산업기술연구(강원대학교 산업기술연구소 논문집), 제29권 A호, 2009.
Journal of Industrial Technology, Kangwon Natl. Univ., Korea, No. 29 A, 2009.

유한 대수의 다종 수송수단을 고려한 동적 생산-수송 모형

A Dynamic Production and Transportation Model with Finite Number of Multiple Transportation Modes

손 권 익*
Sohn, Kwon-Ik

Abstract

This study deals with the single-product production and transportation model with dynamic demand over finite time horizon, in which the optimal production(order) quantities, transportation modes and the number of each vehicles are determined simultaneously. The finite number of identical vehicles with capacity constraint is given to each mode. Production and transportation costs are assumed to be concave function for generality. For a relevant mathematical model formulated, the theorems and properties are discussed to present the efficient algorithm. A numerical example is solved to illustrate the algorithm developed.

키워드 : *생산, 수송, 용량 제약, concave 비용함수*
Keywords : *production, transportation, capacity constraint, concave cost function*

1. 서론

물류비용의 비중이 커져가고 있는 현실에 생산(발주)정책과 수송정책을 동시에 고려하여야만 진정한 최적화를 이룰 수 있다. 예를 들어 비용구조가 다른 여러 수송수단이 존재하여 선택할 수 있다면 구입량에 따라 적절한 수송수단을 결정할 필요가 생긴다. 이 경우 구입량을 결정한 후에 그 결과에 의해서 수송수단을 결정하는 것은 최적화가 될 수 없다[14,15]. 특히 가용한 수송수단의 용량과 수가 한정될 때는 더욱 그러하다.

Aggarwal[1]은 수송정책의 중요성을 강조하고 현 재고체계의 개선을 위한 몇 가지 제안을 하였으며 Baumol과 Vinod[3]는 하주들의 총 수송수요의 추정과 아울러 수송수단의 선택에 관한 모형을 다루었으나 정적인 상태에 국한되었다. Hwang과 Sohn[6]은 가격 및 수요가 변화하는 동적인 상황에 적용 가능하고 수송과 저장과정에서 산화되는 팜유(Palm Oil)와 같은 진부화 제품에 대한 수송-재고 모형에 관한 연구를 수행하였다. 또 손권익[14]은 구매 및 수송과정에서의 가격할인, 가격할인을 받기 위한 초과구입의 처분가능성 등을 고려한 모형을 다루었다. 이 두 연구는 각 수송수단의 수송량에 대한 용량의 제한이 주어지지 않음으로써 결과적으로 일회의 구매량을 하나의 수송수단으로 수송하는 것이 가능하고 그 경우가 최적이 되었다. 그러나 현실적으로는 수송장비(예를 들면, 트럭 또는 컨테이너들)의 용량의 제약을 받는 경우가 대부분이며 이 경우 한 종류의 수송수단일지라도 여러 대의 수송장비를 이용하거나 여러 종류의 수송수단을 조합하여 선택하여야 할 경우가 생긴다. Lippman[10,11]은 multiple set-up cost model

* 강원대학교 산업공학과 교수, 공학박사

을 다루었다. 이는 결과적으로 수송부분만을 고려한 것으로 수송수단이 하나이고 대수가 여럿인 경우에 해당되는 것이다. 그러나 그의 논문[10]에서 해법의 제시는 대수의 제한이 없는 경우로 국한하였다. 다른 하나의 논문[11]과 Aucamp의 논문[2]은 EOQ모형에 주문비용을 multiple set-up cost로 적용한 것으로 정적인 모형이다. 손권익과 안세희[15]는 용량제한이 주어지는 동적롯트결정모형[4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 13]에 수송정책을 고려하여 최적 구매정책 뿐 아니라, 수송정책을 동시에 결정하는 수송-재고 모형을 정립하여 유한 계획기간 내에서 최적해를 구하는 경우에 대하여 해법을 제시하였다. 여기서 다룬 모형은 비용함수의 형태가 구매와 수송비용은 고정비용 더하기 선형의 변동비용으로 가정하고 재고비용은 선형 변동비용을 가정하였다. 이운식[16]은 수송수단을 화물 컨테이너로 하여 여러 컨테이너 형태가 주어졌을 때 매 기간마다 생산량과 수송수단 및 대수를 선택하는 모형을 정립하여 해를 구하였다. 그의 논문에서는 비용함수를 고정비용 더하기 선형의 생산비용, 고정비용만 있는 수송비용 및 선형의 재고비용을 가정하고 문제 풀기를 용이하게 하기 위하여 매 기간에 오직 한 종류의 수송수단만 선택하도록 하였다. 또한 해를 구하는 방법에 있어서 컨테이너 크기들의 최대 공약수를 이용하여 해를 구하였으나 효율성이 최대 공약수의 크기에 크게 의존되고 전개해 나가는 과정에서 경우의 수가 크게 늘어나는 단점을 가지고 있다. 이에 본 논문에서는 비용함수를 고정비용 더하기 선형의 변동비용 구조를 포함하는 보다 일반화된 concave 비용함수를 가정하고 매 기간에 선택되는 수송수단의 종류에 제한을 두지 않는 일반적인 모형을 정립하여 문제의 성질을 이용한 효율적인 방법을 제시하고자 한다.

