

# 저자유도 평면 병렬형 기구의 강성 해석

## Stiffness Analysis of a Low-DOF Planar Parallel Manipulator

김한성<sup>1,✉</sup>  
Han Sung Kim<sup>1,✉</sup>

1 경남대학교 기계자동화공학부 (Department of Mechanical and Automation Engineering, Kyungnam Univ.)  
✉ Corresponding author: hkim@kyungnam.ac.kr, Tel: 055-249-2627

Manuscript received: 2008.11.17 / Revised: 2009.4.6 / Accepted: 2009.4.17

*This paper presents the analytical stiffness analysis method for a low-DOF planar parallel manipulator. An  $n$ -DOF ( $n < 3$ ) planar parallel manipulator to which 1- or 2-DOF serial mechanism is connected in series may be used as a positioning device in planar tasks requiring high payload and high speed. Differently from a 3-DOF planar parallel manipulator, an  $n$ -DOF planar parallel counterpart may be subject to constraint forces as well as actuation forces. Using the theory of reciprocal screws, the planar stiffness is modeled such that the moving platform is supported by three springs related to the reciprocal screws of actuations ( $n$ ) and constraints ( $3-n$ ). Then, the spring constants can be precisely determined by modeling the compliances of joints and links in serial chains. Finally, the stiffness of two kinds of 2-DOF planar parallel manipulators with simple and complex springs is analyzed. In order to show the effectiveness of the suggested method, the results of analytical stiffness analysis are compared to those of numerical stiffness analysis by using ADAMS.*

Key Words: Low-DOF Planar Parallel Manipulator (저자유도 평면 병렬형 기구), Theory of Reciprocal Screws (역나선 이론), Analytical Stiffness Analysis (해석적 강성해석), Reciprocal Screws of Actuators and Constraints (구동 및 구속 역나선), Joint and Link Compliances (조인트 및 링크 순응성), ADAMS (기구학/동역학 해석 SW)

### 1. 서론

병렬형 로봇은 이동 플랫폼이 다수의 직렬 체인(다리)으로 고정부에 연결되고 구동부가 고정부 근처 또는 고정부에 위치하는 구조를 갖는다. 따라서 병렬형 로봇은 작업하중이 각 다리로 분산되고 이동부의 관성이 작으므로 일반적으로 직렬형 로봇에 비하여 고하중, 고속 작업이 가능하다는 장점을 갖는다. 이러한 장점으로 인하여 병렬형 로봇에 대한 연구가 활발히 진행되고 있으며 주로 Gough-Stewart 플랫폼과 같은 6 자유도 공간기구에 연구가 집중되고 있다.<sup>1</sup>

그러나, 전자, 포장, 식품, 제약 산업 등에서 많

이 요구되는 위치배치, 조립 및 정가공 작업들은 주로 평면 작업의 형태를 갖는다. 즉, SCARA 로봇과 같이 평면 2~3 자유도에  $z$  축 방향으로 1 자유도를 추가한 3~4 자유도 로봇의 활용도가 높다고 할 수 있다. 따라서,  $z$  축 방향으로 요구되는 작동 범위가 상대적으로 작은 평면작업의 경우에는 저자유도 평면 병렬형 기구에 소형의 1~2 자유도 기구를 직렬로 연결한 혼합형 구조(hybrid structure)를 사용하는 것이 공간 병렬형 기구를 사용하는 것보다 경제적일 수 있다. 본 논문에서는 혼합형 기구에서 위치결정 기구로 사용될 수 있는 저자유도 평면 병렬형 기구<sup>2</sup>의 강성해석을 수행하고자 한다.

고속, 고강성, 고하중을 요구하는 로봇의 초기 설계 단계에서, 강성해석 및 강성설계는 매우 필수적인 요소이다. 공간 6 자유도 및 평면 3 자유도 병렬형 기구의 강성해석 방법은 이미 많은 연구결과가 발표되었다.<sup>3</sup> 한편, 저자유도 공간 병렬형 기구의 강성해석은 Zhang 과 Gosselin 에 의하여 제시되었다.<sup>4</sup> 반면, 저자유도 평면 병렬형 기구의 강성해석은 그 중요성에 비하여 많은 연구가 진행되고 있지 않다. 저자유도 병렬형 기구는 구동부와 구속부로 구성된다. 특히, 고강성을 요구하는 응용예에서는 구속부의 변형도 무시할 수 없으므로, 구동부뿐만 아니라 구속부의 강성도 고려하는 강성해석 방법이 필요하다.

본 연구에서는 저자유도 공간 병렬형 기구의 강성해석 이론<sup>5</sup> 을 기초로 한다. 평면방향의 변형만을 고려할 때, 저자유도 평면 병렬형 기구의 평면 강성행렬을 간략히 유도할 수 있는 방법을 제시한다. 특히, 구속 나선의 개념을 도입하여, 3x3 자코비안 행렬과 강성행렬을 보다 체계적으로 유도하였다. 그리고, 각 다리에 역나선(reciprocal screw)이 작용하였을 때, 역나선 방향으로만 변형이 되는 다리를 단순 스프링(simple spring)으로 이외의 방향으로 변형되는 다리를 복합 스프링(complex spring)으로 분류하였다. 두 가지 경우에 대하여 해석적 강성해석 결과를 ADAMS 를 이용한 수치적 강성해석 결과와 비교함으로써 본 논문에서 제시하는 평면 강성해석 방법의 유효성을 입증하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 장과 3 장에서 저자유도 평면 병렬형 기구의 3x3 자코비안 행렬과 강성행렬을 유도한다. 4 장에서는 각 다리의 스프링 상수를 정밀하게 구하기 위하여 조인트 및 링크의 순응성을 고려한 각 다리의 순응행렬을 유도한다. 5 장에서는 단순 스프링만으로 구성된 경우와 복합 스프링을 포함하는 경우에 대한 2 자유도 평면 병렬형 기구의 강성해석 예제를 제시한다.

