한국시뮬레이션학회 논문지
Vol. 18, No. 2, pp. 49-55 (2009. 6)

통제변수 기반 Gradient를 이용한 확률적 최적화 기법

권치명[1] · 김성연[1†]

Stochastic Optimization Method Using Gradient Based on Control Variates

Chi-Myung Kwon · Seong-Yeon Kim

ABSTRACT

In this paper, we investigate an optimal allocation of constant service resources in stochastic system to optimize the expected performance of interest. For this purpose, we use the control variates to estimate the gradients of expected performance with respect to given resource parameters, and apply these estimated gradients in stochastic optimization algorithm to find the optimal allocation of resources. The proposed gradient estimation method is advantageous in that it uses simulation results of a single design point without increasing the number of design points in simulation experiments and does not need to describe the logical relationship among realized performance of interest and perturbations in input parameters. We consider the applications of this research to various models and extension of input parameter space as the future research.

Key words : Stochastic optimization method, Stochastic gradient estimation, Control variates method, Simulation optimization

요 약

본 연구는 확률적 시스템에서 관심 성과함수의 기대치의 최적을 유도하는 서비스 자원의 최적 배분 문제를 조사하였다. 이러한 목적으로 통제변수를 활용하여 성과함수 기대치에 대한 서비스 자원 파라미터의 gradient를 구하는 방법을 제안하고 이를 최적화 기법의 탐색과정에 적용하여 가용 자원의 최적 배분 문제를 분석하였다. 제안된 gradient 추정 방법은 시뮬레이션 실험에서 입력 파라미터의 차원이 증가하더라도 추가로 표본점의 수를 증가시킬 필요가 없이 단일점에서 시뮬레이션 반응 결과만을 활용하고 또한 시뮬레이션의 발전과정에서 성과함수와 입력 파라미터 사이의 논리적인 관계를 기술할 필요가 없어 적용하기에 편리하다고 볼 수 있다. 본 연구의 결과를 다 차원 파라미터 공간으로의 확장하는 문제와 다양한 형태의 시뮬레이션 모형으로 적용 문제는 향후 연구해야 할 과제로 생각된다.

주요어 : 확률 최적화 기법, 확률적 그래디언트 추정, 통제변수 기법, 시뮬레이션 최적화

1. 서 론

시뮬레이션 실험설계에서 모형의 기대 성과함수는 종종 입력 파라미터의 함수로 표현된다. 시뮬레이션 모형에서 최적의 성과를 도출하는 입력 파라미터 $\vec{\theta}=(\theta_1,\theta_{2,}\ \cdots,\theta_p)$ 을 결정하는 문제는 모형의 설계에서 중요한 의미를 가진다. 예를 들어 기계 설비 수리 모형에서 각 설비 성능 $\theta_i\,(i=1,2,...,p)$ 의 총합이 일정하다는 제약이 있는 경우, 개별 설비의 성능을 어떤 수준으로 하는 것이 기계의 가동 상태를 최적으로 운영하는 방안이 될 것인가 하는 문제를 생각해 볼 수 있다. 기계의 가동 상태를 높이기 위해서는 고장 기계를 수리하여 가동 가능 상태로 만드는데 소요되는 시간, 즉 평균 반응시간(mean response rime)의 기대치 $E(g)$ 를 최소로 하여야 한다. 이러한 문제는 다음과 같은 최적화문제로 생각할 수 있다.

$$Min\ \ E(g)$$

* 이 논문은 2007학년도 동아대학교 학술연구비(공모과제)에 의하여 연구되었음.
2009년 2월 11일 접수, 2009년 6월 6일 채택
[1)] 동아대학교 경영대학 경영정보과학부
주 저 자 : 권치명
교신저자 : 김성연
E-mail; sykim1@dau.ac.kr

$$\text{subjective to } \sum_{i=1}^{p}\theta_i = F,\ \theta_i \geq 0 \quad (1)$$

여기서 목적식은 간단하게 표현되지만 실제로 $E(g)$는 시스템 시뮬레이션을 통하여 주어진 $\vec{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)$에서 확률적으로만 관측되며 closed-form으로 표현되는 함수가 아니므로 각 설비의 최적 성능 배분을 찾는 것은 쉬운 일이 아니다.