2절에는 수학적인 모형이 제시된다. 3절에는 정식화된 문제의 최적해의 특성을 규명하고 계산과정상 유용한 성질을 이용한 효율적인 해법을 제시한다. 다음에는 제시된 해법을 이용하여 예제를 풀어 보이며 끝으로 결언이 뒤따른다.

2. 모형의 정립

모형에 쓰이는 가정, 변수설명과 정식화된 모형은 다음과 같다.

가정

1) 여러 종류의 수송수단이 이용 가능하며 각 수송수단은 수송용량에 한계가 주어져 있다.
2) 수송 소요기간은 무시한다.
3) 계획기간 N은 유한하다.
4) 주문의 결정과 도착은 기간 초에 이루어진다.
5) 주문량에 대한 제한은 두지 않는다.
6) 재고부족의 발생은 허락되지 않는다.
7) 기초와 기말재고는 없는 것으로 한다.
8) 발주, 수송, 재고유지비용함수는 모두 감소하지 않는(Non-decreasing) concave 함수이다.

변수 설명

1) $d(t)$ = 기간 t의 수요.
2) $M(t)$ = 기간 t의 수송수단의 종류.
3) $C(t,m)$ = 기간 t의 수송수단 m의 총 수송용량.
4) $Q(t,m)$ = 기간 t의 수송수단 m으로 운반되는 양.
5) $I(t)$ = 기간 t 말의 재고량.
6) $P_t(\cdot)$ = 기간 t의 생산(구매)비용 함수.
7) $R_t^m(\cdot)$ = 기간 t의 수송수단 m의 수송비용 함수.
8) $H_t(\cdot)$ = 기간 t의 재고유지비용 함수.

모형

$$(\mathrm{P0})\quad \underset{Q(t,m)}{\mathrm{Min}} \quad \sum_{t=1}^{N}[P_t(\sum_{m=1}^{M(t)}Q(t,m))+\sum_{m=1}^{M(t)}R_t^m(Q(t,m)) + H_t(I(t))]$$

$$\text{s.t.}\ \ I(t)=I(t-1)+\sum_{m=1}^{M(t)}Q(t,m)-d(t),\quad t=1,2,\cdots,N.$$

$$I(t)\geq 0,\quad t=1,2,\cdots,N-1.$$

$$I(0)=I(N)=0.$$

$$0\leq Q(t,m)\leq C(t,m),\quad m=1,2,\cdots,M(t),\ t=1,2,\cdots,N.$$

목적함수는 생산(구매)비용, 수송비용, 재고유지비용을 나타내는 식으로 이루어져 있는데 모두 concave 비용함수들이다.

모형(P0)을 변형하여 전체 수송수단의 종류는 M개로 하고 각 수송수단은 한정된 수송용량을 갖는 유한 대수의 동일한 수송장비로 이루어져 있다고 하자. 각 수송수단의 개별 용량과 장비 수를 다음의 기호로 정의한다.

$c(m)$ = 수송수단 m의 개별 용량.(기간에 관계없이 일정한 것으로 한다.)

$v(t,m)$ = 기간 t의 수송수단 m의 수송가능한 수송장비의 수.

그리고 기간 t의 수송수단 m으로의 수송량 $Q(t,m)$을 될 수 있는 대로 만재하여 수송하면 만재 장비 대수는 $Q(t,m)$을 $c(m)$으로 나누어 버림을 한 정수가 되고, $Q(t,m)$을 $c(m)$으로 나눈 나머지가 0보다 크면 나머지를 부분적재하여 수송하게 된다. 이렇게 수송하는 것이 최적이라는 것은

뒤에 나오는 정리(정리 2)에서 보여줄 수 있다. 이를 토대로 모형(P0)를 다시 쓰면,

$$
\begin{aligned}
\text{(P)}\quad \text{Min}\quad & \sum_{t=1}^{M} [P_t(\sum_{m=1}^{M} Q(t,m)) \\
& + \sum_{m=1}^{M} [R_t^m(c(m))\{(Q(t,m) \\
& - Q(t,m) \bmod c(m))/c(m)\} \\
& + R_t^m(Q(t,m) \bmod c(m))] \\
& + H_t(I(t))]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t. } & I(t) = I(t-1) + \sum_{m=1}^{M} Q(t,m) - d(t), \\
& \qquad t=1,2,\cdots,N. \\
& I(t) \geq 0, \quad t=1,2,\cdots,N-1. \\
& I(0) = I(N) = 0. \\
& 0 \leq Q(t,m) \leq c(m)v(t,m), \\
& \qquad m=1,2,\cdots,M,\ t=1,2,\cdots,N.
\end{aligned}
$$

여기서 x mod y 는 x를 y로 나눈 나머지.

