k^i(x,y)\chi_k^i(z) \\ w_k^i(x,y)\psi_k^i(z) \end{Bmatrix}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (1)$$

여기서, 첨자 k 에 대해서는 아인슈타인의 합의 규약이 적용된다. x, y, z 는 전체 좌표계에서의 위치를 나타내며, 각 자유도에서의 변위는 변형 전의 적층에서의 $u_0^i(x,y), v_0^i(x,y),$

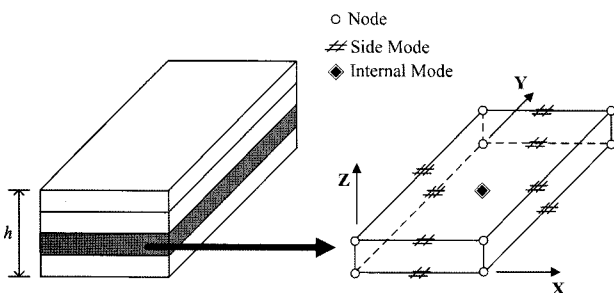


그림 1 p -수렴 적층유한요소 모델의 절점구성

$w_0^i(x,y)$ 에 대한 상대적인 변위를 나타낸다. 두께방향으로의 가정되는 변위함수는 면내방향의 u, v 에 대해서는 동일한 함수를 사용하고 면외방향의 변위 w 에 대해서는 다른 함수를 사용할 수도 있다. 부분-선형 층별이론에서는 두께방향으로의 면내의 변위함수는 선형으로 가정을 하고 두께방향으로의 w 는 동일하다는 가정을 사용하여 식 (1)로부터 다음과 같은 식 (2)를 얻었다.

$$\begin{Bmatrix} u^i(x,y,z) \\ v^i(x,y,z) \\ w^i(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0^i(x,y) \\ v_0^i(x,y) \\ w_0^i(x,y) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_k^{ib} N_k(\bar{x},\bar{y})M_1(\bar{z}) + u_k^{it} N_k(\bar{x},\bar{y})M_2(\bar{z}) \\ v_k^{ib} N_k(\bar{x},\bar{y})M_1(\bar{z}) + v_k^{it} N_k(\bar{x},\bar{y})M_2(\bar{z}) \\ w_k^i(\bar{x},\bar{y})N_k(\bar{x},\bar{y}) \end{Bmatrix}, \quad k=1,2,\dots,n \quad (2)$$

여기서, M 과 N 은 가정되는 1차원과 2차원에 대한 각각의 변위함수로서 본 연구에서는 적분형르장드르 형상함수가 사용된다. 윗첨자 b 와 t 는 임의의 층 i 에서의 아래면과 윗면을 의미한다. 이러한 부분-선형 층별이론의 자유도의 수에 대해 살펴보면 층의 수에 종속적인 관계를 가지는 일반적인 층별이론(식 (1))에서 모델링된 층의 수가 l 이고, 두께방향으로의 가정되는 1차원 변위함수의 최고차항이 p 인 경우, 두께방향으로의 자유도 수는 $3lp+3$ 이 된다. 이에 반하여 부분-선형 층별이론을 적용한 자유도 수는 $2l+3$ 이 되기 때문에 자유도 수가 확연히 감소됨을 알 수 있으며, 이러한 자유도 수의 저감효과는 모델링되는 층의 수가 늘어날수록, 또는 평면에 대해 p - 또는 h -세분화 될수록 자유도의 저감효과는 커질 것이다.

식 (2)에서 사용되는 1차원 적분형 르장드르 형상함수 M 은 계층적 성질을 가지고 있는 변위보간함수로서, 이러한 계층적 보간함수에 대한 성능의 우수성은 Basu(1981)와 Babuska(1982)에 의해 입증되었다. 1차원 변위 보간함수 $M(\bar{z})$ 의 최고차항 p 에 대한 다항식은 식 (3)과 같다.

$$M_1(\bar{z}) = \frac{1-\bar{z}}{2}, \quad M_2(\bar{z}) = \frac{1+\bar{z}}{2}, \quad p=1$$

$$M_{p+1}(\bar{z}) = \sqrt{\frac{2p-1}{2}} \int_{-1}^{\bar{z}} \frac{1}{2^{p-1}(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dq^{p-1}} (q^2-1)^{p-1} dq, \quad p=2,3,4,\dots \quad (3)$$

또한, 2차원 형상함수는 1차원 형상함수로부터 전개된다.