## 2. 자코비안 해석

본 논문에서는  $n$ -DOF (degrees of freedom)를 갖고 과구속(over-constrained)이 아닌 저자유도 평면 병렬형 기구를 대상으로 한다. 여기서,  $n < \lambda$  이고 평면기구의 경우  $\lambda = 3$  이다.

Fig. 1 과 같이 이동 플랫폼(moving platform)은  $m$  ( $m \geq n$ ) 개의 다리에 의하여 지지되고, 각 다리

는 최대 한 개의 구동기를 갖는다고 가정한다. 구동기를 갖는 다리의 번호를 먼저  $i = 1, \dots, n$  으로 정의하고, 구동기를 갖지 않는 나머지 다리의 번호를  $i = n+1, \dots, m$  으로 설정하였다.  $i$  번째 다리에 포함된 모든 조인트의 자유도의 합을 연결도(connectivity,  $C_i$ )<sup>6</sup> 라고 정의하면, 각 다리는  $\lambda - C_i$  개의 구속조건으로 이동 플랫폼의 운동을 제한한다. 이동 플랫폼을  $n$  자유도 운동으로 구속하기 위해서는 모든 다리의 독립적인 구속조건의 합은  $\lambda - n$  가 되어야 함을 알 수 있다.<sup>7</sup>

나선이론(screw theory)에서 단위나선(unit screw)은 방사 좌표(ray coordinates) 또는 축 좌표(axis coordinates)로 다음과 같이 각각 나타낼 수 있다.<sup>8</sup>

$$\hat{s} = \begin{bmatrix} s \\ s_0 \end{bmatrix}, \hat{S} = \begin{bmatrix} s_0 \\ s \end{bmatrix}$$

여기서,  $s$  는 나선축의 단위방향벡터를 나타내고,  $s_0 = r \times s + hs$  이다.  $r$  과  $h$  는 나선축까지의 거리 벡터 및 나선의 피치(pitch)이다.

한편, 나선의 역곱(reciprocal product)은 다음과 같이 정의되고, 역곱이 0 이 될 때 두 나선은 서로 역의 관계에 있다고 한다.<sup>8</sup>

$$\hat{s}_i \circ \hat{s}_j \equiv \hat{s}_i^T \hat{S}_j = s_i^T s_{0j} + s_{0i}^T s_j$$

각 다리를 구성하는 1 자유도 조인트에 관련된 단위나선을 조인트 나선(joint screw)라 할 때, 이동 플랫폼의 트위스트(twist)는 각 다리를 구성하는 조인트 나선들의 선형조합으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.<sup>8</sup>

$$\hat{T} = \sum_{j=1}^{C_i} \dot{\theta}_{j,i} \hat{S}_{j,i} \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, m \quad (1)$$

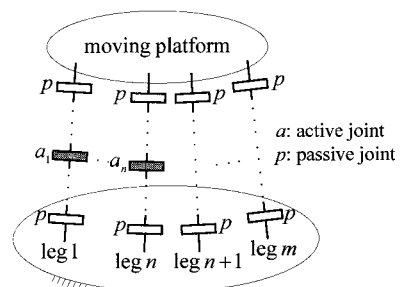


Fig. 1 Structure of an  $n$ -DOF planar parallel manipulator

여기서,  $\mathbf{v}$  와  $\omega$  를 각각 엔드이펙터의 직선속도 벡터 및 회전속도라 할 때,  $\hat{\mathbf{T}} = [\mathbf{v}^T, \omega^T]^T$  이고,  $\dot{\theta}_{j,i}$  와  $\hat{\mathbf{S}}_{j,i}$  는  $i$  번째 다리의  $j$  번째 조인트의 속도 및 단위나선을 각각 나타낸다.

각 다리에서  $C_i$  나선시스템(screw system)과 직교 여공간(orthogonal complement)인  $\lambda - C_i$  나선시스템을 구성할 수 있고, 이에 속하는 나선을 구속 나선(constraint screw)으로 정의한다.<sup>9</sup>  $\lambda - C_i$  개의 구속 나선을 식 (1)에 추가하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\mathbf{T}} = \sum_{j=1}^{C_i} \dot{\theta}_{j,i} \hat{\mathbf{S}}_{j,i} + \sum_{j=C_i+1}^{\lambda} \dot{\theta}_{j,i} \hat{\mathbf{S}}_{j,i} \quad (2)$$

식 (2)와 같이, 이동플랫폼의 트위스트는 각 다리를 구성하는 조인트 나선과 운동을 구속하는 구속 나선, 즉, 총  $\lambda = 3$  개의 나선들의 선형조합으로 나타낼 수 있다. 단, 구속부의 간극이나 변형이 존재하지 않는 경우 구속부의 조인트 속도는  $\dot{\theta}_{j,i} = 0$  ( $j = C_i + 1, \dots, \lambda$ ) 이 된다.

다음과 같은 방법으로 평면 병렬형 기구에 존재하는 총  $\lambda = 3$  개의 역나선(reciprocal screw)을 구하고자 한다.<sup>7</sup>  $\hat{\mathbf{s}}_{r,j,i}$  를  $i$  번째 다리의  $j$  번째 나선을 제외한 나머지  $\lambda - 1 = 2$  개의 나선들과 역의 관계를 이루는 역나선(reciprocal screw)으로 정의한다.