모형(P)는 모든 t에 대하여 다음 조건을 만족하기만 하면 최적해가 존재한다.

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{m=1}^{M} c(m)v(i,m) \geq \sum_{i=1}^{t} d(i).$$

여기서는 이 조건을 만족하는 것으로 가정한다.

3. 해법의 개발

모형(P)를 동적계획법(Dynamic Programming)으로 풀기 위한 반복식(Recursive Equation)을 유도하기 위하여 먼저 다음 정리를 증명을 생략하고 적는다.

정리 1 (Inventory Decomposition Property[5]): 어떤 $t(t=1,2,\cdots,N-1)$ 에 대하여 $I(t)=0$ 이고,

$$\sum_{i=t+1}^{k}\sum_{m=1}^{M} c(m)v(i,m) \geq \sum_{i=t+1}^{k} d(i), k=t+1,t+2,\cdots,N$$

이면 본래 문제의 최적해는 두 개의 분리된 문제, 즉 처음 t 기간 동안의 문제와 나머지 $N-t$ 기간 동안의 문제를 각각 풀음으로써 구할 수 있다.

정리 1을 이용하면, 모형(P)는 다음과 같은 반복식으로 나타낼 수 있다.

$F(t)$: $I(t)=0$일 때, 기간 $1,2,\cdots,t$에 걸쳐서 최적계획일 때의 비용.

그러면,

$F(0)=0$.

$$F(v) = \min_{0 \leq u < v} \{F(u) + g(u,v)\},\ v=1,2,\cdots,N.$$

여기서, $g(u,v)$는 $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1,u+2,\cdots,v-1$에 대하여는 $I(t)>0$일 때, 기간 $u+1,u+2,\cdots,v$에 걸쳐서 최적계획을 따를 때의 비용이다.

$g(u,v)$의 계산이 전체 계산의 대부분을 차지하기 때문에 효과적인 $g(u,v)$의 계산을 위하여 최적해의 성질을 조사하여 이용한다.

정의 1: 하나의 수송장비에 의해서 수송되는 양이 그 수송장비의 용량을 다 채우지 못하는 경우, 그 수송을 "부분적재 수송"이라 한다. 부분적재 수송이 발생한 기간을 "부분적재 기간(Fraction Period)"이라 한다.

정리 2: $I(u)=I(v)=0$이고 $t=u+1,u+2,\cdots,v-1$에 대하여는 $I(t)>0$이면, $\{u+1,u+2,\cdots,v\}$ 중에 기껏해야 하나의 부분적재 수송을 포함하는 최적해가 존재한다.

증명: 역으로, 기간 $u+1,u+2,\cdots,v$에 걸쳐서 부분적재 수송이 여럿 있는 비용이 TC인 최적해를 가정하자. 여럿 중 두 부분적재 수송의 기간을 a, b라 하고 각각의 수송수단을 m_1과 m_2라 하자.(여기서 a와 b는 같을 수 있다.) 그리고 두 부분적재 수송의 양을 Q_1과 Q_2라 하자. 그러면 $0<Q_1<c(m_1)$, $0<Q_2<c(m_2)$이다. 또, 기간 a와 기간 b의 수송(구매) 총량을 간결하게 각각 $Q(a)$, $Q(b)$라 하자.

$a \neq b$와 $a=b$인 경우로 나누어 생각한다.

i) $a \neq b (a<b)$인 경우

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min\{Q_1, c(m_1)-Q_1, Q_2, c(m_2)-Q_2, \min_{a \leq t < b} I(t)\}$$

라 하면 $\varepsilon > 0$ 이다.

a) a 시점의 수송수단 m_1으로의 발주량을 $Q_1+\varepsilon$으로 ε만큼 증가시키고 수송수단 m_2로의 발주량을 $Q_2-\varepsilon$으로 감소시킨다. 이 새로운 계획은 모형(P)의 제약조건을 만족한다. 이때 총비용 TC_1은

$$
\begin{aligned}
TC_1 = \ & TC + \{P_a(Q(a)+\varepsilon) - P_a(Q(a))\} \\
& + \left\{R_a^{m_1}(Q_1+\varepsilon) - R_a^{m_1}(Q_1)\right\} \\
& + \sum_{t=a}^{b-1}\{H_t(I(t)+\varepsilon) - H_t(I(t))\} \\
& + \{P_b(Q(b)-\varepsilon) - P_b(Q(b))\} \\
& + \left\{R_b^{m_2}(Q_2-\varepsilon) - R_b^{m_2}(Q_2)\right\}. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

