

---

# 데이터-재순환 최소 평균 자승 알고리즘을 이용한 적응 횡단선 필터의 수렴속도 개선

오승재\*

## The Improvement of Adaptive Transversal Filter with Data-Recycling LMS Algorithms Convergence Speed

Seung-jae Oh\*

### 요 약

본 논문은 LMS 알고리즘을 이용하여 적응횡단선 필터의 수렴 속도를 향상시키기 위한 효율적인 신호간섭 제어기법을 제안한다. 수신 데이터를 재사용하여 심볼 시간 주기에 계수들을 곱함으로써 적응되는 제안된 알고리즘의 수렴특성이 수렴 속도의 향상을 이론적으로 증명하기 위해 분석한다. 스텝-크기 매개변수  $\mu$ 가 증가됨에 따라 LMS 알고리즘의 수렴 속도가 제어된다. 고유치 확산을 증가시킴에 따라 적응 등화기의 수렴속도를 천천히 제어하고 평균 자승 에러의 안정-상태 값을 증가시키는 효과를 나타내며 데이터-재사용 LMS 알고리즘이 적응횡단선 필터의 수렴속도를  $(B+1)$ 배만큼 증가시켜 신호간섭제어의 우수성을 입증한다.

### ABSTRACT

In this paper, an efficient signal interference control technique to improve the convergence speed of Adaptive transversal filter with LMS algorithm is introduced. The convergence characteristics of the proposed algorithm, whose coefficients are multiply adapted in a symbol time period by recycling the received data, are analyzed to prove theoretically the improvement of convergence speed. According as the step-size parameter  $\mu$  is increased, the rate of convergence of the algorithm is controlled. Increasing the eigenvalue spread has the effect of controlling down the rate of convergence of the adaptive equalizer and also increasing the steady-state value of the average squared error and also demonstrate the superiority of signal interference control to the filter algorithm increasing convergence speed by  $(B+1)$  times due to the data-recycling LMS Algorithms.

### 키워드

LMS(Least Mean Square), Adaptive transversal filter, Data-recycling Structure, Convergence Speed

### 1. 서 론

횡단선 적응필터에 수신되는 간섭신호를 제거하기

위한 방법으로 최소 평균 자승(LMS : Least Mean Square) 알고리즘이 이용되는데 이 방식은 간결성과 효율성 때문에 광범위하게 이용되어 왔다[1,2,3,4,5].

---

\* 순천청암대학 컴퓨터정보과  
심사완료일자 : 2009. 09. 05

접수일자 : 2009. 07. 29

그러나 횡단선 필터 탭 계수들을 조절하기 위한 새로운 반복 알고리즘이 개발되어 왔으며[6], 이 알고리즘은 탭 계수들의 상수를 유지하는 개별 탭 계수를 갱신하기 위해 LMS 알고리즘을 이용한다.

본 논문에서는 LMS 알고리즘을 이용한 탭 계수 지연 라인(TDL : Tapped Delay Line) 적응 필터의 빠른 수렴 속도에 대해 효율적인 신호간섭 제어 기법을 제시한다.

적응 필터의 탭 가중치를 적응 제어하기 위해 단일 탭 입력 벡터를 이용하는 대신에 몇몇의 한정된 버퍼들에 저장되는 탭 입력 벡터들을 이용하는 데이터 재순환 알고리즘을 이용함으로써 적응 탭 가중치 벡터의 갱신을 통한 빠른 수렴성을 나타내기 위해 새로운 구조를 제안하고, 연산 복잡성을 증가시키지 않고 충분히 수렴속도를 (B+1)배로 향상시킨다.

## II. 데이터 재순환 필터

적응 횡단선 필터의 탭 가중치를 갱신하기 위해서는 두 가지 처리 과정으로 이루어진다[3,4]. 첫 번째는 최적의 이론으로 잘 알려진 급경사 방법을 이용하는데 최적의 해로 정의된 행렬 Wiener-Hopf 방정식을 통하여 시스템을 수정한다. 두 번째는 통계적 특성으로 가정된 경사 벡터에 대한 추정치를 유도하기 위해 상관에 대한 연속적인 값을 필요로 한다. 본 논문은 이러한 처리과정을 모두 만족시키는 LMS 알고리즘을 응용하여 실수 값 데이터를 가진 횡단선 필터의 탭 가중치 벡터에서 갱신된 탭 가중치 값과 탭 입력 벡터 에러 신호 그리고 학습을 변수를 기술한다.