먼저,  $i = 1, \dots, n$  번째 다리에서,  $a_i$  번째 조인트가 구동된다고 가정한다. 이 구동 조인트를 제외한 나머지  $\lambda - 1 = 2$  나선들과 역의 관계를 갖는 하나의 역나선을 구할 수 있고, 총  $n$  개의 구동 역나선(actuation reciprocal screw)을 구할 수 있다.  $\hat{\mathbf{s}}_{r,a_i,i}$  을 식 (2)의 양변에 곱하면 다음과 같은 관계를 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{s}}_{r,a_i,i}^T \hat{\mathbf{T}} = \dot{\theta}_{a_i,i} (\hat{\mathbf{s}}_{r,a_i,i}^T \hat{\mathbf{S}}_{a_i,i}) \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (3)$$

다음으로, 각 다리에서  $C_i$  개의 조인트 나선과 역의 관계를 갖는  $\lambda - C_i$  개의 역나선을 구할 수 있고, 총  $\lambda - n$  개의 독립적인 구속 역나선(constraint reciprocal screw)을 구할 수 있다.  $\hat{\mathbf{s}}_{r,k,i}$  를 식 (2)의 양변에 곱하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\hat{\mathbf{s}}_{r,k,i}^T \hat{\mathbf{T}} = \dot{\theta}_{k,i} (\hat{\mathbf{s}}_{r,k,i}^T \hat{\mathbf{S}}_{k,i}) \quad \text{for } k = C_i + 1, \dots, \lambda \quad (4)$$

표현의 편의상,  $n$  개의 구동 역나선과 이에 관련된 나선 및 조인트 속도의 하첨자를  $\hat{\mathbf{s}}_{r,i}, \hat{\mathbf{S}}_i, \dot{\theta}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ )로 순서대로 정의하고  $\lambda - n$  개의 구속 역나선과 이에 해당되는 나선 및 조인트 속도의 하첨자를  $\hat{\mathbf{s}}_{r,i}, \hat{\mathbf{S}}_i, \dot{\theta}_i$  ( $i = n+1, \dots, \lambda$ )로 정의한다.

식 (3)과 식 (4)를 각각  $n$  및  $\lambda - n$  번 적용하고 이를 행렬로 나타내면 이는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{J}_a^T \hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{q}}_a, \quad \mathbf{J}_c^T \hat{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{q}}_c \quad (5)$$

여기서,  $\dot{\mathbf{q}}_a = [\dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  는 구동조인트 속도 벡터를 나타내고,  $\dot{\mathbf{q}}_c = [\dot{\theta}_{n+1}, \dots, \dot{\theta}_\lambda]^T \in \mathbb{R}^{(\lambda-n) \times 1}$  는 구속조인트 속도벡터를 나타낸다. 단, 구속부의 간극이나 변형이 존재하지 않는 경우  $\dot{\mathbf{q}}_c = \mathbf{0}_{(\lambda-n) \times 1}$  이어야 한다. 그리고,  $\mathbf{J}_a \in \mathbb{R}^{\lambda \times n}$  를 구동 자코비안 행렬(actuation Jacobian matrix)로 정의하고,  $\mathbf{J}_c \in \mathbb{R}^{\lambda \times (\lambda-n)}$  를 구속 자코비안 행렬(constraint Jacobian matrix)로 정의할 때, 이 부분 자코비안 행렬들은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_a &= [\hat{\mathbf{s}}_{r,1} / (\hat{\mathbf{s}}_{r,1}^T \hat{\mathbf{S}}_1), \dots, \hat{\mathbf{s}}_{r,n} / (\hat{\mathbf{s}}_{r,n}^T \hat{\mathbf{S}}_n)], \\ \mathbf{J}_c &= [\hat{\mathbf{s}}_{r,n+1} / (\hat{\mathbf{s}}_{r,n+1}^T \hat{\mathbf{S}}_{n+1}), \dots, \hat{\mathbf{s}}_{r,\lambda} / (\hat{\mathbf{s}}_{r,\lambda}^T \hat{\mathbf{S}}_\lambda)] \end{aligned} \quad (6)$$

식 (5)의 두 식을 함께 표현하면 다음과 같은 역방향 속도 관계를 얻을 수 있다.

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^T \hat{\mathbf{T}} \quad (7)$$

여기서,  $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{\mathbf{q}}_a^T, \dot{\mathbf{q}}_c^T]^T \in \mathbb{R}^{\lambda \times 1}$  는 전체 조인트 속도 벡터를 나타내고 전체 자코비안 행렬(Jacobian matrix)은 다음과 같다.

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_a \quad \mathbf{J}_c] \in \mathbb{R}^{\lambda \times \lambda} \quad (8)$$

식 (8)과 같이 저자유도 평면 병렬형 기구의 3x3 자코비안 행렬은 구동 및 구속 자코비안 행렬로 구성된다. 입출력만을 고려하는  $n \times n$  자코비안 행렬은 모든 특이성을 예측할 수 없다.

한편, 식 (7)에 가상일의 원리(principle of virtual work)를 적용하면, 다음과 같은 정역학 관계를 유도할 수 있다.

$$\hat{w} = J \tau \tag{9}$$

여기서,  $f$  와  $m$  을 엔드이펙터에 작용하는 힘 벡터와 모멘트라 할 때,  $\hat{w} = [f^T, m^T]^T$  는 방사 좌표로 표현된 렌치(wrench)를 나타내고,  $\tau_a = [\tau_1, \dots, \tau_n]^T$  는 구동력 벡터를 나타내고,  $\tau_c = [\tau_{n+1}, \dots, \tau_\lambda]^T$  는 구속에 의한 반력 벡터를 나타낼 때,  $\tau = [\tau_a^T, \tau_c^T]^T$  는 전체 조인트의 힘 벡터가 된다.

### 3. 강성해석

본 연구에서는 이동 플랫폼과 고정부는 강체로 가정하고 각 다리를 구성하는 조인트와 링크의 순응성(compliance)만을 고려하였다. 즉, 순응성의 주요원인을 각 다리에 작용하는 힘 또는 모멘트에 대한 베어링, 링크, 동력전달장치 및 구동기에서 발생할 수 있는 미소변위로 가정하였다.<sup>6</sup>

순응성을 갖는 각 다리에 순 힘(pure force)이 작용하면, 순 힘의 직선 축으로 미소 직선변위가 발생한다. 반면, 순 짝힘(pure couple)이 작용하면, 순 짝힘의 축방향에 대한 미소 회전변위가 발생하게 된다. 2 장에서 구한 역나선이 영 피치(zero-pitch)를 갖는 경우, 이는 물리적으로 순 힘에 해당되므로, 순 힘이 작용하는 직선상에 선형 스프링이 위치한다고 각 다리의 강성을 모델링 할 수 있다. 한편, 역나선이 무한 피치(infinite-pitch)를 갖는 경우는 이 순 짝힘의 축 방향으로 회전 스프링이 위치한다고 각 다리의 강성을 모델링 할 수 있다.