2차원 변위함수의 사변형요소의 4개의 꼭지점($p=1$)에 대해서는 선형 Lagrange 요소와 동일하다. $p \geq 2$ 인 경우, 4개의 주변 모드(side mode)에 대한 임의의 최고차항 p 에 대해서는 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} N_s^1(\bar{x}, \bar{y}) &= M_1(\bar{y})M_{s+1}(\bar{x}) \\ N_s^2(\bar{x}, \bar{y}) &= M_2(\bar{x})M_{s+1}(\bar{y}) \\ N_s^3(\bar{x}, \bar{y}) &= M_2(\bar{y})M_{s+1}(\bar{x}) \\ N_s^4(\bar{x}, \bar{y}) &= M_1(\bar{x})M_{s+1}(\bar{y}) \end{aligned} \quad 2 \leq s \leq p \quad (4)$$

또한, 최고차항의 차수 p 가 4차 이상인 경우에는 내부 모드(internal mode)가 발생되며 내부모드 M_I 에 관한 사항은 식 (5)와 같다.

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= p + 2 \quad \alpha, \beta = 3, 4, 5, \dots \\ M_I &= M_\alpha(\bar{x})M_\beta(\bar{y}) \end{aligned} \quad (5)$$

한편, 앞에서 언급한 바와 같이 층별분리이론의 일반화된 식 (1)에서 두께방향으로의 면외거동에 대한 함수가 상수라는 가정을 통하여 평면응력가정이 적용되며 직교이방성을 고려하여 3개의 독립적인 주평면(1, 2, 3)에서의 변형률에 대한 전체좌표계(x, y, z)에서의 응력 관계는 식 (6)과 같으며, 식 (9)에서 θ 는 전체좌표계의 평면(x, y)에 대한 주평면(1, 2)의 회전각을 의미한다.

$$\sigma_{x,y,z} = Q^T \bar{D} Q \epsilon_{1,2,3} \quad (6)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \sigma_{x,y,z} &= \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz} \rangle^T \\ \epsilon_{1,2,3} &= \langle \epsilon_1 \quad \epsilon_2 \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{13} \quad \gamma_{23} \rangle^T \end{aligned} \quad (7)$$

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$D_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}$$

$$D_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}$$

$$D_{12} = \frac{E_2 \mu_{12}}{1 - \mu_{12} \mu_{21}}$$

$$D_{33} = G_{12}$$

$$D_{44} = G_{13}$$

$$D_{55} = G_{23}$$

$$Q = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 \\ -2\sin\theta\cos\theta & 2\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

적층의 총 층수가 l 인 적층평판의 변형률에너지는 식 (10)과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l \int_{V^i} \{\epsilon^i\}^T Q^T \bar{D} Q \{\epsilon^i\} dV \quad (10)$$

여기서, $\{\epsilon^i\}$ 는 2차원 평면응력 변형률 벡터로서 식 (2)에서 정의 내려진 가정으로부터 식 (11)과 같이 쓸 수 있다.

$$\{\epsilon^i\} = B \{u_k^i, v_k^i, w_k^i\} \quad (11)$$

식 (2)와 (10)으로부터 j 번째 층의 강성행렬은 식 (12)와 같다.

$$K^i = \int_V B^T Q^T \bar{D} Q B dV \quad (12)$$

사인파하중(sinusoidal load)에 대한 하중벡터 F_k 는 식 (13)과 같다.

$$F_k = \int_A [N(\bar{x}, \bar{y})]^T f_0 \sin(\pi x) \sin(\pi y) dA \quad (13)$$

