

영역/경계 분할에 의한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화

Computational Efficiency of Thermo-Elasto-Viscoplastic Damage and Contact Analyses by Domain/Boundary Decomposition

김성준* 신의섭†

Kim, Sung Jun Shin, Eui Sup

(논문접수일 : 2008년 12월 5일 ; 심사종료일 : 2009년 2월 3일)

요지

재료 비선형성을 갖는 열탄점소성 손상 문제와 경계 비선형성을 갖는 접촉 문제의 효율적인 해석을 위하여 열탄성 부영역, 열탄점소성/손상 부영역, 공유면, 접촉 공유면에 기반을 둔 영역/경계 분할법을 제안하였다. 대변형과 같은 기하학적 비선형성은 고려하지 않았으며, 영역 및 경계 분할에 관련된 공유면 및 접촉 공유면에서의 연속 구속 조건을 처리하기 위하여 간단한 벌칙 함수 기법을 적용하였다. 결과적으로 재료 및 경계 비선형성은 소수의 부영역과 접촉 경계면에서 계산되는 유한요소 행렬들에 국한된다. 따라서 적절한 해석 알고리즘을 구성하면 대폭적인 효율성 향상이 가능하게 된다. 간단한 수치 실험을 통해서 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성에 관련된 기본적인 특성을 분석하였다.

핵심용어 : 열탄점소성, 손상, 접촉, 영역/경계 분할, 유한요소

Abstract

A domain/boundary decomposition method is applied for efficient analyses of thermo-elasto-viscoplastic damage and contact problems under the assumption of infinitesimal deformation. For the decomposition of a whole domain and contact boundaries, all the equality constraints on the interface and contact interfaces are restated with simple penalty functional. Therefore, the non-linearity of the problem is localized within finite element matrices in a few subdomains and on contact interfaces. By setting up suitable solution algorithms, the computational efficiency can be improved considerably. The general tendency of the computational efficiency is illustrated with some numerical experiments.

Keywords : thermo-elasto-viscoplasticity, damage, contact, domain/boundary decomposition, finite element

1. 서론

재료 가공 작업이나 고성능 구조물의 운용 과정에서 매우 높은 하중 또는 온도 환경에 노출되는 경우 열탄점소성 거동과 같은 재료 비선형성을 수반할 수 있다. 이와 같은 재료 거동이 반복되면 구조물의 강성이 점차 저하되며, 특히 응력이 집중되는 부분에서는 손상이 진전된다. 일반적으로 접촉 현상과 같은 경계 비선형성도 동시에 발생할 수 있으며, 이런 상황에서 정밀한 구조 해석을 위해서는 재료 및 경계 비선형성을 모두 고려해야 한다.

점소성과 손상 이론 또는 해석 기법에 관해서는 기존 문헌

에 다양한 연구 결과가 제시되어 왔다. 예를 들어, 연속체 손상 역학에 근거하여 재료 거동의 비선형을 기술하고 있는 소성 및 손상 연계 모델 등이 있다(Abu Al-Rub 등, 2003; Nayebi 등, 2008). 한편 경계 비선형성을 야기하는 접촉 문제에 대해서는 주로 라그랑지 승수법과 벌칙 함수법 등을 적용한 해석 기법이 연구되었다(Zhong 등, 1996). 그러나 영역 일부에서만 발생하는 재료 비선형 또는 경계면 일부에서만 발생하는 접촉 비선형 문제에 대한 각종 해석을 전체 영역을 기준으로 수행한다면, 매우 큰 자유도를 갖는 복잡한 구조물에 대해서 효율적인 해석 환경을 제공할 수 없다.

이를 극복할 수 있는 가장 확실한 개념은 영역과 경계의

* 책임저자, 정회원 · 전북대학교 항공우주공학과 교수

Tel: 063-270-3995 ; Fax: 063-270-2472

E-mail: esshin@chonbuk.ac.kr

* 전북대학교 항공우주공학과 석사과정

• 이 논문에 대한 토론을 2009년 6월 30일까지 본 학회에 보내주시면 2009년 8월호에 그 결과를 게재하겠습니다.

분할을 통하여 비선형 거동을 하는 부분을 국부적인 영역과 경계에 직접 할당하는 것이다. Fig. 1에 도시한 바와 같이 영역/경계 분할법을 적용함으로써, 열탄점소성 손상 거동을 하는 일부 부영역(subdomain) 및 접촉 현상이 발생하는 경계 공유면(boundary interface)을 선형 거동만을 하는 나머지 부영역으로부터 완전히 분리할 수 있다. 해석 초기 단계에서 열탄점소성 손상 거동은 극히 일부 영역에서만 발생한다는 사실에 착안하여 재료 비선형 거동의 진전에 따라 적절히 영역을 분할한다면, 전체 해석의 효율성을 크게 증가시킬 수 있다. 이외에도 부영역을 기준으로 유한요소 모델을 독립적으로 생성할 수 있으므로, 복잡한 구조 형상에 대한 모델링 문제도 쉽게 해결된다.

지금까지 영역 분할 개념에 근거한 다양한 이산화 기법이 소성 또는 접촉 문제에 적용되어 왔다(Badea 등, 1994; Perera 등, 1997; Alduncin, 1999; González 등, 2008). 공유면에서의 연속 조건 등은 주로 라그랑지 승수법과 벌칙 함수법으로 처리되었다. 그러나 제안된 대부분의 기법들은 해석의 효율성 또는 소요 계산량에 대한 정량적인 기준 제시가 다소 미흡하다고 판단된다. 경계를 분할하는 개념에 대해서는 접촉이 발생하는 경계면을 영역에서 완전 분리하는 유한요소 정식화 기법이 제시되었으며, 해석의 정확성 및 효율성을 검토하였다(김용언 등, 2007; Shin 등, 2008). 그 결과, 유한요소 모델과 해석 조건 등에 따라 계산의 효율성이 수십 배 이상까지 향상됨을 확인하였다.

본 논문에서는 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율화를 위하여 열탄성 부영역, 열탄점소성 손상 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 분할한 상태로 유한요소 정식화를 수행하였다.