따라서, 이동 플랫폼에 작용하는 역나선은 총  $\lambda = 3$  개이므로 저자유도 평면 병렬형 기구의 이동 플랫폼은 총  $\lambda = 3$  개의 독립적인 스프링들로 지지된다고 모델링 할 수 있다. 이 중  $n$  개는 구동기에 관련된 스프링이고,  $\lambda - n$  개는 구속조건에 관련된 스프링이다. 구동부와 구속부에 관련된 스프링 상수를 각각  $k_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) 및  $k_i$  ( $i=n+1, \dots, \lambda$ ) 로 정의하면, 조인트 공간에서 강성사상(stiffness mapping)은 다음과 같다.

$$\tau = [k] \delta q \tag{10}$$

여기서,  $[k]$  는 각각  $k_i$  를 대각원소로 갖는 대각행렬(diagonal matrix)이고,  $\delta q$  는 스프링의 미소변위 벡터이다. 속도 및 정역학 관계(식 (7)과 식 (9))를 이용하여 다음과 같은 직교 강성사상을 유도할 수

있다.

$$\hat{w} = K \delta D \tag{11}$$

여기서,  $\delta x$  와  $\delta \theta$  를 각각 엔드이펙터의 미소 직선변위벡터와 미소 회전변위라 할 때,  $\delta D = [\delta x^T, \delta \theta^T]^T$  는 축 좌표계로 표현된 미소 트위스트를 나타낸다. 따라서, 직교 강성행렬(stiffness matrix)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K = J[k]J^T \in R^{\lambda \times \lambda} \tag{12}$$

여기서, 식 (8)을 이용하면 직교 강성행렬을 구동부의 직교 강성행렬( $K_a$ )과 구속부의 직교 강성행렬( $K_c$ )의 합으로 나타낼 수 있다.

$$K = K_a + K_c = J_a[k_a]J_a^T + J_c[k_c]J_c^T \tag{13}$$

여기서,  $[k_a]$  와  $[k_c]$  는 각각 구동부와 구속부에 관련된 스프링 상수를 대각원소로 갖는 대각행렬을 나타낸다. 식 (12)의 직교 강성행렬은 3 자유도 평면 병렬형 기구의 직교 강성행렬과 유사한 구조를 갖는다.<sup>8</sup> 즉, 3 자유도 평면 병렬형 기구의 경우, 구속조건이 존재하지 않으므로 직교 강성행렬은 구동부의 직교 강성행렬만으로 표현된다. 반면, 저자유도 평면 병렬형 기구의 경우 직교 강성행렬은 구동부와 구속부의 직교 강성행렬의 합으로 표현되어야 한다.

### 4. 직렬체인의 순응해석

역나선의 기하적 정보로부터 각 스프링의 종류 및 위치를 구하고 이를 이용하여 직교 강성행렬을 3 장에서 유도하였다. 본 장에서는 각 직렬체인의 조인트 및 링크의 순응성을 고려하여 구동 및 구속 역나선에 관련된 스프링 상수를 정밀하게 결정할 수 있는 방법을 유도하고자 한다.

일반적으로 다자유도 조인트는 1 자유도 조인트의 조합으로 나타낼 수 있으므로 각 조인트의 순응성을 1 자유도 조인트의 순응 모델을 이용하여 유도하고자 한다. Fig. 2 와 같이, 1 자유도 회전 및 직선 조인트의 순응행렬(compliance matrix)은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$C_j^R = \text{diag}[c_{i,r}, c_{i,r}, c_{\theta,a}],$$

$$C_j^P = \text{diag}[c_{i,a}, c_{i,r}, c_{\theta,r}] \quad (14)$$

여기서, 순응값은 Fig. 2 에 나타난 강성값의 역수이고, 하첨자  $l$  과  $\theta$  는 각각 선형 및 회전 순응값을 나타내며,  $a$  와  $r$  은 각각 축방향 및 반경방향을 나타낸다. 회전 조인트의 축방향은 지역 좌표계의  $z_i$  축과 일치하고 직선 조인트의 축방향은 지역 좌표계의  $x_i$  축과 일치하도록 설정하였다. 수동 회전 조인트의 경우,  $c_{\theta,a} = \infty$  가 되고, 수동 직선 조인트의 경우,  $c_{i,a} = \infty$  가 된다.

직렬체인의 링크는 이상적인 Euler-Bernoulli 빔으로 가정하였다. Fig. 3 과 같이, 각 링크에 작용하는 힘과 모멘트로 인한 링크 끝단의 변형은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\delta x = \frac{L}{AE} F_x, \delta y = \frac{L^3}{3EI} F_y + \frac{L^2}{2EI} M,$$

$$\delta \theta = \frac{L^2}{2EI} F_y + \frac{L}{EI} M \quad (15)$$

여기서,  $A$  와  $L$  은 각각 링크의 단면적과 길이를 나타내고,  $E$  와  $I$  는 각각 탄성계수 및 관성모멘트를 나타낸다. 각 링크의 순응행렬은 다음과 같이 구할 수 있다.<sup>10</sup>

$$C_L = \begin{bmatrix} \frac{L}{AE} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^3}{3EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ 0 & \frac{L^2}{2EI} & \frac{L}{EI} \end{bmatrix} \quad (16)$$

해당 지역좌표계( $i$ )에서 표현된  $i$  번째 다리의 전체 순응행렬은 각 조인트 및 링크의 순응행렬의 합으로 다음과 같이 구할 수 있다.

$${}^i C_i = \sum_{j=1} ({}^i J_{j,i} C_{j,j} {}^i J_{j,i}^T) \quad (17)$$

여기서,  $C_{j,j}$  는  $j$  번째 점에 위치한 조인트 또는

링크의 순응행렬이고,  ${}^i J_{j,i}$  의 각 열은  $j$  번째 점에 위치한 각 가상 조인트의 단위 나선으로 구성된다. Fig. 2 와 Fig. 3 과 같이, 각 조인트 또는 링크는  $x_i, y_i$  축 방향으로 가상 직선조인트를 갖고,  $z_i$  축 방향으로 가상 회전조인트를 갖는다고 모델링될 수 있다. 만약, 실제 조인트 축 방향만의 순응성을 고려한다면 식 (17)은 기존 직렬체인의 순응행렬과 동일하게 된다.