b) 반대로, a 시점의 수송수단 m_1으로의 발주량을 ε만큼 감소시키고 수송수단 m_2로의 발주량을 $Q_2+\varepsilon$으로 증가시킨다. 이 새로운 계획도 가능해이며 총비용 TC_2는

$$
\begin{aligned}
TC_2 = \ & TC + \{P_a(Q(a)-\varepsilon) - P_a(Q(a))\} \\
& + \left\{R_a^{m_1}(Q_1-\varepsilon) - R_a^{m_1}(Q_1)\right\} \\
& + \sum_{t=a}^{b-1}\{H_t(I(t)-\varepsilon) - H_t(I(t))\}
\end{aligned}
$$

$$+\{P_b(Q(b)+\varepsilon)-P_b(Q(b))\}$$
$$+\left\{R_b^{m_2}(Q_2+\varepsilon)-R_b^{m_2}(Q_2)\right\}. \qquad (2)$$

TC는 최적이므로 $TC_1 > TC$, $TC_2 > TC$ 이다. 따라서 $TC_1 + TC_2 > 2TC$ 이다.

식(1)과 식(2)를 더하여 $2TC$를 빼주고 정리를 하면,

$$\{P_a(Q(a)+\varepsilon)+P_a(Q(a)-\varepsilon)-2P_a(Q(a))\}$$
$$+\left\{R_a^{m_1}(Q_1+\varepsilon)+R_a^{m_1}(Q_1-\varepsilon)-2R_a^{m_1}(Q_1)\right\}$$
$$+\sum_{t=a}^{b-1}\{H_t(I(t)+\varepsilon)+H_t(I(t)-\varepsilon)-2H_t(I(t))\}$$
$$+\{P_b(Q(b)-\varepsilon)+P_b(Q(b)+\varepsilon)-2P_b(Q(b))\}$$
$$+\left\{R_b^{m_2}(Q_2-\varepsilon)+R_b^{m_2}(Q_2+\varepsilon)-2R_b^{m_2}(Q_2)\right\}>0. \qquad (3)$$

식(3)의 5개의 중괄호를 하나씩 살펴보자. 우선 첫 번째 중괄호

$\{P_a(Q(a)+\varepsilon)+P_a(Q(a)-\varepsilon)-2P_a(Q(a))\}$가 0보다 같거나 작은 것을 보여 보자.

$P_a(\cdot)$는 concave 함수이므로 $P_a((x'+x'')/2) \geq \frac{1}{2}$ $\{P_a(x')+P_a(x'')\}$의 관계가 있다.

$x'=Q(a)+\varepsilon$, $x''=Q(a)-\varepsilon$ 이라 하면 $(x'+x'')/2 = Q(a)$가 된다. 따라서 첫 번째 중괄호 안의 식의 값은 0보다 같거나 작은 값이 된다. 나머지 중괄호에 대하여도 같은 논리를 적용하면 식(3)의 좌변은 0보다 같거나 작은 값이 됨을 알 수 있다. 이는 식(3)의 관계와 모순이 된다. 따라서 TC가 최적이라는 가정은 맞지 않는다.

ii) $a=b$인 경우

$\varepsilon=\frac{1}{2}\min\{Q_1,\ c(m_1)-Q_1,\ Q_2,\ c(m_2)-Q_2\}$라 놓고 같은 절차를 거치면 TC가 최적이 될 수 없음을 쉽게 보여 줄 수 있다. *Q.E.D.*

정리 2는 우선 모형(P0)를 모형(P)로 바꿀 수 있는 근거가 된다. 또 이를 이용하여 $g(u,v)$ 계산의 효과적인 방법을 제시한다. 방법은 논문[15]에 주어진 방법을 기본 틀로 하여 현 문제에 맞도록 수정하고 추가적인 성질을 규명하여 효율적인 절차를 제시하도록 한다.

먼저 다음의 변수들을 정의한다.

$D(t)$ = 기간 1부터 기간 t까지 누적수요,

즉 $D(t)=\sum_{i=1}^{t} d(i)$.

$C^T(t)$ = 기간 1부터 기간 t까지 누적 총 수송용량

즉 $C^T(t)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{m=1}^{M} c(m)v(i,m)$.

$S(t)$ = 기간 1부터 따져서 기간 t에서의 가능 누적생산(주문)수준의 집합.

X_t = $S(t)$의 요소.

또한, $Z(a;u,v)$를 a를 부분적재 기간으로 미리 정해 놓고 $g(u,v)$를 푸는 문제로 하고 $O(a;u,v)$를 이 문제의 최소값이라 하자. 그러면,

$g(u,v)$ = $\min_a O(a;u,v)$.

$Z(a;u,v)$를 푸는데 있어, 각 기간의 가능 누적생산(주문)수준의 집합은 다음과 같이 찾는다.

$t=u$에서, $S(t)$는 하나의 요소, 즉 $X_u = D(u)$를 갖는다.