3. 수치해석 예제

본 연구에서 개발한 부분-선형층별이론에 기초한 저매개변수 요소에 대한 정확성 검증을 위해서 Pagano 등(1972)이 제시한 3차원 탄성론에 기초한 3층($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) 복합적층평판에 대한 변위 및 응력값을 비교하였다. 복합재료 적층평판의 각 층의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} E_L &= 25 \times 10^6 \psi \quad E_T = 1 \times 10^6 \psi \quad G_{LT} = 0.5 \times 10^6 \psi \\ G_{TT} &= 0.5 \times 10^6 \psi \quad \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25 \end{aligned} \quad (14)$$

여기서, L 은 재료의 주응력방향이고, T 는 주응력방향에 직교하는 축을 나타낸다. 두께 h 를 가지는 복합적층평판의 기하형상은 평면에 대해서 $a \times a$ 정사각형이며, 각 층의 두께에 관해서는 같은 방향으로 놓인 재료의 두께는 동일하며, 전체 좌표계의 x 축과 재료의 주응력방향이 0° 인 재료와 90° 인 재

료의 두께의 총합은 같다. 경계조건(식 (15)) 및 횡방향 표면하중(식 (16))은 다음과 같다.

$$u = 0(y = 0, a), \quad v = 0(x = 0, a), \quad w = 0(x, y = 0, a) \quad (15)$$

$$F = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a) \quad (16)$$

여기서, f_0 는 상수값이다. 또한 각 응력 및 변위에 대한 결과치의 정규화는 식 (17)과 같다.

$$(\overline{\sigma_x}, \overline{\sigma_y}, \overline{\tau_{xy}}) = \frac{1}{qs^2}(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}), \quad (\overline{\tau_{xz}}, \overline{\tau_{yz}}) = \frac{1}{qs}(\tau_{xz}, \tau_{yz}),$$

$$\overline{u} = \frac{E_T}{qh s^3} u, \quad \overline{w_c} = \frac{\pi^4 R w}{12 s^4 h f_0},$$

$$R = 4G_{LT} + \frac{E_L + E_T(1 + 2\nu_{TT})}{1 - \nu_{LT}\nu_{TL}}, \quad s = \frac{a}{h}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h} \quad (17)$$

요소의 모델링은 평면상에서 x, y 축 모두에 대해 대칭이므로, 전체영역에 대해서 1/4만 모델링되었으며, 대칭조건이 추가로 적용된다. 그래서 계산영역은 $0 \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq a/2$ 이며, 평면상에서는 h -세분화 기법을 전혀 사용하지 않고, 오직 p -세분화 기법만을 사용하기 때문에 평면상에서는 오직 하나의 요소만을 가지고서 모델링한다. 두께 방향으로로는 적층의 수만큼 요소가 모델링되어야 하며, 수직 및 전단 응력값들의 정확성을 확보하기 위하여 두께 방향으로 요소의 수를 증가시켜 해의 정확도를 평가하였다.

3.1. 변위 및 응력에 대한 수렴성

고려되고 있는 적층평판의 두께 비에 따른 변위 및 응력에 대한 수렴성을 조사하기 위해서 평판 중앙의 최대처짐 $\overline{w_c}$, 면내응력($\overline{\sigma_x}(a/2, a/2, 1/2)$, $\overline{\tau_{xy}}(0, 0, 1/2)$), 및 횡방향응력($\overline{\tau_{yz}}(a/2, 0, 0)$)이 고려된다. 두께 비는 얇은 평판(thin plate; $s=50$), 중간 평판(moderate thick; $s=10$), 그리고 두꺼운 평판(thick; $s=4$)이 고려된다. 그림 2는 p -세분화에 의한 자유도 수의 증가에 대한 처짐값을 나타내고 있다. 얇은 평판부터 두꺼운 평판까지 모두 $p=4$ 차 이상에서는 값의 변화가 크지 않고 정해(exact solution)에 가깝게 수렴하고 있음을 나타내고 있다. 두께가 두꺼워짐에 따라서 정해와의 차이가 조금씩 크게 나타나고 있는데, 두꺼운 평판($s=4$)에서의 오차 범위는 2%이내에 있고, 중간 두께 및 얇은 평판에서는 거의 일치하고 있다.