그림 1은 적응횡단선 필터의 입력 벡터에서 탭 가중치를 조절하기 위해 이용된 두 개의 탭 a, b에 각각 버퍼를 두어 폐기된 데이터를 재활용하는 재활용 데이터(B=2)를 이용한 제안된 구조를 나타내었다. 그림 1에서 나타낸 바와 같이 처음에 탭 a의 버퍼에서 재사용 데이터  $u(n-2)$  와 탭 b의 버퍼에서 재사용 데이터  $u(n-3)$ 은 에러  $e(n,2)$ 을 이용하여  $w(n,2) = [w_0(n,2), w_1(n,2)]^H$ 을  $w(n,1)$

$= [w_0(n,1), w_1(n,1)]^H$ 로 갱신하고 다음으로  $w(n,1) = [w_0(n,1), w_1(n,1)]^H$ 는  $u(n,1) = [u(n-1), u(n-2)]^H$ 와  $e(n,0)$ 을 이용하여  $w(n,0) = [w_0(n,0), w_1(n,0)]^H$ 로 갱신된다. 마지막으로 탭 입력 데이터 벡터  $u(n-0) = [u(n-0), u(n-1)]^H$ 와 탭 가중치 벡터  $w(n,0) = [w_0(n,0), w_1(n,0)]^H$ 는  $e(n,0)$ 을 생성한다.  $w(n,-1)$ 는 횡단선 필터의 다음 출력 추정치  $\hat{d}(n+1 | u(n+1))$ 을 생성하는데 이용될 수 있는 횡단선 필터 탭 가중치 벡터  $w(n+1)$ 에 복사된다.

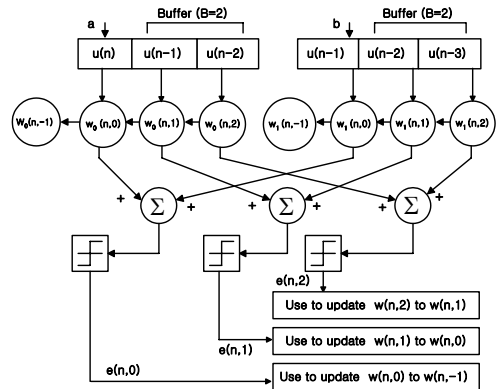


그림 1. 제안된 데이터-재사용 필터의 구조  
Fig. 1 The proposed data-recycling filter structure

## III. 탭 가중치 벡터를 이용한 신호간섭제어

데이터 재순환 알고리즘을 이용하여 탭 가중치 벡터를 갱신하기 위한 처리 과정은 다음 4단계로 구분하여 실현될 수 있다.

- 단계 1 : 횡단선 필터 구조의 입력신호벡터  $u(n)$  와 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 를 초기화 한다.
- 단계 2 : 재순환 데이터  $B$ 를 결정한다.
- 단계 3 : 에러  $e(n)$ 를 이용하여 탭 가중치 벡터  $w(n)$ 를 갱신하기 위하여 재순환 데이터 수만큼 반복하여 갱신한다.

