

---

# 채터링 감소를 위한 퍼지 슬라이딩 섹터 제어

한종길\* · 손영수\*

## Fuzzy-Sliding-Sector Control for Chattering Reduction

Jong-kil Han\* · Yong-su Son\*\*

### 요 약

채터링 현상은 VSS의 주요한 약점이며 이 문제를 극복하기 위하여 많은 연구들이 발표되었다. 슬라이딩 섹터 이론이 최근에 발표되었으며, 본 논문에서는 섹터 내부에 연속입력함수를 가진 슬라이딩 섹터이론을 이용하여 시변 경계층을 가진 퍼지제어를 제안하고, 슬라이딩 섹터에 리아프노프 함수를 이용하여 안정도를 분석한다. 역진자 시스템에 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 채터링 현상의 제거를 확인한다.

### ABSTRACT

Chattering phenomenon is still a large drawback of VSS. To overcome this problem, various approaches have been reported. A new notion of sliding sector has been proposed recently. In this paper, fuzzy control with time-varying boundary layer using the sliding sector theory with continued input function in the sector is proposed. This paper analyzes the stability, using Lyapunov function on the sliding sector. Computer simulation for inverted pendulum results in elimination of the chattering phenomenon.

### 키워드

Variable structure control, Sliding sector control, Sliding sector, Nonlinear control, Fuzzy control.

## 1. 서 론

슬라이딩 제어의 기본구조는 상태전환 면에 의해 변하는 이론으로 슬라이딩 면을 따라 채터링을 가지는 특징 때문에 슬라이딩모드제어라 말한다. 슬라이딩모드 제어이론은 시스템의 불확실성과 외란에 대해 강인한 특성을 가지고 있기 때문에 최근에 많은 제어분야에 적용되고 있다. 그러나 실제적용에 있어서는 스위칭 평면에서 제어입력의 불연속적인 스위칭으로 채터링 현상이 발생하게 된다. 이러한 현상은 고주파 특성을 포함

하고 있는 시스템 제어시 고주파 동력학을 유발할 수 있기에 바람직하지 못하며, 채터링 입력은 실제의 시스템의 응용에 있어 물리적 한계 등으로 인해 구현하기 어렵다. 이와 같은 채터링 현상은 슬라이딩모드제어이론의 큰 단점으로 채터링 현상을 줄이거나 제거하기 위한 많은 연구들이 선행되었다. 예를 들면 슬라이딩 평면에 경계층을 형성하고 경계층 내부에서 연속함수를 이용하는 방법, 보간법 또는 저역통과필터를 이용한 연속 제어입력을 설계하는 방법, 잡음 관측기를 이용

---

\* 한려대학교 멀티미디어정보통신학과  
1차수정일자 : 2008. 08. 17

접수일자 : 2009. 07. 15  
심사완료일자 : 2009. 09. 05

하는 방법 등이 제안되었다.

본 논문은 채터링 현상을 줄이기 위하여 상태에 따라서 경계층을 변화시키는 방법을 응용하여 슬라이딩섹터제어에 퍼지논리를 적용한 새로운 퍼지 슬라이딩섹터제어이며, 가변구조제어의 장점을 다 가지고 있고, 채터링에 강한 새로운 개념의 가변구조제어라고 할 수 있다. 본 논문에서는 비선형 시스템의 예로 많이 사용되는 역진자 시스템에 적용하여 슬라이딩모드제어의 문제점인 채터링 현상이 감소됨을 고찰한다.

## II. 선형시스템에 대한 슬라이딩섹터제어

일반적인 다음과 같은 선형 시불변 단일입력 시스템을 고려한다.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1)$$

여기서  $x(t) \in R^n$ ,  $u(t) \in R^1$ ,  $A, B$ 는 상수행렬이고,  $(A, B)$ 는 제어 가능하다. 그리고  $x(t)$ 는 측정 가능하다고 가정한다.