$t=u+1,u+2,\cdots,a-1$에 대하여는 전진법(Forward Recursion)으로 $S(t-1)$로부터 $S(t)$를 구한다. 즉,

$$X_t = X_{t-1} + \sum_{m=1}^{M}\triangle(m)c(m),$$
$$\triangle(m)\in\{0,1,\ldots,v(t,m)\}$$

이때, $\max\{D(t)+\varepsilon,\ D(v)-C^T(v)+C^T(t)\}\leq X_t \leq D(v)$를 만족한다. 여기서 ε은 매우 작은 양수를 나타낸다.

$t=a,a+1,\cdots,v-1$에 대하여는 후진법(Backward Recursion)으로 $S(t+1)$로부터 $S(t)$를 구한다. 즉,

$$X_t = X_{t+1} - \sum_{m=1}^{M}\triangle(m)c(m),$$
$$\triangle(m)\in\{0,1,\ldots,v(t+1,m)\}$$

이때, $D(t) < X_t \leq D(u)-C^T(u)+C^T(t)$.

$t=v$ 에서는 $X_v = D(v)$.

집합 $S(t)$의 계산과 병행하여 각 요소들의 부분비용 계산을 위해 다음의 변수를 정의한다.

$W(t,X)$ = 기간 t에서 가능 누적생산(주문)수준이 X일 때의 부분비용.

$W(t,X)$는 다음 반복식에 의하여 계산된다.

$$W(u,X_u) = W(v,X_v) = 0.$$

$t=u+1,u+2,\cdots,a-1$에 대하여

$$W(t,X_t) = W(t-1,X_{t-1}) + P_t\left(\sum_{m=1}^{M}\triangle(m)c(m)\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\triangle(m)R_t^m(c(m))$$
$$+H_t(X_t-D(t)),\ \triangle(m)\in\{0,1,\cdots,v(t,m)\}.$$

$t=v-1,v-2,\cdots,a$에 대하여,

$$W(t,X_t) = W(t+1,X_{t+1}) + P_{t+1}\left(\sum_{m=1}^{M}\triangle(m)c(m)\right)$$
$$+\sum_{m=1}^{M}\triangle(m)R_{t+1}^m(c(m))$$
$$+H_t(X_t-D(t)),\ \triangle(m)\in\{0,1,\cdots,v(t+1,m)\}.$$

부분적재 기간 a에서 $0 < X_a - X_{a-1} \le C^T(a) - C^T(a-1)$을 만족하는 쌍 (X_{a-1}, X_a)들에 대하여, $Z(a;u,v)$의 총비용 $O(a;u,v)$를 다음과 같이 계산한다.

부분적재 수송의 양을 Q_f라 할 때 다음 식을 만족하는 모든 $\triangle(m)$의 조합 및 Q_f와 해당 수송수단 m_f를 찾는다.

$$X_a - X_{a-1} = \sum_{m=1}^{M} \triangle(m)c(m) + Q_f,$$
$$\triangle(m) \in \{0,1,\cdots,v(a,m)\}, \ m \ne m_f,$$
$$\triangle(m_f) \in \{0,1,\cdots,v(a,m_f)-1\},$$

여기서, $0 \le Q_f < c(m_f)$.

$$O(a;u,v) = \min_{(X_{a-1},X_a)} [W(a-1,X_{a-1}) + W(a,X_a) + P_a(X_a - X_{a-1}) + \min_{\triangle(m),\,Q_f,\,m_f} \{ \sum_{m=1}^{M} \triangle(m) R_a^m(c(m)) + R_a^{m_f}(Q_f) \}].$$

그러면, $g(u,v) = \min_a O(a;u,v)$이다.

전, 후진법 과정에서, 다음 성질들을 이용하면 계산량을 줄일 수 있다[15].

성질 1: i) 전진법에서, $S(t-1)$의 요소 X_{t-1}이 $X_{t-1} \ \ge \ \max\{D(t)+\varepsilon, \ D(v) - C^T(v) + C^T(t)\}$이면 $S(t)$의 요소가 된다.

ii) 후진법에서는 $S(t+1)$의 요소는 $X_{t+1} \ \le \ D(u) - C^T(u) + C^T(t)$이면 $S(t)$의 요소가 된다.

성질 2: i) 만일 전진법 사용 중에 $S(a-1) = \varnothing$이면 a보다 큰 부분적재 기간에 대하여는 고려할 필요가 없다.

ii) 만일 후진법 사용 중에 $S(i) = \varnothing$, $i > u$이면 i보다 큰 부분적재 기간에 대하여만 고려하면 된다. 따라서 i 이하의 부분적재 기간 a에서의 비용 계산은 필요 없어진다.

논문[15]에 제시된 위의 두 성질 외에 다음의 성질을 사용하면 $S(t)$의 생성에 있어 요소의 수를 줄이는데 효과적이다.