그림 3은 자유도 수의 증가에 대한 면내축방향응력($\overline{\sigma_x}$)의 수렴성을 보여주고 있다. p 가 5차 또는 6차 이후부터는 값

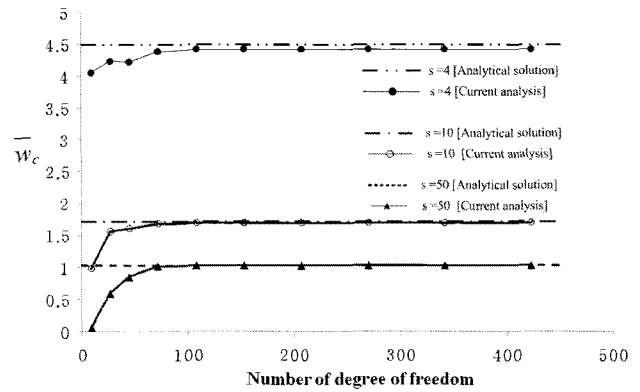


그림 2 적층평판의 중앙처짐에 대한 수렴성 조사

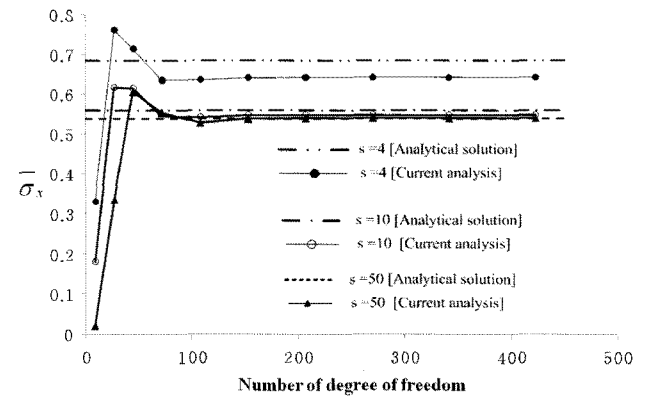


그림 3 면내축방향응력($\overline{\sigma_x}$)에 대한 수렴성 조사

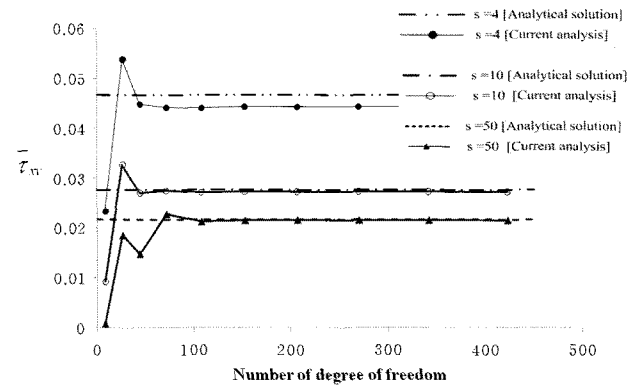


그림 4 면내전단응력($\overline{\tau_{xy}}$)에 대한 수렴성 조사

의 변화가 크지 않고 정해와 가깝게 수렴하고 있음을 보여주고 있다. 얇은 평판($s=50$)인 경우에는 정해와 거의 일치하고 있음을 보여주고 있으며, 변위값과 마찬가지로 두께가 두꺼워짐에 따라 정해와의 차이가 커짐을 알 수 있다. 중간 두께($s=10$)인 경우는 약 2%정도의 오차를 가지며, 두꺼운 평판($s=4$)에서는 약 6%정도의 오차범위를 나타내고 있다. 그림 4는 이와 유사하게 면내전단응력에 대한 수렴성 그래프이고, 거동양상은 면내축방향응력과 유사하다. 오차 범위는 중간 두께에서는 약 1%, 두꺼운 적층평판에서는 약 5%정도의