**단계 4 :** 횡단선 필터 출력  $\hat{d}(n+1 | u(n+1))$  을 생성하는데 이용되는 필터 계수 벡터  $w(n)$  를  $w(n+1)$  에 복사한다.

여기서  $w(n+1)$  과  $w(n)$  사이의 관계는 다음 식 (1)과 같다.

$$w(n+1) = w(n) + 2\mu \sum_{i=0}^B e(n,i) u(n-i) \quad (1)$$

여러 추정치  $e(n,i) = d(n-i) - w^H(n,i)u(n-i)$  의 이용과 식 (1)의 탭 가중치 갱신의 기대값을 취하면 식 (2)을 얻는다.

$$\begin{aligned} E[w(n+1)] &= E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (E[d(n-i)u(n-i)] \\ &\quad - E[u(n-i)u(n-i)^H] E[w(n,i)]) \end{aligned} \quad (2)$$

식 (2)에서 탭 입력 데이터와 탭 가중치는 독립적이라고 가정할 수 있으며, 상관행렬  $R$  을  $R = E[uu^H]$  라 정의하면, 다음과 같은 식 (3)을 얻는다.

$$\begin{aligned} E[w(n+1)] &= E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (E[d(n-i)u(n-i)] \\ &\quad - R \cdot E[w(n,i)]) \end{aligned} \quad (3)$$

$R$  이 정측행렬일 경우를 가정하면,  $R$  과 최적 탭 가중치 벡터  $w^0$  의 적분이  $E[\hat{d}(n-1 | u(n-1))u(n-i)]$  과 동일하다. 따라서  $E[w(n+1)] = E[w(n)] + 2\mu \sum_{i=0}^B (Rw^0 - RE[w(n,i)])$  이다.

다른 측면에서 입력 상관 행렬  $R$  은 일반적 형태  $R = Q \Lambda Q^{-1}$  로 표현되며, 여기서  $\Lambda$  는 대각 고유치 행렬이고  $Q$  는  $R$  의 고유치 벡터 행렬이다.  $V' = Q^{-1}V$  를 이용하는 중심축으로  $V(n)$  를 회전하면, 결과는 식 (4)와 같다.

$$\begin{aligned} V'(n+1) &= Q^{-1}(d(n) - 2\mu R)QV'(n) \\ &\quad - 2\mu \sum_{i=1}^B Q^{-1}RQV'(n,i) \\ &= (d(n) - 2\mu \Lambda)V'(n) - 2\mu \sum_{i=1}^B \Lambda V'(n,i) \end{aligned} \quad (4)$$

$V'(n+1)$  그리고  $V'(n)$  와  $V'(n,i)$  의  $j$  번째 인수는 각각  $v'(n+1,0,j)$ ,  $v'(n,0,j)$  그리고  $v'(n,i,j)$  이다. 이렇게 대응하는 인수를 이용함으로써, 식 (4)을 식 (5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} v'(n+1,0,j) &= (1 - 2\mu \lambda_j)v'(n,0,j) - 2\mu \lambda_j v'[v'(n,i,j) \\ &\quad + v'(n,2,j) + \dots + v'(n,B,j)] \\ &= v'(n,0,j) - 2\mu \lambda_j [v'(n,0,j) + v'(n,1,j) \\ &\quad + v'(n,2,j) + \dots + v'(n,B,j)] \end{aligned} \quad (5)$$

$v'(n,B,j)$  의 항은 다음 식 (6)의 반복에 의해  $v'(n,0,j)$  가 된다.

$$v'(n,B-i,j) = (1 - 2\mu \lambda_j)v'(n,B-i+1,j) \dots \quad (16)$$

기하학적 비율  $1 - 2\mu \lambda$  인 식은 다음의 식 (7), (8)과 같다.

$$\begin{aligned} v'(n+1,0,j) &= v'(n,0,j) - 2\mu \lambda_j \left[ \frac{v'(n,0,j)(1 - (1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1})}{(1 - (1 - 2\mu \lambda_j))} \right] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v'(n+1,j) &= v'(n,j) \left[ \frac{1 - 2\mu \lambda_j (1 - (1 - 2\mu \lambda_j)^{B+1})}{(1 - (1 - 2\mu \lambda_j))} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

위 식을 재배열하면 식 (9)와 같다.

$$\begin{aligned}
 & v'(n+1, j) \\
 &= v'(n, j) - 2\mu\lambda_j \frac{\left[ \frac{v'(n, j)}{2\mu\lambda_j} - \frac{v'(n, j)(1-2\mu\lambda_j)^{B+1}}{2\mu\lambda_j} \right]}{v'(n, j)(1-2\mu\lambda_j)^{B+1}}
 \end{aligned} \tag{9}$$