성질 3:

i) 전진법에서 $X_t^a \le X_t^b$인데 $W(t,X_t^a) \ge W(t,X_t^b)$이면 X_t^a는 제외할 수 있다.

ii) 후진법에서 $X_t^a \ge X_t^b$인데 $W(t,X_t^a) \ge W(t,X_t^b)$이면 X_t^a는 제외할 수 있다.

i)의 이유: $X_t^a = X_t^b$인 경우는 당연한 것이다. $X_t^a < X_t^b$인 경우는 기간 t까지 X_t^a를 구입하는 것이 X_t^b보다 전체 기간의 총비용이 더 적게 든다면 $t+1$ 이후의 소요 비용이 더 적다는 것이 된다. 이때는 모든 비용함수는 단조증가함수이므로 X_t^b를 X_t^a까지 줄이고 t 이후에는 X_t^a와 같은 계획을 따르면 현재의 X_t^a보다 더 좋은 해를 얻게 된다. 줄이는 방법은 t에 가까운 시기부터 기간 1로 거슬러 가며 줄여 나가 X_t^a를 만들어 주면 된다.

ii)의 이유: $X_t^a > X_t^b$인 경우 X_t^a를 구입하는 것이 전체 기간의 총비용이 더 적게 든다면 기간 1부터 t까지 비용(기간 t의 재고비용은 제외)에서 X_t^a가 X_t^b 경우보다 더 작다는 것이 된다. 이때 i)의 경우와 같이 기간 1부터 t까지 구매량 X_t^a를 X_t^b까지 줄이고 t 이후에는 X_t^b의 계획을 따르면 현재의 X_t^a보다 더 좋은 해를 얻게 된다.

성질 3의 이용은 같은 종류의 수송수단이 여럿 있는 모형(P)의 경우 더욱 필요하다. 또 논문[16]의 해법에서 이용한 용량간의 최대공약수가 큰 경우에도 큰 효과를 볼 수 있다.

많은 계산시간이 부분적재 기간 a에서 $X_a - X_{a-1}$을 수송하는 방법을 찾는 것에 소비된다. 이를 위해 분지한계법(Branch and Bound Algorithm)처럼 가지를 뻗어 감에 있어 하한값을 이용하여 가지를 자르는 방법을 이용한다. 즉, 후진법을 먼저 시행하고 전진법으로 나가는 과정에서 미리 구한 비용보다 예상 비용(하한값)이 크면 그 이하의 계산을 생략하여 계산시간을 줄여간다.

$S(t)$의 요소들이 크기의 오름차순으로 들어 있다고 하자. 성질 3을 이용하였다면 각 요소들의 부분비용이 전진법의 경우는 오름차순이 될 것이고 후진법의 경우는 내림차순이 될 것이다. 이를 이용하는 부분적재 기간 a에서의 계산절차는 다음과 같다.

$S(a-1) = \{X_{a-1}^1, \cdots, X_{a-1}^m\}$, $X_{a-1}^1 < \cdots < X_{a-1}^m$와 $S(a) = \{X_a^1, \cdots, X_a^n\}$, $X_a^1 < \cdots < X_a^n$ 외에 각 수송수단의 조합이 만들어 낼 수 있는 크기와 수송비용을 사전에 만들어 놓는다. 그 집합을 $T(a)$라 하자. $T(a)$의 요소들의 순서는 비용의 오름차순으로 한다. 크기의 오름차순과 비용의 오름차순은 반드시 일치하지 않을 수도 있다. $T(a) = \{C_a^1, \cdots, C_a^\ell\}$, 여기서 $R(C_a^1) \le \cdots \le R(C_a^\ell)$이며 $R(C_a)$는 C_a를 실현하는데 드는 수송비용이다. C_a들은 같은 크기일지라도 수송수단의 구성이 다를 수 있다. 이 $T(a)$는 전, 후진법의 진행과정에서 $S(a)$ 및 $W(a,X)$의 계산에도 유용하다. M 종류의 수송수단의 수송용량을 무리 없이 $c(1) \le \cdots \le c(M)$이라 가정하고 이상의 부분적재 기간에서의 절차를 정리하면 다음과 같다.