병렬형 기구의 각 다리는 구동 조인트뿐만 아니라 수동 조인트를 포함하므로 각 다리의 직교 순응행렬은 무한대 값을 갖는 원소들을 포함하게 된다. 따라서, 순응행렬의 역행렬, 즉, 강성행렬을 구하는 것은 불가능하다. 임의의 렌치를 작용하였을 때, 무한 변형이 발생하나, 해당되는 역나선을 작용하였을 경우에는 유한 변형이 발생하게 된다. 역나선  $\hat{w} = [f^T, m^T]^T$  에 대한 직렬체인의 미소변형이  $\delta \hat{D} = [\delta x^T, \delta \theta]^T$  일 때, 해당되는 선형 및 회전 스프링의 순응값은 다음과 같이 구할 수 있다. 식 (18)은 작용하는 힘 또는 모멘트 방향으로의 변형만을 고려하여 순응값을 결정함을 의미한다.

$$c_i = \frac{\delta x^T f}{f^T f}, c_\theta = \frac{\delta \theta^T m}{m^T m} \quad (18)$$

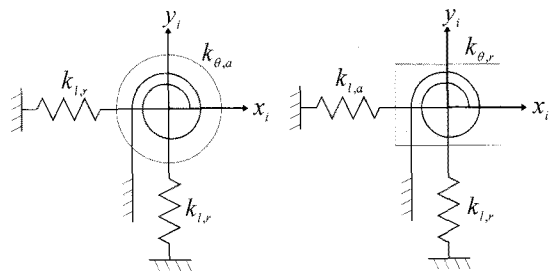


Fig. 2 Stiffness models of rotational and prismatic joints

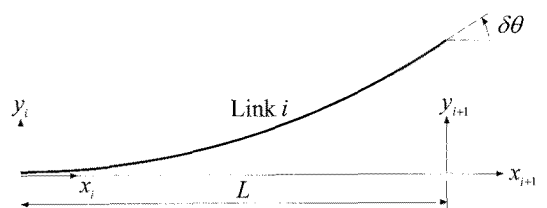


Fig. 3 Compliance model of a link

5. 강성해석 예제

본 예제에서는 3 자유도 3-RPR 평면 병렬형 기구<sup>8</sup>로부터 유도된 2 가지 유형의 2 자유도 평면 병렬형 기구의 강성을 해석하고자 한다. 즉, 다리 3 의 직선조인트를 제거한 2-RPR+1-RR(기구 1)과 위쪽 회전조인트를 제거한 2-RPR+1-RP(기구 2)를 해석하고자 한다. 여기서, R 과 P 는 각각 회전 및 직선 조인트를 나타내고 밑줄 친 직선 조인트가 구동된다.

Fig. 4 와 같이, 고정좌표계  $A(x, y)$  를  $\overline{A_1A_2}$  중앙에 배치하였고 이동좌표계  $B(u, v)$  를  $B_1B_2$  중앙에 배치하였다.  $\theta_i$  는 고정좌표계의 x 축에서 각 다리까지의 각도를 나타낸다.

5.1 기구 1(2-RPR+1-RR): 단순 스프링

다리 1, 2 에 의하여 발생하는 트위스트를 고정 좌표계에서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \dot{\theta}_{a,i} \hat{S}_{a,i} + \dot{d}_i \hat{S}_i + \dot{\theta}_{b,i} \hat{S}_{b,i} \\ &= \dot{\theta}_{a,i} \begin{bmatrix} y_{a,i} \\ -x_{a,i} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{d}_i \begin{bmatrix} c_i \\ s_i \\ 0 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_{b,i} \begin{bmatrix} y_{b,i} \\ -x_{b,i} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1,2 \end{aligned} \quad (19)$$

여기서,  $c_i = \cos \theta_i$ ,  $s_i = \sin \theta_i$  이고  $A_i = [x_{a,i}, y_{a,i}]^T$ ,  $B_i = [x_{b,i}, y_{b,i}]^T$  이다. 연결도가 3 이므로 구동 역나선만 존재하고 이는 직선  $\overline{A_1B_1}$  과  $\overline{A_2B_2}$  로 결정된다.

$$\hat{S}_{r,1} = \begin{bmatrix} c_1 \\ s_1 \\ -as_1 \end{bmatrix}, \hat{S}_{r,2} = \begin{bmatrix} c_2 \\ s_2 \\ as_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

다리 3 에 의하여 발생하는 트위스트를 고정 좌표계에서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{T} &= \dot{\theta}_{a,3} \hat{S}_{a,3} + \dot{\theta}_{b,3} \hat{S}_{b,3} \\ &= \dot{\theta}_{a,3} \begin{bmatrix} y_{a,3} \\ -x_{a,3} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_{b,3} \begin{bmatrix} y_{b,3} \\ -x_{b,3} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

다리 3 은 연결도가 2 이고 수동 조인트만 존재

하므로 1 개의 구속 역나선만 존재하고 이는 직선  $\overline{A_3B_3}$  가 된다.

$$\hat{S}_{r,3} = [c_3, s_3, -as_3]^T \quad (22)$$

RR 체인의 경우,  $\overline{A_3B_3}$  방향으로 병진운동은 구속되므로 이 방향을 구속 나선( $[c_3, s_3, 0]^T$ )으로 결정한다. 식 (6)을 이용하여 고정 좌표계에서 표현된 기구 1 의 자코비안 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ -as_1 & as_2 & -as_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

3 개의 역나선 모두 직선  $\overline{A_iB_i}$  에 위치한 영 피치 나선이므로 기구 1 의 강성을 Fig. 6(a)와 같이 모델링 할 수 있다.