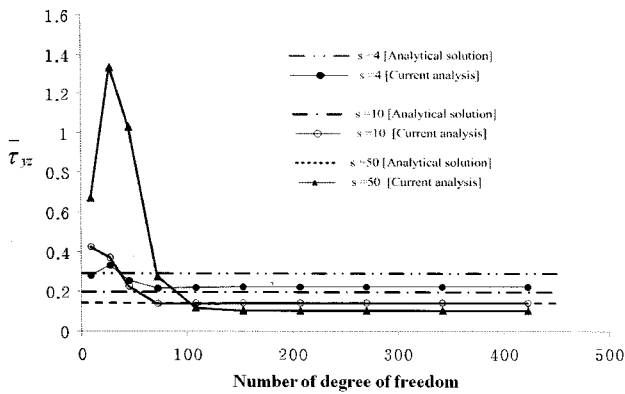


그림 5 횡전단응력($\bar{\tau}_{yz}$)에 대한 수렴성 조사

다. 한편, 그림 5는 면외전단응력의 최대값에 대한 수렴성 그래프로서 앞에 설명한 다른 값들과 유사한 거동을 나타내고 있다. 얇은 평판($s=50$)의 경우, 낮은 형상함수의 차수를 사용한 값에서는 얇은 평판에서의 전단구속현상으로 인하여 매우 큰 오차가 유발되고 있다. 하지만 차수를 증가함으로써, p -세분화 방법의 장점중 하나인 요소의 강건성(robustness)으로 인하여 약 p 가 6차 이후에는 정해와 점점 가깝게 수렴하고 있음을 보여주고 있다. 그러나 면내응력값들에 비해서 정해와의 오차가 크게 나타나고 있는데, 두꺼운 평판과 얇은 평판 모두에 대해서 약 20%정도의 오차범위를 가지고 있다.

3.2. 적층 수의 증가에 대한 효과

표 1에서는 얇은 적층평판($s=50$)에서의 변위와 각 응력 성분에 대한 최대값들에 대해서 2차원 해석해(closed form)와 3차원 해석해(3-D elasticity solution), 그리고 $p=4$ 차

와 5차 일 때의 현재의 해석값들과 비교를 하고 있다. 표 1에서의 *1, *2, 그리고 *3의 의미는 3층으로 된 적층평판의 가운데 층(90°)을 균일한 두께로 층별 분리시킨 각각의 개수를 나타낸다. 현재의 모델이 처짐 및 응력값들에 대해서 2차원 해석해(Reddy, 2004)보다는 정해진 3차원 해석해에 좀 더 가까운 값을 나타내고 있음을 알 수 있다. 그리고 두께방향으로 사용되는 층을 더 늘렸을 때는 변위라든가 면내응력 값은 전혀 개선되지 못하고 있다. 그러나 면내전단이라든가, 특히 횡방향전단응력은 층수를 늘림으로써 해의 개선효과가 있음을 보여주고 있다.

표 2에서는 두꺼운 적층평판에서의 변위와 각 응력성분에 대한 최대값들에 대해서 표 1과 같은 형식으로 비교를 하였다. 적층의 가운데층의 수를 하나 더 증가 시킨 경우에는 해의 개선효과가 전혀 없으나, 층수를 2개 더 늘린 경우에는 얇은 적층평판과는 다르게 해의 개선 효과가 나타나고 있음을 보이고 있다. 그림 6은 적층평판의 최대 횡전단응력 $\bar{\tau}_{yz}$ 가 발생하는 지점의 90° 인 층에서의 두께방향으로의 분포를 보여주고 있다. 해당층(90°)을 층 1개부터 3개까지 나누어서 각각의 결과를 비교하였다. 그림에서 보이듯이 1개만을 고려한 것과 2개로 나눈 결과는 동일하며, 3개로 나눈 경우는 해의 개선 효과가 있음을 알 수 있다. 2차원 모델링에서 주로 사용하고 있는 C_1^2 함수이론의 1차 전단변형이론에서는 전체 두께에 대하여 전단 변형 에너지를 고려하기 때문에 층 두께별로 신뢰성있는 횡전단응력값을 도출해 내기가 어렵다. 이에 반해서 현재 사용하고 있는 이론은 층별로 평균적인 전단변형에너지를 고려하기 때문에, 층을 잘게 나눌 경우 최대 응력값에 수렴하는 장점을 가지고 있다. 층을 2개를 고려한