Procedure

```
For $X_{a-1} := X_{a-1}^1$ to $X_{a-1}^m$ do
 begin
  For $X_a := X_a^n$ to $X_a^1$ do
   begin
    If $X_a < X_{a-1}$ then go to Loop_$X_{a-1}$
    If $X_a - X_{a-1} > \max_k C_a^k$ then go to Loop_$X_a$   ①
    If $X_a = X_{a-1}$ then
     begin
      $W_1 := W(a-1, X_{a-1}) + W(a, X_a)$
      If $W_1$ <min_value then min_value:= $W_1$
      go to Loop_$X_{a-1}$
     end
   $W_1 := W(a-1, X_{a-1}) + W(a, X_a) + P_a(X_a - X_{a-1})$
    If $W_1 \geq$ min_value then go to Loop_$X_{a-1}$
    For $C_a := C_a^1$ to $C_a^\ell$ do
     begin
      fraction:= $X_a - X_{a-1} - C_a$
      If fraction<0 then go to Loop_$C_a$   ②
      If fraction $\geq c(M)$ then go to Loop_$C_a$
      $W_2 := W_1 + R(C_a)$
      If $W_2 \geq$ min_value then go to Loop_$X_a$
      If fraction=0 then
       begin
        min_value:= $W_2$
        go to Loop_$C_a$   ③
       end
      For $m := M$ to 1 do
       begin
        If $m$ is not available in $C_a$ then go to Loop_$m$ ④
        If fraction $\geq c(m)$ then go to Loop_$C_a$
        $W_3 := W_2 + R_a^m$(fraction)
        If $W_3$ <min_value then min_value:= $W_3$
       Loop_$m$:end
     Loop_$C_a$:end
   Loop_$X_a$:end
 Loop_$X_{a-1}$:end
```

수송수단의 조합이 많은 경우 $X_a - X_{a-1}$의 계산 결과를 저장하여 두었다 비교하여 같은 값(기간 a의 생산/구매량)의 저장된 결과를 이용하면 계산시간을 줄일 가능성이 매우 높으나 대신에 찾는 시간이나 기억장소의 추가가 요구된다.

논문[10,16]에서와 같이 수송수단의 대수가 무한하다고 가정하면 전, 후진법에서 X_t의 범위는 간단히 $D(t) < X_t \leq D(v)$가 된다. 부분적재 기간에서의 처리에 있어서는 $T(a)$의 요소들은 크기와 비용의 순서가 일치할 것이다. 크기가 중복이 되는 경우 비용이 제일 작은 것만 고르면 되기 때문에 중복도 없앨 수 있다. 따라서 절차 중 ②와 ③은 Loop_C_a 대신에 Loop_X_a가 가능하다. 모든 크기를 감당할 수 있으므로 과정 ①과 ④는 필요 없어진다. 또한 논문[16]에서와 같이 수송비용을 오로지 고정비용만 고려하거나, 수송범위에 따라 최적의 수송수단이 정해지게 되면 부분적재 수송량에 대해 최적의 수송수단을 정하는 부분이 간단해 질 수 있을 것이다.

4. 예제

지금까지 개발한 해법을 이용하여 논문[16]에서 주어진 예제에다 컨테이너(수송장비)의 대수 제한을 추가한 간단한 5-기간 예제를 풀어 비교해 보기로 하자.

구입비용 함수: $P_t(Q) = o(t)\delta(Q) + p(t)Q$, 여기서 $Q > 0$ 이면 $\delta(Q) = 1$, 그 외는 0,

수송비용 함수: $R_t^m(Q) = s(t,m)\delta(Q) + r(t,m)Q$,

재고유지비용 함수: $H_t(I) = h(t)I$로 가정하면 논문[15]의 형태가 되고 $r(t,m) = 0$을 추가하면 논문[16]의 목적식이 된다.

논문[16]의 예제에서와 같이 두 종류의 컨테이너를 이용할 수 있는데 typeⅠ의 용량은 100, typeⅡ는 150이다. 추가로 대수는 typeⅠ은 매기마다 2대, typeⅡ는 매기마다 1대씩 이용 가능한 것으로 가정하자. 나머지 관련된 비용은 표 1에 주어져 있으며 표 2는 계산 결과를 요약한 것이다.

최적의 정책은 기간 1에 90을 생산하여 typeⅠ로 수송하고 기간 2에 150을 typeⅡ로 수송하며 기간 3에 310을 생산하여 typeⅠ로 200, Ⅱ로 110을 수송한다. 이때의 최소비용은 4250이다. 기간 1과 기간 3에서는 각각 typeⅠ로 90, typeⅡ로 110의 부분적재 수송이 존재한다. 이 결과는 수송수단(컨테이너)의 대수 제한을 두지 않고 한 기간에는 하나의 수송수단으로 제한한 논문[16]의 결과(최소비용 4235, 최적 수송량 (100,0), (0,150), (300,0), (0,0), (0,0))와 약간의 차이를 보이고 있다. 즉 기간 3의 300은 typeⅠ 3대분 또는 typeⅡ 2대분으로 용량제한이 각각 2대, 1대로 주어진 경우는 실현될 수 없는 것이다. 참고로 대수 제한을 두지 않고 하나의 수송수단이라는 제한을 없애도 논문[16]과 동일한 결과가 얻어진다. 다만, 관련 비용 구조가 달리 주어진다면 여러 수송수단을 혼성해 수송하는 편이 비용이 더 저렴할 수도 있다.