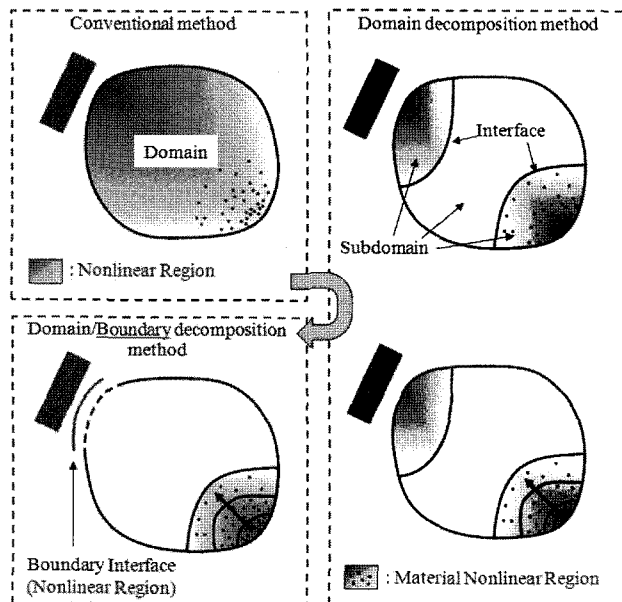


Fig. 1 A concept of domain/boundary decomposition

열역학적 제한 조건이 고려된 열탄점소성 손상 구성 방정식을 적용하였다. 공유면과 접촉 공유면의 연속 등식 조건 및 접촉 경계면의 부등식 조건은 기존의 간단한 벌칙 함수법으로 처리하였다. 정식화에 따른 적절한 해석 알고리즘을 구성한 후, 계산에 소요되는 총 연산 횟수를 정의하였다. 수치 예제를 통해서 본 기법에 의한 열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성 향상에 대하여 분석하였다.

2. 유한요소 정식화

2.1 영역/경계 분할 및 변분 정식화

Fig. 2에 제시한 개념도처럼 전체 영역을 부영역 $\Omega^{(k)}$, 공유면 Γ_I , 접촉 공유면 $\Gamma_C^{(k)}$ 으로 분할할 수 있다. 부영역은 선형(열탄성) 거동을 하는 부영역 $\Omega^{(k)} (k=1, \dots, N_S)$ 와 비선형(열탄점소성 및 손상) 거동을 하는 부영역 $\Omega^{(k)} (k=N_S+1, \dots, N_S+\tilde{N}_S)$ 로 다시 구분된다. $\Gamma_D^{(k)}$, $\Gamma_F^{(k)}$, $\Gamma_C^{(k)}$ 는 각각 변위, 분포 하중, 접촉 경계면이다. 또한 부영역, 공유면, 접촉 공유면의 변위는 각각 $u_i^{(k)}$, v_i , $w_i^{(k)}$ 로 정의되며, 위 첨자 (k)는 k 번째 부영역 또는 접촉 공유면에 관련됨을 의미한다.

공유면 및 접촉 공유면에서 변위 연속 조건을 만족시키는 분포 하중의 벌칙 함수 표현은 각각 다음과 같다.

$$t_{I_i}^{(k+)} = -t_{I_i}^{(k-)} = \epsilon_{DI}^{(k-1)} (v_i - u_i^{(k)}) \quad (1)$$

$$t_{C_i}^{(k+)} = -t_{C_i}^{(k-)} = \epsilon_{DC}^{(k-1)} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \quad (2)$$

여기서, t_i 는 분포 하중(traction) 벡터, e 은 매우 작은 벌칙 상수, 아래 첨자 D 는 변위, I 는 공유면, C 는 접촉에 관련됨을 의미한다. 마찬가지로 접촉 경계면의 부등식 구속 조건은

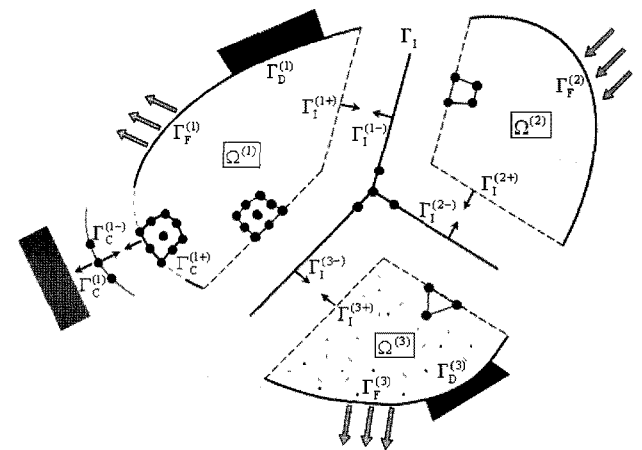


Fig. 2 Linear subdomains $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$; non-linear subdomain $\Omega^{(3)}$; interface Γ_I ; and contact interface $\Gamma_C^{(k-)}$

외부 벌칙 함수로 처리할 수 있다.

$$t_{C_i}^{(k)} = -\epsilon_C^{(k)-1} \left(w_i^{(k)} n_i^{(k)} - s^{(k)} \right)^+ n_i^{(k)} \quad (3)$$

여기서, n_i 는 법선 벡터, s 는 접촉 간극이다. $\langle f \rangle^+$ 는 $f \geq 0$ 이면 f , $f < 0$ 이면 0의 값이 갖는다.

지배 방정식으로 부영역에서의 운동 방정식, 변위-변형도 관계식, 경계 조건 및 공유면과 접촉 공유면에서의 연속 조건, 접촉 조건 등을 고려한다. 변분 정식화를 위한 시험 함수로 가상 변위 δu_i , δv_i , δw_i 를 도입하면, 전체 영역에 대한 지배 방정식의 약형(weak form)을 유도할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \delta \Pi_D^{(k)} + \delta \Pi_{DI} + \sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \delta \Pi_C^{(k)} = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_D^{(k)} = & \int_{\Omega^{(k)}} \rho \dot{u}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV + \int_{\Omega^{(k)}} \sigma_{ij}^{(k)} \delta \epsilon_{ij}^{(k)} dV \\ & - \int_{\Omega^{(k)}} \bar{f}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dV - \int_{\Gamma_F^{(k)}} \bar{F}_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} dS \\ & + \epsilon_{DI}^{(k)-1} \int_{\Gamma^{(k+)}} (u_i^{(k)} - v_i) \delta u_i^{(k)} dS \\ & + \epsilon_{DC}^{(k)-1} \int_{\Gamma_C^{(k+)}} (u_i^{(k)} - w_i^{(k)}) \delta u_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta \Pi_{DI} = \sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \epsilon_{DI}^{(k)-1} \int_{\Gamma^{(k+)}} (v_i - u_i^{(k)}) \delta v_i dS \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_C^{(k)} = & \epsilon_{DC}^{(k)-1} \int_{\Gamma_C^{(k-)}} (w_i^{(k)} - u_i^{(k)}) \delta w_i^{(k)} dS \\ & + \epsilon_C^{(k)-1} \int_{\Gamma_C^{(k)}} \left(w_j^{(k)} n_j^{(k)} - s^{(k)} \right)^+ n_i^{(k)} \delta w_i^{(k)} dS \end{aligned} \quad (7)$$

여기서, ρ 는 밀도, σ_{ij} 는 응력, ϵ_{ij} 는 변형도, f_i 는 체적력을 의미한다.