표 1 얇은 적층평판($s=50$)의 적층수의 증가에 따른 처짐 및 응력변화

Type	처짐		응력-yy		응력-xy		응력-yz	
	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$
현재모델 *1	1.018	1.029	0.290	0.270	0.0228	0.0212	0.276	0.119
현재모델 *2	1.018	1.029	0.290	0.270	0.0228	0.0242	0.276	0.119
현재모델 *3	1.018	1.029	0.290	0.270	0.0228	0.0212	0.316	0.153
2차원 해석해	1.022		0.2737		0.0214		0.102	
3차원 해석해	1.031		0.276		0.0216		0.141	

표 2 두꺼운 적층평판($s=4$)의 적층수의 증가에 따른 처짐 및 응력변화

Type	처짐		응력-yy		응력-xy		응력-yz	
	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$	$p=4$	$p=5$
현재모델 *1	4.386	4.419	0.616	0.621	0.0442	0.0441	0.218	0.222
현재모델 *2	4.386	4.419	0.616	0.621	0.0442	0.0441	0.218	0.222
현재모델 *3	4.421	4.454	0.635	0.639	0.0448	0.0446	0.279	0.284
2차원 해석해	3.964		0.576		0.0308		0.196	
3차원 해석해	4.491		0.663		0.0458		0.292	

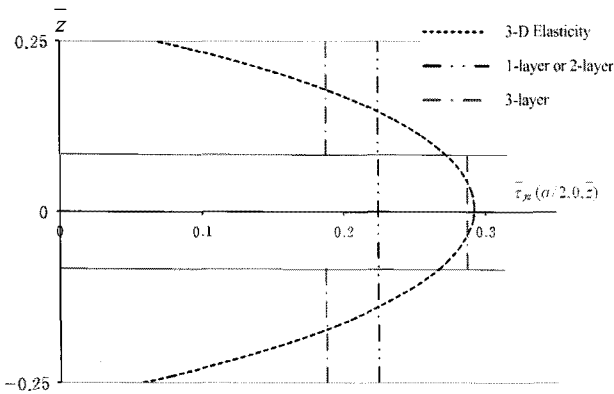


그림 6 두께방향의 적층수 증가에 따른 횡전단응력의 분포

경우에는, 1개만을 고려한 경우와 차이가 없는 이유는 그림 6에서 보듯이 나눈 구간이 실제 횡전단응력의 분포가 상하 대칭이기 때문에, 결국 1개를 나눈 경우와 같은 값을 가지게 된다.

3.3 변위와 응력에 대한 두께방향의 분포

그림 7~9에는 두꺼운 평판에서의 변위와 응력에 대한 분포를 보여주고 있다. 그림 7에서는 본 연구에서 해석한 값과 면내변위의 지그재그 분포를 3차원 탄성이론 값 및 고전적 적층평판 이론값(CLPT: classical laminate plate theory)과 비교를 하고 있다. 일반적으로 고전적 적층 평판 이론을 포함한 C_z^1 함수이론에서는 이러한 지그재그 분포를 잘 표현하지 못하고 있다. 연구에서 제안한 부분-선형 층별 이론에서는 3차원 탄성이론값과 거의 유사한 거동을 하는 것을 알 수 있다. 하지만, 중간층의 경우 정해와 약간의 오차가 있음이 나타나는데, 이것은 수직방향에 대한 프아송 효과로서, 3차원 구성방정식을 사용하지 않고 계산의 효율성을 위해서 평면응력에 대한 구성방정식을 사용하는 선형-층별 이