식 (9)는 현재의 탭 계수와 최적화 계수사이의 차이가 이들의 기하학적 비율인  $(1 - 2\mu\lambda_j)^{B+1}$ 로 감소함을 나타낸다. LMS 알고리즘  $1 - 2\mu\lambda_j$ 에 대한 기하학적 비율과 비교해 보면, MSE 비율은 다음의 식 (10), (11)과 같다.

$$MSEratio = (1 - 2\mu\lambda_j)^{2(B+1)} \tag{10}$$

또한

$$\log(MSE ratio) = (B+1)\log(1 - 2\mu\lambda_j)^2 \tag{11}$$

위 식의 결과로 인해 본 연구에서 제안한 LMS 알고리즘에 의해 얻은 결과는 기존 방식인 MSE 알고리즘에 의해 얻은 결과에 (B+1)배의 개선된 수렴 속도를 갖게 됨을 제시한다.

그림 2는 탭 수에 따른 재순환 버퍼를 이용함으로써 LMS 알고리즘의 평균 자승 에러 비의 학습 곡선을 나타낸 컴퓨터 시뮬레이션 결과로서 식(11)의 수렴속도가 (B+1)배만큼 개선되어짐을 알 수 있다. 식(11)에서 식 (9)의 결과는 제안된 알고리즘의 신호간섭제어가 안정적이고 식 (12)와 같을 때 j번째 계수에 대해 수렴된다.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 2\mu\lambda_j)^{(B+1)k} = 0 \tag{12}$$

식 (12)를 충족시키기 위한  $\mu$ 를 선택하는 수렴조건은 식 (13)과 같다.

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\max}} \tag{13}$$

위 식에서  $\lambda_{\max}$ 가 횡단선 필터의 탭 입력 상관행렬  $R$ 의 최대 고유치 값으로서 식 (13)의 조

건은 LMS 알고리즘과 동일한 결과로서 수렴이 보장될 수 있기 때문에 LMS 알고리즘에 스텝 사이즈 변수를 이용하게 된다.

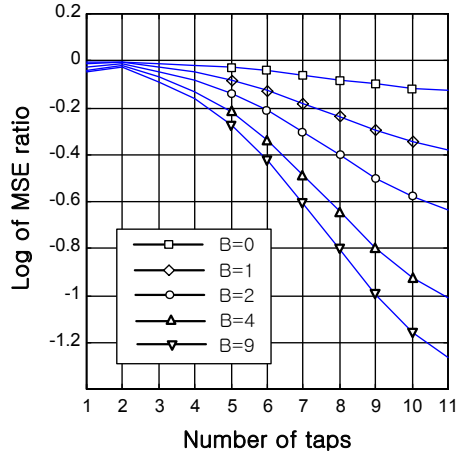


그림 2. 탭수에 따른 데이터 재순환 버퍼 B=0,2,4,7,9를 가진 LMS 알고리즘의 평균 자승 에러 비의 학습 곡선

Fig. 2 MSE ratio learning curve of LMS algorithm with recycling data buffer B=0,2,4,7,9 according to number of Taps

#### IV. 컴퓨터 시뮬레이션 및 결과

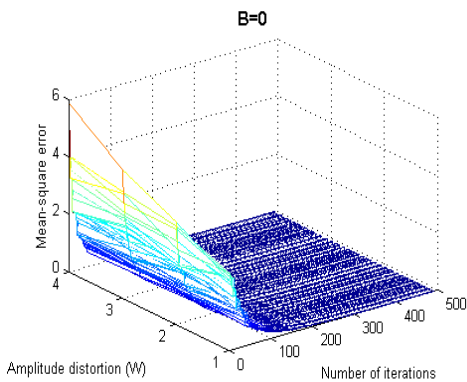
LMS 알고리즘을 이용한 컴퓨터 시뮬레이션은 적응 횡단선 필터에서 입력되는 채널의 시간 분산을 이용하였으며, 채널의 임펄스 응답을 이용하였다.