2.2 열탄점소성 및 손상 모델

비선형 거동을 하는 부영역 $\Omega^{(k)}$ ($k = N_S + 1, \dots, N_S + \tilde{N}_S$)에서는 열탄점소성 및 손상에 관련된 구성 방정식을 적용해야 한다. 기존 문헌에는 매우 다양한 열탄점소성 및 손상 모델이 존재하지만, 여기서는 N형 재료 이론(Chung 등, 2002)에 근거하여 구성 방정식의 기본적인 형태를 요약하였다. 먼저 변형도의 시간 변화율을 다음과 같이 분해한다.

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^t + \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad (8)$$

$$\epsilon_{ij}^t = \alpha_{ij} \theta_+ \quad (9)$$

여기서, 위 첨자 t , e , p 는 각각 열팽창, 탄성, 점소성 성분, α_{ij} 는 열팽창 계수, θ_+ 는 온도 변화량을 의미한다.

자유 에너지 ϕ , 등방성 경화 상태 변수 z , 등방성 손상 상

태 변수 d 를 정의하고 열역학적 제한 조건 등을 고려하면, 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}} = (1-d) C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e \quad (10)$$

$$h = \rho \frac{\partial \phi}{\partial z} = h_1 - (h_1 - h_0) e^{-mz} \quad (11)$$

$$B = \rho \frac{\partial \phi}{\partial d} = -\frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij}^e \epsilon_{kl}^e \quad (12)$$

여기서, h 와 B 는 각각의 내부 상태 변수 z 와 d 에 대응하는 열역학적 공역력(conjugate force), C_{ijkl} 는 초기 탄성 계수, h_0 , h_1 , m 은 경화에 관련된 재료 상수이다.

한편 점소성 변형도, 경화 상태 변수, 손상 상태 변수는 소산(dissipative) 퍼텐셜 ψ 를 도입하여 진전(evolution) 방정식 형태로 표현할 수 있다.

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{ij}} \quad (13)$$

$$\dot{z} = -\frac{\partial \psi}{\partial h} \quad (14)$$

$$\dot{d} = -\frac{\partial \psi}{\partial B} \quad (15)$$

선형 열탄성 거동을 하는 부영역 $\Omega^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N_S$)에서는 항상 $\epsilon_{ij}^p = 0$, $z = 0$, $d = 0$ 을 만족한다.

2.3 유한요소 이산화 및 해석 알고리즘

변분 형태의 지배 방정식 (4)~(7)을 일반적인 유한요소법 과정에 따라 공간과 시간에 대해서 이산화하면(Bathe, 1996), 다음과 같이 행렬 표기된 연립 방정식을 얻는다.

$$\hat{\mathbf{K}}_D^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{P}_{DI2}^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{v} - \mathbf{P}_{DC2}^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{w}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} \quad (k=1, \dots, N_S) \quad (16)$$

$${}^t \hat{\mathbf{K}}_D^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{P}_{DI2}^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{v} - \mathbf{P}_{DC2}^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{w}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{f}}_D^{(k)} \quad (k=N_S+1, \dots, N_S + \tilde{N}_S) \quad (17)$$

$$-\sum_{k=1}^{N_S + \tilde{N}_S} \mathbf{P}_{DI2}^{(k)T \ t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{K}_{DI} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$-\mathbf{P}_{DC2}^{(k)T \ t+\Delta t} \mathbf{u}^{(k)} + {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{K}}_{DC}^{(k) \ t+\Delta t} \mathbf{w}^{(k)} = {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} \quad (k=1, \dots, N_S + \tilde{N}_S) \quad (19)$$

여기서, \mathbf{K}_D , \mathbf{K}_{DC} , \mathbf{K}_{DI} 는 각각 부영역, 공유면, 접촉 공유면의 강성 행렬이며, $\hat{\cdot}$ 은 유효(effective) 행렬, $\tilde{\cdot}$ 는 비선형 행렬, 왼쪽 위 첨자인 t , $t + \Delta t$ 는 시각을 의미한다. 또한,

f_D 는 하중 벡터, P 와 p 는 각종 벌칙 함수에서 기인하는 행렬이다. 특히 비선형 부영역 $\Omega(k)$ ($k = N_S + 1, \dots, N_S + \tilde{N}_S$)에서의 유효 강성 행렬과 하중 벡터는 다음과 같다.

$${}^t\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)} = \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}_D^{(k)} + {}^t\mathbf{K}_D^{(k)} + \mathbf{P}_{DI1}^{(k)} + \mathbf{P}_{DC1}^{(k)} \quad (20)$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{f}}_D^{(k)} = \mathbf{M}_D^{(k)} \left(\frac{4}{\Delta t^2} {}^t\mathbf{u}^{(k)} + \frac{4}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{u}}^{(k)} + {}^t\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \right) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{r}_D^{(k)} + {}^t\mathbf{A}_D^{(k)} {}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\theta}^{(k)} + {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{f}}_D^{p(k)} + {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{f}}_D^{d(k)} \quad (21)$$

여기서, \mathbf{M}_D 는 질량 행렬, \mathbf{r}_D 는 외부 하중 벡터, \mathbf{A}_D 는 열하중 행렬이다. 점소성 및 손상에 관련된 행렬들의 구체적인 표현은 다음과 같다.

$${}^t\mathbf{K}_D^{(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} (1 - {}^t d^{(k)}) \mathbf{B}_D^{(k)T} \mathbf{C} \mathbf{B}_D^{(k)} dV \quad (22)$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{f}}_D^{p(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} (1 - {}^t d^{(k)}) \mathbf{B}_D^{(k)T} \mathbf{C} {}^{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^p dV \quad (23)$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{f}}_D^{d(k)} = \int_{\Omega^{(k)}} \frac{\Delta d^{(k)}}{1 - {}^t d^{(k)}} \mathbf{B}_D^{(k)T} \boldsymbol{\sigma}^{(k)} dV \quad (24)$$

여기서, \mathbf{B}_D 는 변형도-변위 보간 행렬이다.

공유면과 접촉 공유면의 변위 연속 조건을 벌칙 함수로 처리하였으므로, 모든 유효 강성 행렬은 항상 양정치 특성을 갖는다. 따라서 행렬 조립 및 역행렬 계산 등의 과정을 부영역, 공유면, 접촉 공유면을 기본 단위로 하는 병렬화 알고리즘으로 진행할 수 있다. 즉, 식 (16)~(19)에서 구하는 해(변위 벡터)의 순서를 기준으로 하여, 모두 네 종류의 해석 알고리즘 $w-v-u$, $v-w-u$, $w-u$, $v-u$ 를 구성할 수 있다. 해석 알고리즘 $w-u$ 는 공유면 Γ_I 를 설정하지 않은 경우이며, $v-u$ 는 접촉 공유면 $\Gamma_C^{(k)}$ 를 설정하지 않은 경우이다.