다음으로 스프링 상수를 정밀하게 결정하기 위하여 각 다리의 순운동행렬을 유도하고자 한다. Fig. 5 와 같이 지역좌표계를 설정하였을 때,  $P_1, P_2, P_3$  에 위치한 가상 조인트의 자코비안 행렬은 지역 좌표계에 대하여 각각 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} {}^iJ_{1,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, {}^iJ_{2,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ {}^iJ_{3,i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -l_i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{for } i=1,2,3 \end{aligned} \quad (24)$$

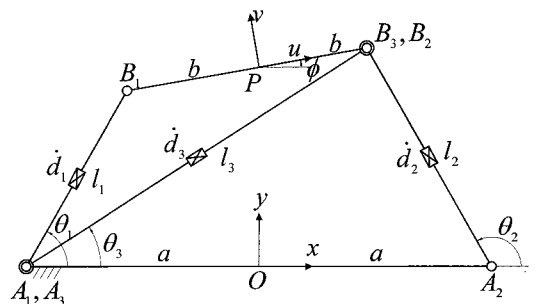


Fig. 4 Geometry of a 3-RPR parallel manipulator

다리 1, 2 와 다리 3 에서 조인트 및 링크의 순운동렬은 각각 다음과 같이 배치되고 식 (17)을 이용하여 각 다리의 전체 순운동렬을 구할 수 있다.

(다리 1,2)  $P_1: C_J^{R,a}, P_2: C_J^P, C_{L1}, P_3: C_J^{R,b}, C_{L2}$

(다리 3)  $P_1: C_J^{R,a}, P_3: C_J^{R,b}, C_L$

여기서,  $C_J^{R,a}$  와  $C_J^{R,b}$  는  $A_i$  및  $B_i$  에 위치한 회전 조인트의 순운동렬을,  $C_J^P$  는 직선 조인트의 순운동렬을 나타내고,  $C_{L1}, C_{L2}, C_L$  은 하단과 상단 링크 및 다리 3 링크의 순운동렬을 나타낸다. 각 다리의 지역 좌표계에서 표현된 역나선  $[1,0,0]^T$  을 전체 순운동렬에 적용하면, 모든 다리는 동일한 방향으로만 미소변위가 발생하는 단순 스프링이 된다. 이때, 각 스프링 상수는 다음과 같이 결정할 수 있다.

$$k_i = (c_{i,a}^p + 2c_{i,r}^r + l_i / (AE))^{-1} \text{ for } i=1,2$$

$$k_3 = (2c_{i,r}^r + l_3 / (AE))^{-1} \quad (25)$$

여기서, 하단 및 상단의 회전조인트의 순운동렬과 모든 링크의 단면적을 동일하게 설정하였다.

**5.2 기구 2(2-RPR+1-RP): 복합 스프링**

다리 1, 2 는 기구 1 의 경우와 동일하고, 다리 3 에 의하여 발생하는 트위스트는 고정좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{T} = \dot{\theta}_{a,3} \hat{S}_{a,3} + \dot{d}_3 \hat{S}_3$$

$$= \dot{\theta}_{a,3} \begin{bmatrix} y_{a,3} \\ -x_{a,3} \\ 1 \end{bmatrix} + \dot{d}_3 \begin{bmatrix} c_3 \\ s_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

다리 3 의 구속 역나선은 점  $A_3$  를 지나가고 직선  $A_3B_3$  에 수직인 직선이 된다.

$$\hat{s}_{r,3} = \begin{bmatrix} -s_3 \\ c_3 \\ -ac_3 \end{bmatrix} \quad (27)$$

RP 체인의 경우  $\overline{A_3B_3}$  에 수직 방향으로 병진 운동은 구속되므로 이 방향을 구속 나선  $([-s_3, c_3, 0]^T)$  으로 결정한다. 고정 좌표계에서 표현된 기구 2 의 자코비안 행렬을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$J = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & -s_3 \\ s_1 & s_2 & c_3 \\ -as_1 & as_2 & -ac_3 \end{bmatrix} \quad (28)$$

역나선의 기하학적 정보를 이용하여 기구 2 의 강성을 Fig. 6(b)와 같이 모델링 할 수 있다. 다음으로, 다리 3 의 조인트 및 링크의 순운동렬의 배치는 다음과 같다.

(다리 3)  $P_1: C_J^{R,a}, P_2: C_J^P, C_{L1}, P_3: C_{L2}$

다리 3 의 지역 좌표계에서 표현된 역나선  $[0,1,0]^T$  을 전체 순운동렬에 적용할 때, 발생하는 미소변위는 다음과 같다.

$${}^3\hat{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{i,r}^r + c_{i,r}^p + l_{1,3}^2 c_{\theta,r}^p + l_3^3 / (3EI) \\ -l_{1,3} c_{\theta,r}^p - l_3^2 / (2EI) \end{bmatrix} \quad (29)$$

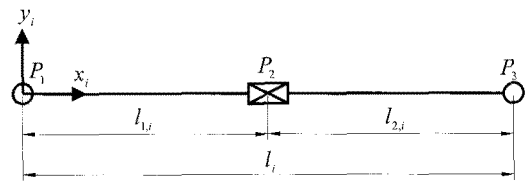


Fig. 5 RPR serial chain

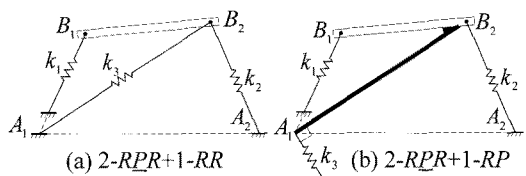


Fig. 6 Stiffness models

기구 1 의 다리 3 과 같은 단순 스프링과 달리 기구 2 의 다리 3 은 역나선 방향 이외에  $z_i$  축에 대한 미소회전이 발생하는 복합 스프링이 된다. 식 (18)과 같이 역나선 방향의 변형만을 고려하여 스프링 상수를 구하면 다음과 같다.