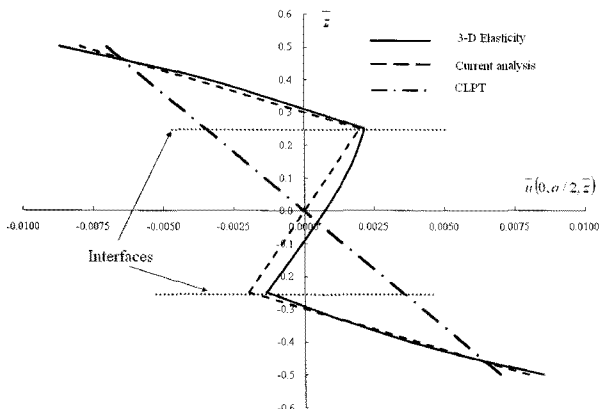


그림 7 두꺼운 적층평판(s=4)의 두께방향에 대한 면내변위분포

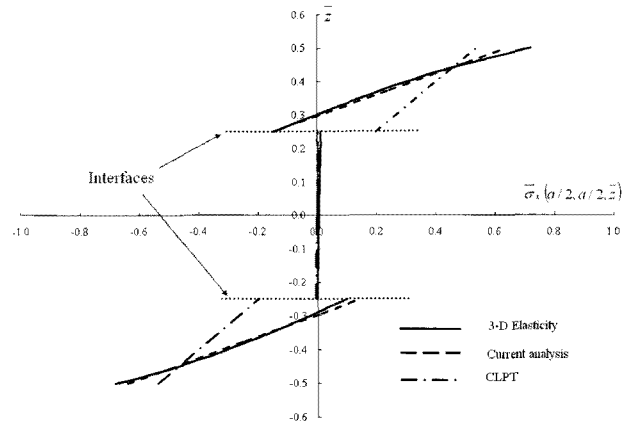


그림 8 두꺼운 적층평판(s=4)의 두께방향에 대한 면내응력 분포

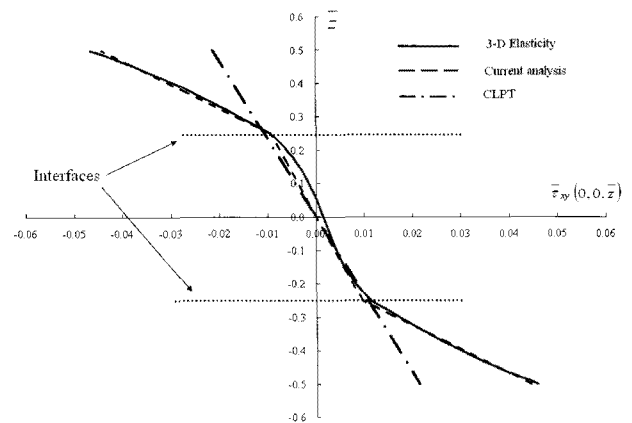


그림 9 두꺼운 적층평판(s=4)의 두께방향에 대한 면내전단응력의 분포

론에서는 횡방향축응력을 고려하지 않기 때문에 중앙부분에서 실제 거동과 약간의 차이를 보이고 있다. 면내 축응력에 대한 거동(그림 8) 및 면내 전단응력에 대한 거동(그림 9) 또한 대체적으로 정해와 유사한 거동을 나타내고 있다.

4. 결론 및 고찰

본 연구에서는 적층해석을 위하여 층별 분리 이론에 기초한 수정된 저매개변수 요소를 제안하였으며, 일반적인 체분 세분화보다 수렴속도가 빠른 p -세분화 기법을 사용하여 3층으로 된 복합적층재료에 대한 변위 및 응력해석을 하였다. 이에 대한 검증은 위해서 3층으로 구성된 복합적층재료의 전체 거동 및 국부적인 거동에 관해서 논의를 하였다. 기존의 3차원 탄성이론을 사용하는 층별분리이론보다 상당한 양의 자유도 수를 줄이면서도 일반적인 2차원 모델링을 하는 요소들보다는 해의 정확성을 높이는 데 초점을 맞추었으며, 얇은 적층평판 뿐만 아니라 두꺼운 적층평판 문제에서도 효율적으로 해석을 할 수 있음을 증명하였다. 수렴성 측면에서는 일