예를 들어 알고리즘 $w-v-u$ 관련 수식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} [i] \tilde{\mathbf{K}}_w^{(1,1)} & \dots & \hat{\mathbf{K}}_w^{(1, N_S + \tilde{N}_S)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ sym. & & [i] \tilde{\mathbf{K}}_w^{(N_S + \tilde{N}_S, N_S + \tilde{N}_S)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [i+1] \mathbf{w}^{(1)} \\ \vdots \\ [i+1] \mathbf{w}^{(N_S + \tilde{N}_S)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [i] \tilde{\mathbf{f}}_w^{(1)} \\ \vdots \\ [i] \tilde{\mathbf{f}}_w^{(N_S + \tilde{N}_S)} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$${}^{[i+1]}\mathbf{v} = \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} \left(\sum_{l=1}^{N_S} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)T} [i+1] \mathbf{w}^{(l)} + \sum_{l=N_S+1}^{N_S + \tilde{N}_S} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)T} [i+1] \mathbf{w}^{(l)} \right) + \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} [i] \tilde{\mathbf{f}}_{DI} \quad (26)$$

$${}^{[i+1]}\mathbf{u}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \left(\mathbf{P}_{DI2}^{(k)} [i+1] \mathbf{v} + \mathbf{P}_{DC2}^{(k)} [i+1] \mathbf{w}^{(k)} \right) + {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (k=1, \dots, N_S) \quad (27)$$

$${}^{[i+1]}\mathbf{u}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \left(\mathbf{P}_{DI2}^{(k)} [i+1] \mathbf{v} + \mathbf{P}_{DC2}^{(k)} [i+1] \mathbf{w}^{(k)} \right) + [i] \tilde{\mathbf{u}}^{(k)} \quad (k=N_S+1, \dots, N_S + \tilde{N}_S) \quad (28)$$

여기서, 왼쪽 위 첨자 $[i]$, $[i+1]$ 은 반복 계산(iteration) 횟수, \textcircled{k} 는 시각 t 에서 손상 진전 여부에 따라 해당 행렬을 재계산해야 함을 의미한다. 지면 제약으로 인하여 자세한 수식 유도 과정과 행렬 표기는 생략하였으나, 일부 주요 행렬에 대해서는 부록에 기재하였다. 열탄접소성 손상과 접촉 상태에 관련된 비선형 행렬은 식 (25), (26), (28)에 국한되며, 식 (27)의 역행렬 계산은 반복적으로 수행할 필요가 없다.

3. 총 연산 횟수 분석

계산 효율성을 정밀하게 측정하기 위하여 해석 알고리즘 $w-v-u$ 의 경우 소요되는 연산 횟수 FLOPs(Floating-Point Operations) 분석 내역을 Table 1에 정리하였다. 가우스 소거법에 근거한 LU 분해법을 사용하였으며, 전체(full) 행렬의 삼각 분해 단계 $f_1(D)$ 와 대입 단계 $f_2(D)$, 대역(banded) 행렬의 삼각 분해 단계 $f_3(D, B)$ 와 대입 단계 $f_4(D, B)$ 로 구분된다. 여기서 D 는 자유도, B 는 대역폭이다. 행렬 조립과 같은 단순 연산 과정은 상대적으로 계산량이 적기 때문에, FLOPs 분석에서 제외하였다.

시간 증분 단계에서 연산 반복 횟수에 영향을 미치는 주요 인자를 Fig. 3에 도시하였다. 시각 t 는 손상 진전에 따라 해당 행렬 재계산이 필요한 t^* 와 필요 없는 t° 로 구별된다. $a^{(k)}$ 는 k 번째 접촉 경계면의 접촉 상태 변화 횟수, N_{TS} 는 총 시간 증분 횟수, N_{IT} 는 총 반복 계산 횟수이다.

최종적으로 해석 알고리즘 $w-v-u$ 에 소요되는 FLOPs를 Table 2에 정리하였다. noDBD는 영역/경계 분할법을 적용하지 않은 경우이다. 알고리즘 $v-w-u$, $w-u$, $v-u$