P-norm  $\| \cdot \|_P$  을 다음과 같이 정의한다.

$$\|x\|_P = (x^T P x)^{1/2}, \quad x \in R^n \quad (2)$$

만약 시스템(1)에 입력이 없을 때 안정하다면, 다음 식을 만족하는  $P$ 를 찾을 수 있다.

$$\dot{L}(t) = x^T (A^T P + P A) x \leq 0, \quad \forall x \in R^n \quad (3)$$

P-norm  $\|x\|_P$ 이 감소하는 영역인 슬라이딩 섹터(sliding sector)라고 하며 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} S_{cd} &= \{x | s^2(x) \leq w^2(x), \quad x \in R^n\} \\ &= \{x | |s(x)| \leq |w(x)|, \quad x \in R^n\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $C = B^T P$

$$s(x) = Cx(t) = B^T P x(t),$$

$$\begin{aligned} w(x) &= \sqrt{x^T(t) H x(t)} \\ H &= Q - R \geq 0 \\ A^T P + P A - P B B^T P &= -Q \end{aligned} \quad (5)$$

## III. 비선형 시스템에 대한 제어 법칙

일반적인 불확실한 비선형 동력학 방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A_L + A_R(t, x) + \Delta A(t, x))x(t) + f(t, x, u) \\ &\quad + (B + \Delta B(t, x, u))u \end{aligned} \quad (6)$$

여기에서  $A_L$ 은  $A$ 의 선형화한 항이고,  $A_R(t, x)$ 는  $A$ 의 선형화 후 나머지 항이며,  $\Delta A(t, x)$ 는 시스템의 불확실한 항이고,  $f(t, x, u)$ 는 시스템의 모든 외란을 고려한 항이며,  $\Delta B$ 는 입력의 불확실성을 고려한 항이다.

모든 선형화 후 나머지 항 및 불확실성과 잡음이 정합조건을 만족한다고 가정하면, 식(7)은 존재한다.

$$\begin{aligned} A_R(t, x) &= B r(t, x), \quad \Delta A(t, x) = B h(t, x, u) \\ \nabla B(t, x) u &= B w(t, x, u), \quad f(t, x, u) = B d(t, x, u) \end{aligned} \quad (7)$$

$\eta(t, x, u)$ 에 대하여 다음과 같은 함수가 존재한다고 가정한다.

$$\begin{aligned} \eta(t, x, u) &= r(t, x)x(t) + h(t, x, u)x(t) + w(t, x, u) \\ &\quad + d(t, x, u) \\ \rho(x) &\geq |\eta(t, x, u)| \end{aligned} \quad (8)$$

슬라이딩 평면은 다음과 같다.

$$S(x) = Cx(t) = B^T P x(t) \quad (9)$$

제어입력은 다음 슬라이딩 조건을 만족해야한다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(t)^2 \leq -k |s(x)|, \quad k > 0 \quad (10)$$

슬라이딩 섹터에 근거한 채터링을 줄이는 새로운 슬라이딩 섹터 제어법칙은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 & |s(x)/\Phi| \leq 1 \text{에서} \\
 & \quad u = -(s(x)/\Phi)\rho(x,t) \\
 & |s(x)/\Phi| > 1 \text{과 } x \notin S_{cd} \text{에서} \\
 & \quad u = -(CB)^{-1}(CA_Lx + k \operatorname{sgn}(s(x))) \\
 & \quad \quad - \operatorname{sgn}(s(x))\rho(x,t) \\
 & |s(x)/\Phi| > 1 \text{과 } x \in S_{cd} \text{에서} \\
 & \quad u = -(s(x)/w(x))\rho(x,t) \quad (11)
 \end{aligned}$$

$\Phi$ 는 고정된 경계층 폭이며,  $CB > 0$ 는 역행렬이 존재하며,  $k > 0$ 는 충분히 커다란 수이다.

#### IV. 시변 경계층을 적용한 제어기 설계

##### 4.1 시변 경계층 설정

채터링 감소를 위한 시변 경계층  $\Phi(t)$ 를 고려하고 경계층 내부에서 슬라이딩 평면을 한정되어 있다고 가정한다.

$$B(t) = \{x(t) \mid |s(x)| \leq \Phi(t)\} \quad (12)$$

상태에 따른 경계층의 변화에 의해 슬라이딩 조건은 다음과 같이 바뀌어야 하며 경계층 밖의 모든 상태 궤적은 경계층을 향해 수렴하는 것이 보장된다.