반적으로 변위는 형상함수의 4차 이상에서 그리고 응력값들은 대체적으로 5차 또는 6차에서 부터 값의 변화가 거의 없이 수렴이 이루어진 것이 확인되었다. 또한 깊이 방향으로 배열된 재료의 층수 보다 많게 하는 경우에는 두께가 얇은 경우에는 거의 해의 개선효과가 없으며, 두께가 두꺼운 경우에는 전단변형을 좀 더 정확하게 예측하는 관계로 해의 개선효과가 조금씩 발생했으며, 특히 횡전단변형의 최대값을 얻고자 할 때는 최대값이 발생하는 지역을 깊이 방향으로 좀 더 세분화 함으로써 실제 최대값에 근접한 값을 얻을 수 있다. 또한 2차원 모델링에서는 표현할 수 없는 두꺼운 적층평판의 두께방향에서의 면내변위의 지그재그 변형도 3차원 정해와 유사하게 거동할 수 있는 것이 확인되었다. 제안된 모델은 횡방향축응력의 영향이 많지 않은 적층재료에서 3차원 모델링과 해의 정확도는 유사하면서도 계산의 경제적인 측면에서는 훨씬 효율적으로 이용될 수 있을 것이다.

감사의 글

이 논문은 2007년도 정부재원(교육인적자원부 학술연구조성사업비)으로 한국학술진흥재단의 지원을 받아 연구(KRF-2007-313-D00778) 되었으므로 귀 재단에 깊은 감사를 드립니다.

참 고 문 헌

김준식, 조맹효 (2006) 개선된 일차전단변형이론을 이용한 복합재료 적층평판의 고정밀 해석, 한국전산구조공학회 논문집, 19(4), pp.407~418,
 우광성, 안재석, 박진환 (2004) p-Version 비선형 유한요소 모델링과 실험적 검증에 의한 팻취 보강된 RC보와 슬래브의 극한강도 산정, 한국전산구조공학회 논문집, 17(4), pp.375~387.
 Babuska, I., Szabo, B. (1982) On the rates of convergence of the finite element method, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 18(3), pp.323~341.
 Basu, P. K., Peano, A. (1983) Adaptivity in p-version of finite element analysis, *J. Struct. Eng.-ASCE*, 109(10), pp.2310~2324.

Carrera, E., Ciuffreda, A. (2005) A unified formulation to access theories of multilayered plates for various bending problems, *Compos. Struct.*, 69, pp.271~293.
 Cho, M., Parmerter, R. R. (1993) Efficient higher order composite plate theory for general lamination configurations, *AIAA J.*, 31, pp.1299~1306.
 Noor A. K., Burton, W. S. (1990) Three-dimensional solutions for antisymmetrically laminated anisotropic plates, *J. Appl. Mech.*, 57(1), pp.182~188.
 Noor A. K., Burton, W. S. (1992) Three-dimensional solutions for the thermal buckling and sensitivity derivatives of temperature-sensitive multilayered angle-ply plates, *J. Appl. Mech.*, 59(4), pp.848~856.
 Pagano, N. J. (1969) Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *J. Compos. Mater.*, 3, pp.398~411.
 Pagano, N. J. (1970) Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, 4 pp.20~34.
 Pagano, N. J., Hatfield, S.J. (1972) Elastic behavior of multilayered bidirectional composites, *AIAA J.*, 10(7), pp.931~933.
 Reddy, J. N. (2004) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*, CRC Press, United States of America, p.831.
 Rohwer, K., Friedrichs, S., Wehmeyer C. (2005) Analyzing laminated structures from fiber-reinforced composite materials - an assessment *Tech. Mech.* 25(1), pp.59~79.
 Savithri S., Varadan, T. K. (1992) Laminated plates under uniformly distributed and concentrated loads, *J. Appl. Mech.*, 59(1), pp.211~214.
 Whitney J. M. (1972) Stress analysis of thick laminated composites and sandwich plates, *J. Compos. Mater.*, 6(4), pp.426~440.
 Whitney, J. M. (1973) Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *J. Appl. Mech.*, 40, pp.302~304.