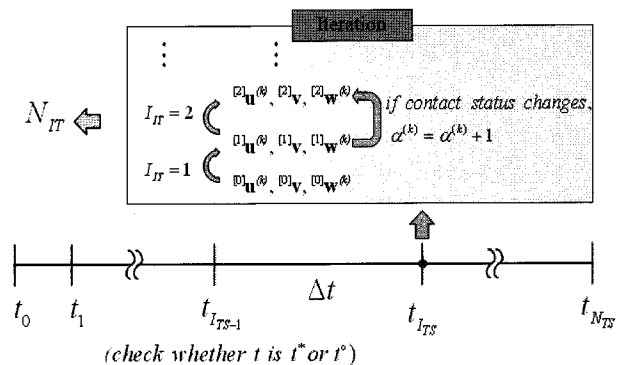


Fig. 3 Notation for time steps and iterations

Table 1 Details of FLOPs analysis for solution algorithm w-v-u

| 구분 | 행렬 | 행렬 크기 | 연산 종류 | 반복 횟수 | k 범위 | 비고 |
|---------------------|--|--------------------------|-------------|-----------------------------|---|--|
| [초기 단계] | | | | | | |
| SOL3 | $\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1}$ | $[D_u^{(k)}, B_u^{(k)}]$ | $f_3(D, B)$ | 1 | $k = 1, \dots, N_s$ | 초기 단계는 $I_{TS} = 1, I_{IT} = 1$ 을 의미함 (시간 증분 횟수 : $I_{TS} = 1, 2, \dots, NTS$) (반복 계산 횟수 : $I_{IT} = 1, 2, \dots$) |
| SOL4 | $\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{DIZ}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, D_v]$ | $f_4(D, B)$ | $1 \times D_v^{(k)}$ | | |
| SOL4 | $\hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{DC2}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, D_w^{(k)}]$ | $f_4(D, B)$ | $1 \times D_w^{(k)}$ | | |
| [증분 단계] | | | | | | |
| SOL3 | $\# \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1}$ | $[D_u^{(k)}, B_u^{(k)}]$ | $f_3(D, B)$ | N_{TS}^* | $k = N_s + 1, \dots, N_s + \tilde{N}_s$ | $I_{IT} = 1$, 손상 관련 행렬 변화 시 |
| SOL4 | $\# \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{DIZ}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, D_v]$ | $f_4(D, B)$ | $N_{TS}^* \times D_v^{(k)}$ | | |
| SOL4 | $\# \hat{\mathbf{K}}_D^{(k)-1} \mathbf{P}_{DC2}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, D_w^{(k)}]$ | $f_4(D, B)$ | $N_{TS}^* \times D_w^{(k)}$ | | |
| SOL1 | $\# \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1}$ | $[D_v, D_w]$ | $f_1(D)$ | N_{TS}^* | - | |
| SOL2 | $\# \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)T}$ | $[D_v, D_w^{(k)}]$ | $f_2(D)$ | $N_{TS}^* \times D_w^{(k)}$ | $k = 1, \dots, N_s$ | |
| SOL2 | $\# \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)T}$ | $[D_v, D_w^{(k)}]$ | $f_2(D)$ | $N_{TS}^* \times D_w^{(k)}$ | $k = N_s + 1, \dots, N_s + \tilde{N}_s$ | |
| [반복 계산 단계 : w 관련] | | | | | | |
| SOL1 | $^{[i]} \hat{\mathbf{K}}_w^{-1}$ | $[D_w, D_w]$ | $f_1(D)$ | $N_{TS}^* \times \alpha$ | - | $I_{IT} = 1$, 손상 관련 행렬 변화 및 하나 이상 접촉 경계면 상태 변화 시 |
| SOL4 | $^{[i+\alpha]} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, 1]$ | $f_4(D, B)$ | N_{TS} | $k = 1, \dots, N_s$ | $I_{IT} = 1$, 모든 시간 증분 시 |
| SOL4 | $^{[i]} \hat{\mathbf{u}}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, 1]$ | $f_4(D, B)$ | N_{IT} | $k = N_s + 1, \dots, N_s + \tilde{N}_s$ | 모든 반복 계산 시 |
| SOL2 | $\# \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} {}^{[i]} \hat{\mathbf{P}}_{DI}$ | $[D_v, 1]$ | $f_2(D)$ | N_{IT} | - | |
| SOL2 | $^{[i+1]} \mathbf{w}$ | $[D_w, 1]$ | $f_2(D)$ | N_{IT} | - | |
| [반복 계산 단계 : v 관련] | | | | | | |
| CAL | $^{[i+1]} \mathbf{v}$ | $[D_v, 1]$ | - | N_{IT} | - | 모든 반복 계산 시 |
| [반복 계산 단계 : u 관련] | | | | | | |
| CAL | $^{[i+1]} \mathbf{u}^{(k)}$ | $[D_u^{(k)}, 1]$ | - | N_{IT} | $k = 1, \dots, N_s + \tilde{N}_s$ | 모든 반복 계산 시 |

Table 2 Results of FLOPs analysis for solution algorithms, noDBD and w-v-u

| Solution Algorithm | Domain/Boundary(Range k) | FLOPs : Decomposition | FLOPs : Substitution |
|--------------------|--------------------------|-------------------------------------|---|
| noDBD | Ω | - | $N_{IT} \times f_4(D_u, B_u)$ |
| w-v-u | $\Omega^{(k)}$ | $1, \dots, N_s$ | $D_v^{(k)} + D_w^{(k)} + N_{TS} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$ |
| | $\Omega^{(k)}$ | $N_s + 1, \dots, N_s + \tilde{N}_s$ | $N_{TS}^* \times (D_v^{(k)} + D_w^{(k)}) + N_{IT} \times f_4(D_u^{(k)}, B_u^{(k)})$ |
| | Γ_1 | - | $N_{TS}^* \times D_w + N_{IT} \times f_2(D_v)$ |
| | Γ_c | - | $N_{TS}^* \times \alpha \times f_1(D_w)$ |

에 대해서도 Table 1의 과정을 거쳐 총 연산 횟수를 산출할 수 있다.

4. 수치 실험 결과 및 고찰

4.1 이차원 직사각형 유한요소 모델

이차원 직사각형 유한요소 모델을 영역/경계 분할한 사례를 Fig. 4에 도시하였다. 전체 영역을 선형 부영역 $\Omega^{(1)}$, 비선형 부영역 $\Omega^{(2)}$, 공유면 Γ_I , 접촉 공유면 $\Gamma_C^{(2-)}$ 로 분할한 경우이다. 전체 모델은 500×1,000개의 사각형 요소로 구성하였다. 시간 증분 횟수, 손상 진전에 따라 유효 강성 행렬을 재계산하는 비율(N_{TS}^*/N_{TS}), 선형과 비선형 부영역 비율, 반

복 계산 횟수에 따른 계산량의 변화를 기록하였다.

Table 3은 각각의 해석 알고리즘에 대한 FLOPs 산출 내역의 예시이다. 주요 정보로서 요소 수, 행렬 크기, 연산 횟수 등이 나열되어 있으며, $N_{TS}=10,000$, $N_{TS}^*=5,000$, $\alpha^{(2)}=20,000$, $N_{IT}=40,000$, $\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}=0.94:0.06$ 으로 설정하였다. 해석 알고리즘 $w-v-u$ 와 $v-w-u$ 는 재료 및 경계 비선형성에 관련된 반복 계산 대부분을 부영역 $\Omega^{(2)}$ 에서 수행하며, 실제 소요되는 계산량이 매우 적음을 직접 확인할 수 있다.

Fig. 5는 시간 증분 횟수의 변화($N_{TS}=1\sim 100,000$)에 따른 FLOPs 결과이다. 영역/경계를 분할하지 않은 noDBD 계산량을 기준 값인 100%로 잡았다. 영역/경계 분할법을 적용한 $w-v-u$, $v-w-u$, $v-u$ 의 총 계산량이 각각 1.11%, 1.12%, 4.51%까지 감소하였으며, 이는 해석의 효율성이 각각 89.9배, 89.2배, 22.2배 향상됨을 의미한다. 그러나 영역을 분할하지 않은 $w-u$ 의 경우는 접촉 공유면에서의 계산량 절감 효과만 기대할 수 있다.

Fig. 6은 시각 t 에서 손상 진전에 따라 유효 강성 행렬 등을 재계산하는 비율($N_{TS}^*/N_{IT}=0.1\sim 0.9$)에 대한 FLOPs 결과이다. 예상대로 N_{TS}^*/N_{IT} 가 작아지면 $w-v-u$, $v-w-u$, $w-u$ 의 계산량은 점진적으로 감소하였다. 접촉 경계면을 분할하지 않은 $v-u$ 계산량은 거의 변하지 않았으며, 이는 접촉 관련 반복 계산의 비중이 상대적으로 크기 때문이다.