$$k_3 = (c_{i,r}^R + c_{i,r}^P + l_{i,3}^2 c_{\theta,r}^P + l_3^3 / (3EI))^{-1} \quad (30)$$

식 (23)과 (28)은 고정 좌표계에서 표현된 자코비안 행렬이므로 이를 이용하여 구한 강성행렬은 고정 좌표계에서 표현된다.

$${}^A K = {}^A J [k] {}^A J^T \quad (31)$$

나선변환행렬(screw transformation matrix)을 이용하여, 식 (31)을 좌표계의 원점은 점  $P$  에 위치하고 축은 고정 좌표계의 축과 평행한 좌표계  $\{C\}$  에 대하여 다음과 같이 표현할 수 있다(Fig. 4 참조).<sup>8</sup>

$${}^C K = {}^A [E]_C^T {}^A K {}^A [E]_C \quad (32)$$

여기서,  ${}^A [E]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p_y \\ 0 & 1 & -p_x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  이다.

**5.3 ADAMS 를 이용한 수치적 강성해석**

제안하는 강성해석 방법의 유효성 및 정확성을 검증하기 위하여 ADAMS 를 이용한 정강성해석 결과와 제안하는 해석적 방법의 결과를 비교하고자 한다. 수치적 해석을 위하여 기구 1, 2 에 대하여 이동 좌표계의 원점( $P$ )의 기준위치, 각 조인트의 공간 강성행렬 및 사각 링크의 형상을 Table 1 과 같이 설정하였다. 여기서, 모든 길이의 단위는 [m] 이고 선형과 회전 강성의 단위는 각각 [kN/m] 및 [kNm] 이다. 또한, 직선 조인트의 위치를  $l_{i,r} = 0.5$  로 설정하였다.

기구 1 의 구속부는 인장/압축력만 받으므로 실제 매우 큰 값을 갖는다(식 (25) 참조). 한편, 기구 2 의 경우, 구속부의 변형이 점  $P$  의 변형에 미치는 영향을 살펴보기 위하여 구속부의 강성을 작게 설정하였다(식 (29) 참조). 기구 1, 2 모두 비슷한

변형이 발생하도록 선형 구동기의 강성을 Table 2 와 같이 설정하였다. Table 2 에 나타나지 않은 강성값은 Table 1 의 값을 사용하였다.

Fig. 7 은 ADAMS 를 이용한 강성 모델링 결과를 나타낸다. 여기서, 조인트는 ‘Field Elements’로 링크는 ‘Beam’으로 모델링 하였다. 특히, 평면방향만의 변형을 해석하기 위하여 평면방향 이외의 강성값을 Table 1 과 같이 1000 배 크게 설정하였다.  $P$  점에서  $x, y$  축 방향으로 각각 100[N] 힘을 가한 후, ‘Point-to-Point’ 기능을 이용하여 해당 방향으로의 변형을 측정하였다.

Figs. 8~11 에서,  $\Delta p_x$  와  $\Delta p_y$  는 기준위치로부터 점  $P$  의  $x$  및  $y$  축 방향으로의 위치를 나타내고,  $dx$  와  $dy$  는 각각  $x$  및  $y$  축 방향으로 100[N] 힘을 가했을 때 해당 방향으로의 변형을 나타낸다.  $ex$  와  $ey$  는  $x$  및  $y$  축 방향으로 제안하는 해석적 방법과 ADAMS 로 구한 변형의 퍼센트 오차를 나타낸다.

Table 1 Simulation conditions

Items	Values
Reference configuration	$p = [0, \sqrt{3}/2]^T$ , $a = 1$ , $b = 0.5$ , $\theta_1 = \pi/3$ , $\theta_2 = 2\pi/3$ , $\theta_3 = \pi/6$ , $l_1 = l_2 = 1$ , $l_3 = \sqrt{3}$
Stiffness values	$K_i^{R,passive} = \text{diag}[k_i, k_i, k_{i,\infty}, k_{\theta,\infty}, k_{\theta,\infty}, 0]$ , $K_i^{P,passive} = \text{diag}[0, k_i, k_{i,\infty}, k_{\theta,\infty}, k_{\theta,\infty}, k_\theta]$ , $K_i^{P,active} = \text{diag}[k_{i,a}, k_i, k_{i,\infty}, k_{\theta,\infty}, k_{\theta,\infty}, k_\theta]$ where $k_i = 10^3$ , $k_\theta = 10^3$ , $k_{i,\infty} = 10^3 \times k_i$ , $k_{\theta,\infty} = 10^3 \times k_\theta$
Beam geometry	$A = w^2$ , $I = w^4 / 12$ ( $w = 0.05$ ) $E = 200$ [GPa], $G = 80$ [GPa]

Table 2 Simulation cases ( $k_{i,r}^R = k_{i,r}^P = 10^3$  for two cases)

Classification	Values
2-RPR+1-RR ( $k_{i,a}^P = 10$ )	$k_1 = k_2 = 9.8037$ , $k_3 = 499.1355$
2-RPR+1-RP ( $k_{i,a}^P = 100$ , $k_{\theta,r}^P = 2$ )	$k_1 = k_2 = 83.3194$ , $k_3 = 6.9624$