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s(x)^2 \leq (\dot{\phi}(t) - k) |s(x)|, \quad k > 0 \quad (13)$$

이것은 상태가 슬라이딩 평면에 접근할 경우에 경계층은 수축되고 슬라이딩 평면에서 멀어질 경우에는  $\dot{\phi}(t) < k$ 가 되도록 하여 경계층의 평창을 억제시키는 제어기를 설계할 수 있다.

식(13)를 만족하기 위해 경계층의 변화율을 고려한 식(8)은 다음과 같다.

$$\hat{\rho}(x,t) = \rho(x,t) - (CB)^{-1} \dot{\Phi}(t) \quad (14)$$

따라서 제어법칙(11)은 다음과 같이 잡아야 한다.

$$\begin{aligned}
 & |s(x)/\Phi| \leq 1 \text{에서} \\
 & \quad u = -(s(x)/\Phi)\hat{\rho}(x,t) \\
 & |s(x)/\Phi| > 1 \text{과 } x \notin S_{cd} \text{에서} \\
 & \quad u = -(CB)^{-1}(CA_Lx + k \operatorname{sgn}(s(x))) \\
 & \quad \quad - \operatorname{sgn}(s(x))\hat{\rho}(x,t) \\
 & |s(x)/\Phi| > 1 \text{과 } x \in S_{cd} \text{에서} \\
 & \quad u = -(s(x)/w(x))\hat{\rho}(x,t) \quad (15)
 \end{aligned}$$

안정성을 보장하기 위해 Lyapunov 함수  $V$ 를 정의한다.

$$V = \frac{1}{2} s(x)^2 \quad (16)$$

시스템의 궤적을 따라  $\dot{V}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= s(x)\dot{s}(x) \\
 &= s(x)(CA_Lx(t) + CBu(t) + CB\eta(t,x,u))
 \end{aligned}$$

만약  $|s(x)| > \phi(t)$ 이면,

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= -k|s(x)| - s(x)CB(\operatorname{sgn}(s(x))) \\
 & \quad (\rho(x,t) - (CB)^{-1}\dot{\Phi}(t)) + \eta(t,x,u) \\
 & \leq -k|s(x)| + s(x)\operatorname{sgn}(s(x))\dot{\Phi}(t) \\
 & \leq -k|s(x)| + |s(x)|\dot{\Phi}(t) \\
 & \leq (\dot{\Phi}(t) - k)|s(x)| \quad (17)
 \end{aligned}$$

가 된다.  $\dot{\Phi}(t) < k$ 가 되도록 설계함으로써 시스템이 안정하게 되는 것을 보여준다.

시변 경계층  $\Phi(t)$ 를 구하기 위해 경계층 내부에 있을 때  $\dot{s}(t)$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \dot{S}(x) &= C\dot{x}(t) = B^T P\dot{x}(t) \\
 &= CA_Lx(t) + CBu(t) + CB\eta(t,x,u)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -CB \frac{s(x)}{\Phi(x)} \hat{\rho}(x,t) + CA_L x(t) + CB\eta(t,x,u) \\
 &= -CB\gamma(t)s(x) + CA_L x(t) + CB\eta(t,x,u) \quad (18)
 \end{aligned}$$

양의 함수  $\gamma(t)$ 는  $\gamma(t) = \frac{\hat{\rho}(x,t)}{\Phi(t)}$  가 되며,

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}(x,t) &= \gamma(t)\phi(t) = \rho(x,t) - (CB)^{-1}\dot{\Phi}(t) \quad (19) \\
 &\text{여기서 } \gamma(t) > 0 \text{으로 설정한다.}
 \end{aligned}$$

$\dot{\Phi}(t) < k$ 을 만족하는 경계층의 최소값인  $\Phi_{\min}$ 을 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) &= -CB\gamma(t)\Phi(t) + CB\rho(x,t) < k \\
 \Phi_{\min} &= \sup_{x,t} \frac{\rho(x,t) - (CB)^{-1}k}{\gamma(t)} \quad (20)
 \end{aligned}$$

$\Phi_{\min}$ 은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\Phi}(t) &= -CB\gamma(t)\Phi(t) + CB\rho(x,t), \Phi(t) \geq \Phi_{\min} \\
 \dot{\Phi}(t) &= 0, \quad \Phi(t) < \Phi_{\min} \quad (21)
 \end{aligned}$$

경계층  $\Phi(t)$ 는 최소값( $\Phi_{\min}$ )까지 수축 후에는 더 이상의 경계층 수축은 억제된다.