비선형 부영역의 크기 비율 $\Omega^{(2)}/\Omega$ 에 따른 FLOPs 결과를 Fig. 7에 도시하였다. 열탄점소성 손상 및 접촉 거동을

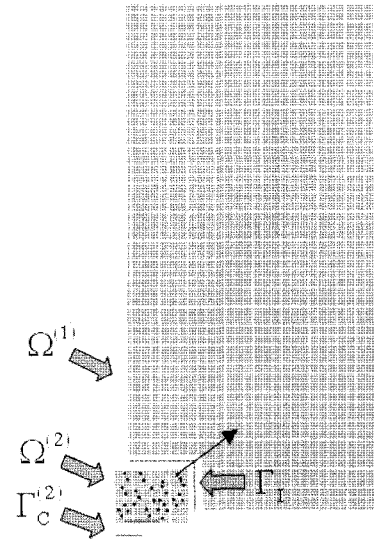


Fig. 4 Finite element mesh of 2D rectangle

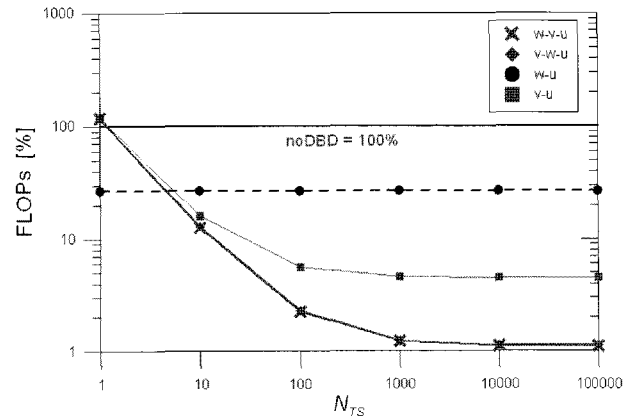


Fig. 5 FLOPs vs. number of time steps

Table 3 FLOPs for 2D rectangular model

| Solution Algorithm | Domain/Boundary | Domain Type | Contact Boundary | Elements | Size of Matrix | | No. of Calculations | | Total GFLOPs | | | |
|--------------------|------------------|-------------|------------------|----------|----------------|----------|---------------------|------------|---------------|--------------|---------------|--------------|
| | | | | | D.O.F. | R.S.V. | Decomp. | Subst. | Decomp. | Subst. | Total | Percent |
| noDBD | Ω | TEPD | \circ | 500,000 | 1,003,002 | 1,006 | 25,000 | 40,000 | 25,334,684.62 | 120,941.50 | 25,455,626.12 | 100.0000 |
| $w-v-u$ | $\Omega^{(1)}$ | TE | \times | 470,000 | 943,002 | 1,006 | 1 | 10,702 | 952.73 | 30,421.26 | 31,373.99 | 0.1232 |
| | $\Omega^{(2)}$ | TEPD | Δ | 30,000 | 60,702 | 306 | 5,000 | 4,060,000 | 28,231.55 | 225,179.93 | 253,411.48 | 0.9955 |
| | Γ_I | \times | \times | 350 | 702 | \times | 5,000 | 550,000 | 576.58 | 406.37 | 982.95 | 0.0039 |
| | Γ_C | \times | \circ | 50 | 102 | \times | 25,000 | 40,000 | 8.84 | 0.62 | 9.46 | 0.0000 |
| | Total | — | — | — | 500,400 | — | — | — | — | 29,769.69 | 256,008.19 | 285,777.88 |
| $v-w-u$ | $\Omega^{(1)}$ | TE | \times | 470,000 | 943,002 | 1,006 | 1 | 10,702 | 952.73 | 30,421.26 | 31,373.99 | 0.1232 |
| | $\Omega^{(2)}$ | TEPD | Δ | 30,000 | 60,702 | 306 | 5,000 | 4,060,000 | 28,231.55 | 225,179.93 | 253,411.48 | 0.9955 |
| | Γ_I | \times | \times | 350 | 702 | \times | 25,000 | 40,000 | 2,882.90 | 29.55 | 2,912.45 | 0.0114 |
| | $\Gamma_C^{(2)}$ | \times | \circ | 50 | 102 | \times | 25,000 | 17,590,000 | 8.84 | 273.61 | 282.46 | 0.0011 |
| | Total | — | — | — | 500,400 | — | — | — | — | 32,076.01 | 255,904.36 | 287,980.37 |
| $w-u$ | Ω | TEPD | Δ | 500,000 | 1,003,002 | 1,006 | 5,000 | 550,000 | 5,066,936.92 | 1,662,945.62 | 6,729,882.54 | 26.4377 |
| | Γ_C | \times | \circ | 50 | 102 | \times | 25,000 | 40,000 | 8.84 | 0.62 | 9.46 | 0.0000 |
| | Total | — | — | — | 500,050 | — | — | — | — | 5,066,945.77 | 1,662,946.24 | 6,729,892.01 |
| $v-u$ | $\Omega^{(1)}$ | TE | \times | 470,000 | 943,002 | 1,006 | 1 | 10,702 | 952.73 | 30,421.26 | 31,373.99 | 0.1232 |
| | $\Omega^{(2)}$ | TEPD | \circ | 30,000 | 60,702 | 306 | 25,000 | 17,590,000 | 141,157.74 | 975,584.82 | 1,116,752.56 | 4.3871 |
| | Γ_I | \times | \times | 350 | 702 | \times | 25,000 | 40,000 | 2,882.90 | 29.55 | 2,912.45 | 0.0114 |
| | Total | — | — | — | 500,350 | — | — | — | — | 144,993.36 | 1,006,045.64 | 1,151,039.00 |

포함하는 부영역 $\Omega^{(2)}$ 의 크기가 작아질수록 $w-v-u$, $v-w-u$, $v-u$ 의 총 계산량이 0.1%수준까지 급격하게 감소하였다.