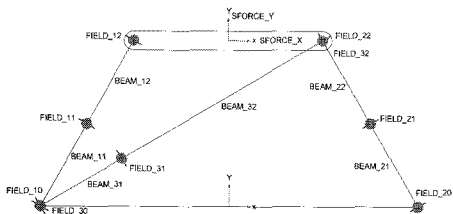


Fig. 7 Stiffness modeling by using ADAMS

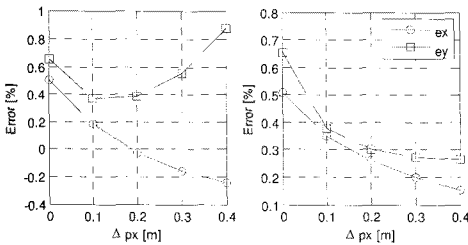


Fig. 8 Deflection errors of 2-RPR+1-RR

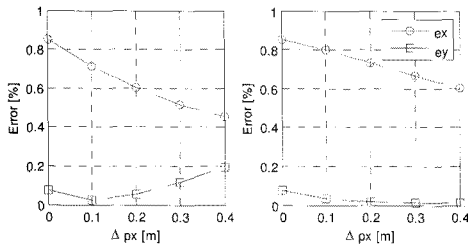


Fig. 9 Deflection errors of 2-RPR+1-RP

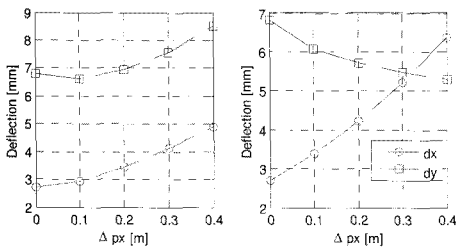


Fig. 10 Deflections of 2-RPR+1-RR

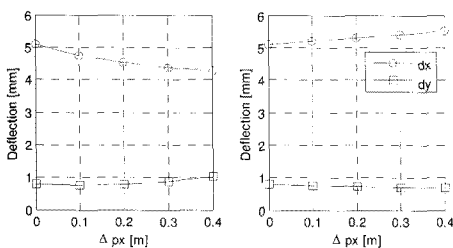


Fig. 11 Deflections of 2-RPR+1-RP

100N의 힘을 가했을 때, P점의 변형이 수 mm 이므로, 사용된 부품의 강성값이 실제 부품의 강성값보다 매우 작게 설정되어 있음을 알 수 있다. 즉, worst-case 수치 예를 통하여, 제안하는 해석적 방법의 최대 오차를 간접적으로 예측하고자 한다. 매우 큰 변형에도 불구하고, 기구 1, 2의 퍼센트 오차가  $\pm 1\%$  이하임을 Fig. 8과 Fig. 9을 통하여 알 수 있다. 이러한 오차의 주된 원인은 ADAMS 해석의 경우 변형된 위치에서 미세한 기구형상의 변화로 정적평형이 깨지므로 정적평형을 만족하는 새로운 위치로 미세하게 이동하는 것이라 판단된다. 복합 스프링을 갖는 기구 2의 경우, 구속부의 강성이 구동부에 비하여 매우 작음에도 불구하고, 기구 1과 비슷한 퍼센트 오차를 나타낸다. 식 (29)에서 회전변형, 즉, 역나선 방향 이외의 변형은 전체 변형에 큰 영향을 주지 않음을 알 수 있다. 따라서, 역나선 방향으로의 변형만을 고려하여 복합 스프링을 단순 스프링으로 모델링하는 방법이 실용적인 관점에서 유용함을 알 수 있다.

Fig. 10과 Fig. 11은 위치에 따른 기구 1과 기구 2의 정적변형의 경향을 나타낸다. 기구 1의 경우, P점을 +x 방향으로 위치할수록 x, y 방향의 강성이 감소하고, +y 방향으로 위치할수록 x 방향의 강성은 감소하나 y 방향의 강성은 증가함을 알 수 있다. 기구 2의 경우, 기구 1에 비하여 x 방향의 강성이 매우 작고 y 방향의 강성은 위치에 따라 큰 변화가 없음을 알 수 있다.

## 6. 결론

본 논문에서는 역나선 이론에 기초한 저자유도 평면 병렬형 기구의 해석적 강성해석 방법을 제시하였다. 역나선의 기하적 정보를 이용하여 이동 플랫폼이 총 3개의 구동 및 구속에 관련된 스프링들로 지지된다고 강성을 모델링할 수 있음을 보였다. 단순 스프링뿐만 아니라 복합 스프링을 포함하는 경우에도 제안하는 강성해석 방법의 유용성을 ADAMS의 해석결과와 비교함으로써 제시하였다. 이 강성해석 방법은 강성행렬을 해석적으로 유도할 수 있으므로 강성설계시 효과적으로 사용될 수 있다.

## 후 기

본 연구는 2009 학년도 경남대학교 학술논문게재연구비 지원에 의하여 이루어졌으며, 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

### 참고문헌

1. Gough, V. E. and Whitehall, S. G., "Universal Tire Test Machine," Proceedings 9th Int. Technical Congress, Vol. 117, pp. 117-135, 1962.
2. Kim, H. S., "Development of Two Types of Novel Planar Translational Parallel Manipulators by Using Parallelogram Mechanism," J. of the KSPE, Vol. 24, No. 8, pp. 50-57, 2007.
3. Griffis, M. and Duffy, J., "Global Stiffness Modeling of a Class of Simple Compliant Couplings," Mechanism and Machine Theory, Vol. 28, No. 2, pp. 207-224, 1993.
4. Zhang, D. and Gosselin, C. M., "Kinetostatic Modeling of N-DOF Parallel Mechanisms with a Passive Constraining Leg and Prismatic Actuators," ASME J. of Mechanical Design, Vol. 123, pp. 375-381, 2001.
5. Kim, H. S., "Stiffness Modeling of a Low-DOF Parallel Robot," J. of CASE, Vol. 13, No. 4, pp. 320-328, 2007.
6. Tsai, L. W., "Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators," John Wiley & Sons, pp. 118-279, 1999.
7. Joshi, S. and Tsai, L. W., "Jacobian Analysis of Limited-DOF Parallel Manipulators," J. of Mechanical Design, Vol. 124, No. 2, pp. 254-258, 2002.
8. Duffy, J., "Statics and Kinematics with applications to Robotics," Cambridge University Press, pp. 89-156, 1996.
9. Lipkin, H. and Duffy, J., "The elliptic polarity of screws," ASME J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Vol. 107, No. 3, pp. 377-387, 1985.
10. Yoon, W. K., Suehiro, T. and Tsumaki, Y., "Stiffness Analysis and Design of a Compact Modified Delta Parallel Mechanism," Robotica, Vol. 22, No. 4, pp. 463-475, 2004.