#### 4.2 퍼지 제어기 설계

본 절에서는 IV-1에서 분석한 시변 경계층을 고려한 슬라이딩 섹터 제어기에 퍼지논리를 적용하여 새로운 퍼지 슬라이딩 섹터 제어기를 설계한다.

슬라이딩 평면  $s(t)$ 와 슬라이딩 평면의 변화분  $\dot{s}(t)$ 을 퍼지제어기의 입력변수로 사용하고 입력변수들의 대집합은 시변 경계층  $\Phi(t)$ 와 경계층의 변화율  $\dot{\Phi}(t)$ 로 설정하며, 출력변수  $u_F(t)$ 로서 그 대집합은 시변  $\hat{k}(x,t)$ 에 따라 결정되도록 퍼지제어기를 설계한다.

새로운 제어입력은 식(15)로 부터 다음과 같다.

$|s(x)/\Phi| \leq 1$ 에서

$$u = -(s(x)/\Phi)\hat{\rho}(x,t) + u_F$$

$|s(x)/\Phi| > 1$ 과  $x \in S_{cd}$ 에서

$$\begin{aligned}
 u &= -(CB)^{-1}(CA_L x + k \operatorname{sgn}(|s(x)|) \\
 &\quad - \operatorname{sgn}(s(x))\hat{\rho}(x,t) + u_F
 \end{aligned}$$

$|s(x)/\Phi| > 1$ 과  $x \in S_{cd}$ 에서

$$u = -(s(x)/w(x))\hat{\rho}(x,t) + u_F \quad (22)$$

퍼지 제어규칙은 다음과 같다

표 1. 퍼지 제어 규칙  
Table 1. Fuzzy control rule ( $u_F$ )

| $s$ \ $s$ | negative | zero | positive |
|-----------|----------|------|----------|
| negative  | PL       | PS   | NS       |
| zero      | PM       | ZR   | NM       |
| positive  | PS       | NS   | NL       |

퍼지추론은 Max\_Min방법, 비퍼지화방법은 무게중심법을 이용하였다.

### V. 컴퓨터 시뮬레이션

본 장에서는 제안된 제어법칙에 대한 타당성을 보이기 위해 비선형 시스템의 예로 많이 사용되는 역진자 시스템에 대한 제어결과를 살펴본다.

$$\begin{aligned}
 \ddot{\theta} &= (g \sin\theta - \cos\theta) \left( \frac{ml}{m_c + m} \theta^2 \sin\theta - \frac{1}{m_c + m} \right. \\
 &\quad \left. u(t) \right) / \left( \frac{4}{3}l - \frac{ml}{m_c + m} \cos^2\theta \right) \quad (23)
 \end{aligned}$$

그림 2는 일반적인 슬라이딩 제어의 입력과 상태이다. 제어입력에서 구현하기 힘든 채터링 현상을 볼 수 있다. 그림3 (a)은 시스템의 상태  $x_1$ (각도),  $x_2$ (각속도)의 출력이며  $x_1 = 0.2$ ,  $x_2 = 0$ 에서 원하는 궤적으로 잘 수렴함을 알 수 있다. 그림4 (b)는 시스템의 입력이며 채터링 현상이

거의 없음을 볼 수 있다.