표 1 예제 자료

	$m \backslash t$	1	2	3	4	5
$s(t,m)$	I	100	90	90	100	100
	II	150	135	135	150	150
$p(t)$		7	6	6	8	7
$o(t)$		70	50	50	80	70
$h(t)$		1	1	1	1	1
$d(t)$		90	150	220	40	50

표 2 계산 결과

v	u	$g(u,v)$	$f(u)+g(u,v)$	$f(v)$	$(Q(t,1),Q(t,2))$
1	0	800	800	800	(90,0)
2	0	1905	1905		
	1	1085	1885	1885	(90,0),(0,150)
3	0	3510	3510		
	1	2700	3500		
	2	1595	3480	3480	(90,0),(0,150),(100,120)
4	0	3790	3790	3790	(100,0),(0,150),(100,150),(0,0)
	1	3015	3815		
	2	1965	3850		
	3	500	3980		
5	0	4280	4280		
	1	3510	4310		
	2	2365	4250	4250	(90,0),(0,150),(200,110),(0,0),(0,0)
	3	950	4430		
	4	520	4310		

5. 결언

본 연구에서는 여러 수송수단의 수송장비의 대수가 유한한 경우에 기별 생산(구매)량과 수송수단을 함께 결정하여 생산-수송 계획의 최적화를 이루었다. 생산(구매)비용, 수송비용 및 재고유지비용은 고정비용 더하기 선형의 변동비용을 포함하여 다양한 비용구조에 두루 적용이 가능한 concave함수를 가정하였다. 여러 수송수단을 복수로 선택 가능한 문제의 특성을 고려하여 유용한 성질들을 규명함으로써 효율적인 해법을 개발하였다. 개발된 모형과 해법은 수송비의 부담이 상대적으로 큰 업체에서 생산(구매)계획에 이용하면 많은 도움이 될 수 있을 것이다. 앞으로의 연구과제로는 기별 생산량의 한계를 주거나 재고부족의 허용을 포함하는 보다 현실적인 문제의 해결을 들 수 있겠다.

참 고 문 헌

[1] S. C. Aggarwal, "Auditing Inventory and Transportation Policies", *Industrial Engineering*, Vol. 6, No. 11, pp.28-35, 1974.

[2] D. C. Aucamp, "A Solution to the Multiple Set-up Problem", *International J. of Production Research*, Vol. 22, No. 4, pp.549-554, 1984.

[3] W. J. Baumol and H. D. Vinod, "An Inventory Theoretic Model of Freight Transport Demand", *Management Science*, Vol. 16, No. 7, pp.413-421, 1970.

[4] M. Florian and M. Klein, "Deterministic Production Planning with Concave Costs and Capacity Constraints", *Management Science*, Vol. 18, No. 1, pp.12-20, 1971.

[5] M. Florian, et. al., "Deterministic Production Planning: Algorithms and Complexity", *Management Science*, Vol. 26, No. 7, pp.669-679, 1980.

[6] H. Hwang and Kwon-Ik Sohn, "An Optimal Policy for Dynamic Transportation-Inventory Model with Deteriorating Items", *IIE Transactions,* Vol. 17, No. 3, pp. 233-241, 1985.

[7] R. Jagannathan and M. R. Rao, "A Class of Deterministic Production Planning Problems", *Management Science*, Vol. 19, No. 11, pp.1295-1300, 1973.

[8] A. M. Lambrecht and H. Luss, "Production Planning with Time Dependent Capacity Bounds", *European J. of Operational Research*, Vol. 9, No. 3, pp.275-280, 1982.

[9] M., Lambrecht and J. Vander Eecken, "A Capacity Constrained Single Facility Dynamic Lot-Size Model", *European J. of Operational Research*, Vol. 2, No. 2, pp.132-136, 1978.

[10] S. A. Lippman, "Optimal Inventory Policy with Multiple Set-up Costs", *Management Science*, Vol. 1, No. 1, pp.118-138, 1969.

[11] S. A. Lippman, "Economic Order Quantities and Multiple Set-up Costs", *Management Science*, Vol. 18, No. 1, pp.39-47, 1971.

[12] S. F. Love, "Bounded Production and Inventory Models with Piecewise Concave Costs", *Management Science*, Vol. 20, No.

3, pp.313-318, 1973.
[13] C. Swoveland, “A Deterministic Multi-Period Production Planning Model with Piecewise Concave Production and Holding-Backorder Costs”, *Management Science*, Vol. 21, No. 3, pp. 1007-1013, 1975.
[14] 손권익, “가격할인과 처분이 가능한 동적 수송-재고 모형”, *대한산업공학회지*, Vol. 16, No. 1, pp.27-36, 1990.
[15] 손권익, 안세희, “용량제한이 있는 동적 수송-재고 모형”, *강원대학교 논문집*, 제32집, pp.199-203, 1993.
[16] 이운식, “다수의 화물컨테이너를 고려한 동적 생산-수송 모형에 관한 연구”, *대한산업공학회지*, Vol. 24, No. 1, pp.157-165, 1998.