TDL 필터에서 탭 수는 11개로 설정하였으며, 스텝 크기 매개변수  $\mu$ 는 0.0075로 고정하고, 백색 가우시안 잡음 분산  $\sigma_v^2$ 은 0.001로 하였다.

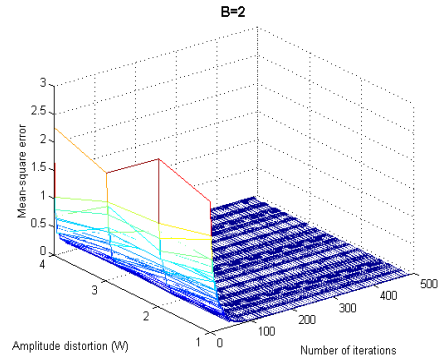
그림 3(a)는 제안된 데이터 재사용 필터 구조에서 버퍼가 없는 즉 B=0인 상태에서 통상적인 LMS 알고리즘을 이용하였으며, TDL 필터의 실제적인 추정치와 원하는 응답의 차이인 에러를 이용하여 조정된 탭 가중치 벡터를 사용함으로써 평균 자승 에러의 수렴상태를 삼차원으로 컴퓨터 시뮬레이션한 결과이다.

그림 3에서 나타난  $x$ 축은 샘플의 반복수를 나타낸 것으로서 500개의 샘플을 설정하고,  $y$ 축은 진폭의 왜곡( $w$ )의 정도로서 1부터 4까지의 변화값을 주었으며  $z$ 축은 평균 자승 에러(MSE)에 로그를 취한 값을 나타내었다. 채널 균등화기의 이상적인 출력과 채널 임펄스 응답의 실제 출력 차이인 에러를 LMS 알고리즘을 이용하여 적응 가중치를 구함으로써 평균 자승 에러의 수렴특성을 나타내었다.

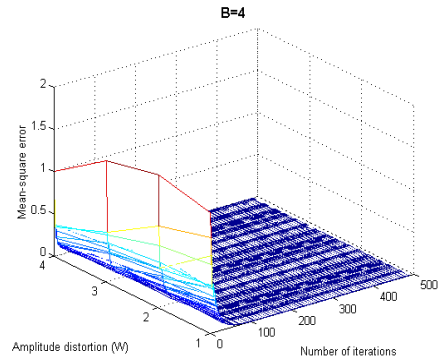
그림 3(a)에서 나타난 시뮬레이션 결과는 진폭 왜곡( $w$ )에 비례하여 고유치 확산 영역  $\chi(R)$ 의 값의 변화에 대해 반복 수에 따른 평균 자승 에러의 수렴상태를 나타낸 것으로서 진폭 왜곡이 커짐에 따라 평균 자승 에러의 값이 증가함을 알 수 있다. 이는 고유치 확산  $\chi(R)$ 에 따른 적응 등화기에서 LMS 알고리즘 학습 곡선의 결과와 부합된다. 그림 3(b)로부터 그림 3(d)까지의 시뮬레이션 결과는 그림 3(a)에 필요한 탭 수, 스텝 크기 매개변수, 백색 가우시안 잡음 분산 값, 고유치 확산 영역  $\chi(R)$ 을 동일하게 설정하여 재순환 데이터 버퍼  $B$ 를 2개, 4개, 9개를 이용하였을 경우 컴퓨터 시뮬레이션 결과를 나타내었다. 시뮬레이션 결과로부터 재순환 데이터 버퍼수가 증가함으로써 평균 자승 에러의 값은 현저하게 적응을 알 수 있다.