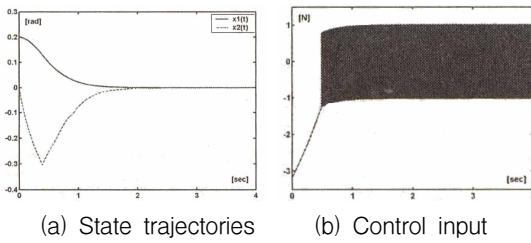


그림 2. 일반 슬라이딩 제어의 상태 및 입력  
Fig. 2 State and Input of general sliding control

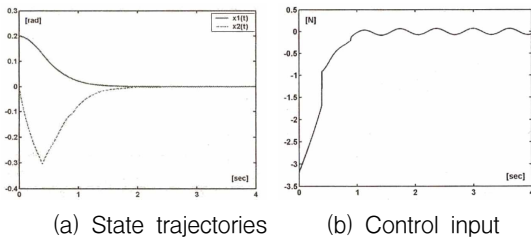


그림 3. 제안한 슬라이딩 제어의 상태 및 입력  
Fig. 3 State and Input of proposed sliding control

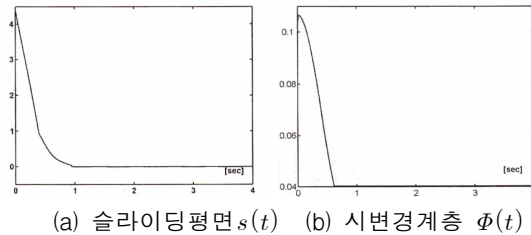


그림 4. 슬라이딩평면 및 시변경계층  
Fig. 4 Sliding plane and Time variance boundary layer

## V. 결론

슬라이딩 제어는 미지의 파라미터나 미지의 외란에 강인성을 가지며 제어기 설계가 간편하지만, 슬라이딩 평면에 상태를 부딪히도록 제어함으로 채터링 현상이 발생하는데, 이로 인하여

실제 시스템에 적용하기 용이하지 않다. 그러나 슬라이딩 섹터를 사용한 제어기는 슬라이딩 평면이 아닌 슬라이딩 영역을 두어서 채터링 현상을 현저하게 줄일 수 있다. 그러나 슬라이딩 섹터의 영역이 작아지면 채터링 현상이 발생한다.

본 논문에서는 슬라이딩 섹터 이론을 활용하여 슬라이딩 섹터영역과 상태에 따라 변화하는 경계층 내부에 연속입력함수인 퍼지제어를 사용함으로써 불연속입력인 채터링 현상이 감소하고 정상상태로의 빠른 응답특성을 보여주고 있다.

## 참고 문헌

- [1] T. K. Lee, J. K. Han, and W. C. Ham, "Fuzzy-sliding mode control for chattering reduction", *Journal of control, Auto and sys. Eng.*, Vol.7, pp.393-398, 2001.
- [2] Y. Pan, K. Furuta and S. Hatakeyama, "Invariant sliding sector for variable structure control", *Proc. of the 38th Conf. Decision and Control*, pp.5152-5157, 1999.
- [3] K. Furuta and Y. Pan, "Design of discrete-time vs controller based on sliding sector", *13th Tr. World Con. IFAC*, pp.487-492, 1996.
- [4] K. Furuta, S. Hatakeyama and Y. Pan, "VS controller design for continuous system from sampled data", *Proc. of Amer. Control Conf.*, pp.1032-1035, 1999.
- [5] K. Furuta and Y. Pan, "Variable structure control with sliding sector for hybrid systems", *VSS'06. Inter. Wor.*, pp.286-291, 2006

## 저자 소개



### 한종길(Jong-kil Han)

1992년 전북대학교 전자공학과 (공학사)

1994년 전북대학교 전자공학과 (공학석사)

2002년 전북대학교 전자공학과 (공학박사)

1997년~ 현재 한려대학교 멀티정보통신학과 교수

※ 관심분야 : 적응제어, 슬라이딩제어, 진화연산알고리즘, 슬라이딩 섹터제어, 퍼지제어 등



### 손영수(Young-su Son)

1988년 조선대학교 전산통계학과 (이학사)

1991년 조선대학교 전산통계학과 (이학석사)

1999년 조선대학교 전산통계학과 (이학박사)

1996년~현재 한려대학교 멀티정보통신학과 교수

※ 관심분야 : 프로그램언어론, 데이터베이스, 인공지능, 퍼지제어 등