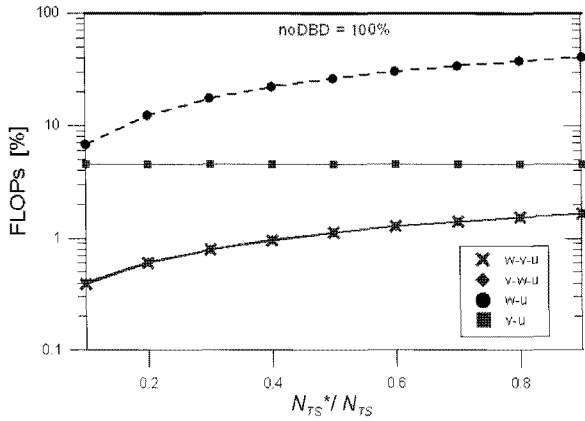


Fig. 6 FLOPs vs. number of recalculations of damage matrices

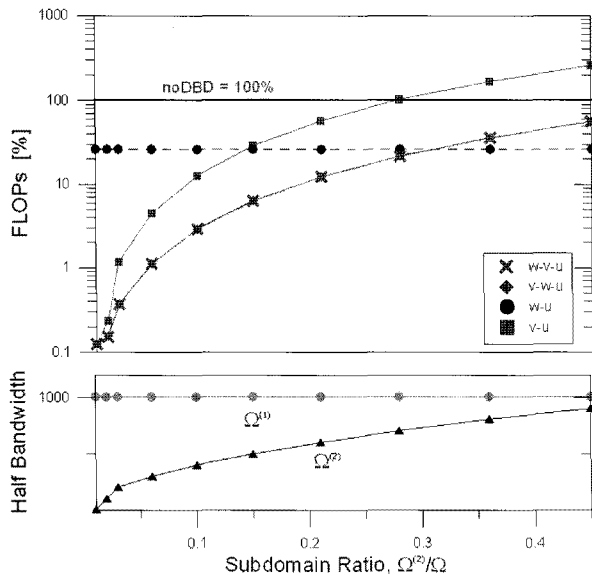


Fig. 7 FLOPs vs. subdomain ratio(half bandwidth)

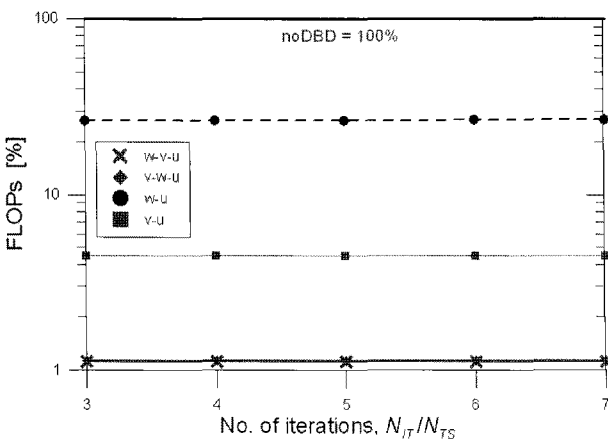


Fig. 8 FLOPs vs. number of iterations

Fig. 8은 각 시간 증분 단계에서의 반복 계산 횟수 비율 ($N_{IT}/N_{TS}=3\sim 7$)에 따른 FLOPs 결과이다. Table 2에 정리된 바와 같이 반복 계산 횟수는 LU 분해법의 대입 단계에만 관련되므로, 해석의 효율성에 큰 영향을 미치지 않는다.

4.2 삼차원 직육면체 유한요소 모델

삼차원 직육면체 유한요소 모델을 영역/경계 분할한 사례를 Fig. 9에 도시하였다. 전체 영역을 선형 부영역 $\Omega^{(1)}$, 비선형 부영역 $\Omega^{(2)}$, 공유면 Γ_I , 접촉 공유면 $\Gamma_C^{(1-)}$, $\Gamma_C^{(2-)}$ 로 분할하였다. 전체 모델은 길이 방향 400개, 너비 방향 100개, 두께 방향 10개의 육면체 요소로 구성하였다.

Fig. 10은 $N_{TS}^*/N_{TS}=0.5$, $\alpha/N_{TS}=2.0$ ($\alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}$), $N_{IT}/N_{TS}=4.0$, $\Omega^{(1)}:\Omega^{(2)}=0.5:0.5$, $\Gamma_C^{(1-)}$ 요소 1개, $\Gamma_C^{(2-)}$ 요소 1개 조건에서 시간 증분 횟수 N_{TS} 에 따른 FLOPs 결과이다. 대체적으로 이차원 모델 결과와 같은 경향을 보였으며, $w-v-u$ 의 상대적 계산량이 2.90%로 가장 효율적이었다.

Fig. 11은 접촉 상태의 변화 횟수(α/N_{TS})에 따른 FLOPs 분석 결과이다. 접촉 경계면을 분할한 $w-v-u$, $v-w-u$, $w-u$ 는 계산량이 크게 감소하였으나, 접촉 경계면을 분할하지 않은 $v-u$ 는 계산량이 증가하였다. Fig. 12는 접촉 공유면의 크기($\Gamma_C^{(2-)}$ 요소 수)에 따른 FLOPs 결과이다. 예상대로 접촉