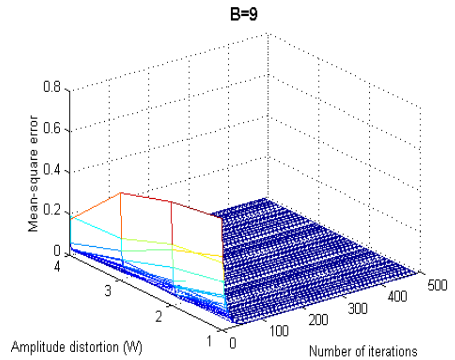
(a) B=0



(b) B=2



(c) B=4



(d) B=9

그림 3. 탭 수  $M=11$ , 스텝 크기 매개변수  $\mu=0.075$ , 진폭 왜곡  $w$ 에 따른 재사용 데이터 버퍼  $B=0, 2, 4, 9$ 를 가진 LMS 알고리즘의 평균 자승 에러 학습 곡선

Fig. 3 MSE learning curves of LMS Algorithm with number of taps  $M=11$ , step-size parameter  $\mu=0.01$ , varying amplitude distortion  $w$  and recycling data Buffer  $B=0, 2, 4, 7, 9$

또한 위 결과로부터 TDL 필터에 사용된 재순환 데이터 버퍼 구조에서 제안한 LMS 알고리즘을 적용함으로써 조정된 탭 가중치 벡터에 비례하여 평균 자승 수렴의 속도가 재순환 데이터 버퍼 수  $B$ 가 증가함으로써  $(B+1)$ 배 만큼 증가하여 간섭 신호가 제어됨을 알 수 있었다.

#### IV. 결론

탭 가중치를 적응 제어하기 위해 데이터 재순환 알고리즘을 이용함으로써 적응 탭 가중치 벡터의 갱신을 통해 빠른 수렴성을 나타내기 위한 새로운 방식을 제안하였다. 채널 균등화기는 TDL 필터에 사용된 재순환 데이터 버퍼 구조에 제안한 LMS 알고리즘을 적용함으로써 조정된 탭 가중치 벡터에 비례하여 평균 자승 수렴의 속도는 재순환 데이터 버퍼 수  $B$ 가 증가함으로써  $(B+1)$ 배 만큼 증가한다는 것을 알 수 있었다.

3차원 시뮬레이션 결과로부터 다양한 매개변수 및 표본 수에 따른 최소 평균 자승 학습 곡선이 이론적 분석에 적합하다는 것을 입증하였으며, 이산-시간 채널에 대한 MSE 학습 곡선과 관계를 갖는 결론의 이론적 분석은 시뮬레이션 결과와 부합함을 보였다. 이는 데이터 재순환 버퍼 알고리즘을 이용한 제안된 TDL 필터가 LMS 알고리즘과 동일한 수렴 조건을 가지고 실행될 때 연산의 복잡성의 실질적 부담감을 배제하고, TDL 필터의 수렴속도를 증가시킬 수 있다는 것은 신호간섭 제어의 우수성을 보인 것이다.

#### 참고 문헌

[1] Po-An Sung and Kwang-Cheng Chen, "A Linear Minimum Mean Square Error Multiuser Receiver in

Rayleigh-Fading Channels", IEEE J. Select. Areas Commun., Vol. 14, No. 8, pp.1583-1593, Oct. 1996.  
 [2] Jiangzhou Wang and Laurence 2. Milstein, "Adaptive LMS Filters for Cellular CDMA Overlay Situation", IEEE J. Select. Areas Commun., Vol. 14, No. 8, pp.1548-1559, Oct. 1996.  
 [3] Simon Haykin, "Adaptive Filter Theory: Third Edition", Prentice Hall International Editions, pp.365-439, 1996.  
 [4] B. Widrow, *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, 1985.  
 [5] S. U. H Qureshi, "Adaptive Equalization", Proc. IEEE, Vol. 73, No. 9, pp.1349-1387, Sep. 1985.  
 [6] Jiangnan Chen and Roland Priener, "An Inequality by Which to Adjust the LMS Algorithm Step-Size", IEEE Trans. Commun. Vol. 43, No. 2/3/4, pp.1477-1483, Feb./Mar./Apr. 1995

#### 저자 소개



**오승재(Seung-jae Oh)**

1988년 2월 : 조선대학교 전산기공학과(공학사)

1994년 2월 : 조선대학교 전산기공학과(공학석사)

2009년 현재 순천청암대학 컴퓨터정보과 교수

※ 관심분야 : Wireless Sensor Network, RFID, 마이크로프로세서, 안테나 공학