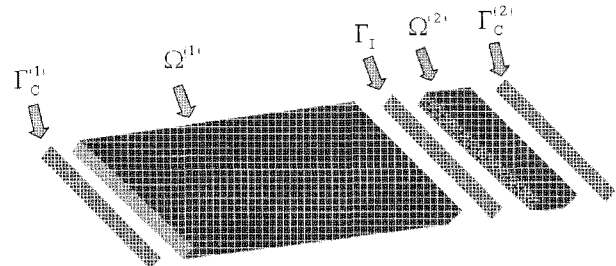


Fig. 9 Finite element mesh of 3D rectangular parallelepiped

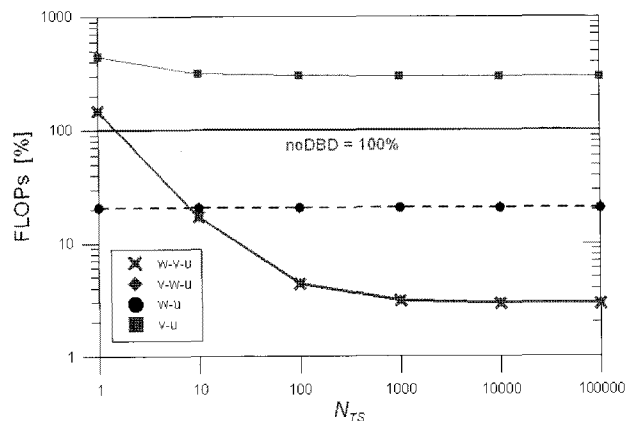


Fig. 10 FLOPs vs. number of time steps

참고 문헌

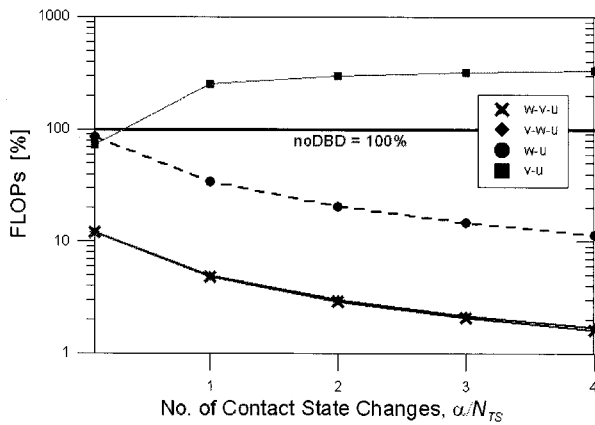


Fig. 11 FLOPs vs. number of contact state changes

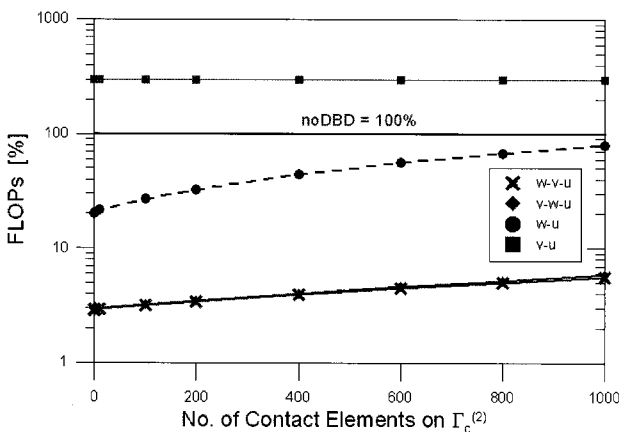


Fig. 12 FLOPs vs. number of contact elements

공유면의 크기가 증가할수록 해석의 효율성이 다소 감소함을 확인할 수 있다.

5. 결 론

열탄점소성 손상 및 접촉 해석의 효율성을 위해서 영역/경계 분할을 적용한 유한요소 정식화 기법을 제안하였다. 영역을 효과적으로 분할함으로써, 열탄점소성 손상 거동과 같은 국부적 재료 비선형성을 일부 부영역 행렬에 할당할 수 있다. 또한 경계까지 분할함으로써, 접촉 현상에 의한 경계 비선형성도 접촉 공유면 행렬에만 할당할 수 있다.

유한요소로 이산화된 연립 방정식의 해를 구하는 순서에 따른 네 종류의 해석 알고리즘을 구성하였으며, 실제 소요되는 총 계산량을 정량적으로 분석하였다. 주요 인자로 시간 증분 횟수, 손상 행렬 재계산 횟수, 접촉 상태 변화 횟수, 반복 계산 횟수 및 부영역, 공유면, 접촉 공유면의 크기를 집중적으로 검토하였다. 수치 실험 결과, 해석에 소요되는 총 계산량이 0.124~6.33%수준까지 감소함을 확인하였다. 이는 영역/경계를 분할하지 않고 해석하는 경우에 비해서 약 15.8~806배의 효율성 향상을 의미한다.

김용언, 류한열, 신의섭 (2007) 영역/경계 분할 정식화에 의한 삼차원 접촉 해석의 효율성 검토, 한국전산구조공학회 논문집, 20(4), pp.469~476.

Abu Al-Rub. R. K., Voyiadjis. G. Z. (2003) On the Coupling of Anisotropic Damage and Plasticity Models for Ductile Materials, *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 40(11), pp.2611~2643.

Alduncin. G. (1999) Augmented Domain Decomposition Methods for the Two Body Contact Problem in Elasto-Visco-Plasticity, *Advances in Eng. Software*, 30(9-11), pp.825~837.

Badea, L., Gilormini, P. (1994) Application of a Domain Decomposition Method to Elastoplastic Problems, *Int. J. Solids and Structures*, 31(5), pp.643~656.

Bathe, K. J. (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey, p.1037.

Chung, S. W., Kim, S. J., Kim, J. H. (2002) Finite Element Simulation of Metal Forming and In-Plane Crack Propagation using Ductile Continuum Damage Model, *Computers & Structures*, 80(23), pp.1771~1788.

González, J. A., Park, K. C., Felippa, C. A., Abascal, R. A. (2008) Formulation based on Localized Lagrange Multipliers for BEM-FEM Coupling in Contact Problems, *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 197(6-8), pp.623~640.

Nayebi, A., El Abdi. R. (2008) Shakedown Analysis of Beams using Nonlinear Kinematic Hardening Materials Coupled with Continuum Damage Mechanics, *Int. J. Mechanical Sciences*, 50(8), pp.1247~1254.

Perera, R., Alarcon, E. (1997) FE-BE Coupling Methods for Elasto-Plasticity, *Communications in Numerical Methods in Eng.*, 13(10), pp.785~792.

Shin, E. S., Kim, Y. U., Jung, S. N. (2008) Domain/ Boundary Decomposition Method for Finite Element Analyses with Contact Boundaries, *Finite Element in Analysis and Design*, 44(14), pp.862~871.

Zhong, Z. H., Larsgunnar. N. (1996) A Unified Contact Algorithm based on the Territory Concept, *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.*, 130(1-2), pp.1~16.

부 록

$${}^{[i]}\tilde{\mathbf{K}}_w^{(k,l)} = \begin{cases} {}^{[i]}\hat{\mathbf{K}}_{DC}^{(k)} - \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)} \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)T} & (k=l) \\ -\hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)} \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(l)T} & (k \neq l) \end{cases} \quad (\text{A1})$$

$${}^{[i]}\tilde{\mathbf{f}}_w^{(k)} = {}^{[i]}\tilde{\mathbf{p}}_{C2}^{(k)} + \hat{\mathbf{P}}_{CD}^{(k)} \hat{\mathbf{K}}_{DI}^{-1} {}^{[i]}\tilde{\mathbf{f}}_{DI} \quad (\text{A2})$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{DI} = \mathbf{K}_{DI} - \sum_{l=1}^{N_s} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)T} \hat{\mathbf{K}}_D^{-1} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)} - \sum_{l=N_s+1}^{N_s+\tilde{N}_s} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)T} \hat{\mathbf{K}}_D^{-1} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)} \quad (\text{A3})$$

$${}^{[i]}\tilde{\mathbf{f}}_{DI} = \sum_{l=1}^{N_s} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)T} {}^{[i]}\hat{\mathbf{u}}^{(l)} + \sum_{l=N_s+1}^{N_s+\tilde{N}_s} \mathbf{P}_{DI2}^{(l)T} {}^{[i]}\tilde{\mathbf{u}}^{(l)} \quad (\text{A4})$$

$${}^{i+\Delta t}\hat{\mathbf{u}}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k-1) i+\Delta t} \hat{\mathbf{f}}_D^{(k)} \quad (\text{A5})$$

$${}^{[i]}\tilde{\mathbf{u}}^{(k)} = \hat{\mathbf{K}}_D^{(k-1) i} {}^{[i]}\tilde{\mathbf{f}}_D^{(k)} \quad (\text{A6})$$