복잡한 형태의 의사결정 모형에서 식 (1)과 같은 문제는 시뮬레이션에 의한 방법이 유일한 대안으로 볼 수 있다[2]. 주어진 입력 파라미터 $\vec{\theta}$에서 직접적인 시뮬레이션으로 최적 대안을 발견하는 방법은 많은 량의 시뮬레이션 런을 수행해야 함으로 거의 불가능하다고 볼 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위해 시뮬레이션 런의 수행 도중에 관심 성과와 알려진 파라미터 함수의 관측 값으로부터 파라미터의 변화량이 성과에 미치는 영향을 파악하고 이를 이용하여 최적 대안을 구하는 확률적 최적화 방법이 제안되었다[3,4].

확률적 시뮬레이션 모형에서는 $\vec{\theta}=\vec{\theta}_0$에서 수치 해석적인 방법으로 기대 성과함수 $E[g(\vec{\theta})]$에 대한 파라미터의 gradient를 구할 수 없으므로 확률적으로 그 값을 추정해야 한다. Gradient의 추정 기법은 시뮬레이션 진행 과정에서 얻을 수 있는 정보의 활용과 시뮬레이션 런의 종료 후 얻는 결과를 이용하는 방법에 따라 나누어 볼 수 있다. Gradient를 추정하는 간접적인 방법으로는 Finite Differences, Simultaneous Perturbation, Response Surface Method 등이 있으며 이 방법은 시뮬레이션의 최종 반응 결과만을 이용하여 관심 성과의 gradient를 추정한다. 반면 시뮬레이션 모형의 특성이나 모형의 발전과정에서 얻을 수 있는 정보와 반응 결과를 동시에 이용하는 직접적인 방법으로는 Infinite Perturbation Analysis, Likelihood Ratios Method 등의 방법이 있다[9]. 직접적인 방법으로 gradient를 추정하는 경우, 파라미터의 차원이 증가하더라도 시뮬레이션을 수행하는 표본점의 수를 증가시킬 필요가 없으나 간접적인 방법을 사용할 경우 입력 파라미터의 표본점이 늘어날 수 있으며 gradient를 구하기 위해서는 적어도 2개 이상의 표본점에서의 시뮬레이션 결과가 요구된다.

본 연구는 단일 표본점에서 직접적인 방법과 같은 방법으로 시뮬레이션을 수행하지만 시뮬레이션 도중에 입력 파라미터에 따라서 변화하고 성과 기대치와 관련이 있는 확률변수의 실현결과를 추가적으로 수집하여 파라미터의 성과함수에 대한 gradient를 구하는데 활용하고자 한다. 통제변수기법(control variates method)은 원래 기대 성과함수의 변이성(variation)을 감소하는 목적으로 개발되었다. 일반적으로 통제변수는 시스템의 관심 성과와 밀접한 상관관계를 가지는 시스템 요소의 재생 과정에서 발생하는 확률변수가 사용된다[5,6]. 만일 통제변수가 입력 파라미터 θ가 모수인 확률함수(probability function)로 재현되는 확률변수라면 시뮬레이션 도중에 얻을 수 있는 통제변수의 실현치는 기대 성과함수에 대한 파라미터 θ의 gradient를 평가하는데 활용될 수 있을 것으로 생각된다.

본 논문에서는 시뮬레이션 진행과정에서 통제변수에 대한 정보를 부가적으로 수집하여 입력 파라미터에 대한 성과 추정치의 gradient를 추정하고 이를 가용 자원의 최적 배분에 활용하는 방법을 연구하고자 한다.

2. 통제변수에 의한 gradient의 추정

일반적으로 통제변수로는 관심 성과와 깊은 관련성을 가지는 시스템 요소의 확률변수가 선택된다. 예를 들어 M/M/1 대기 행렬 시스템에서 시스템 체제시간(system sojourn time)이 관심 성과일 때 서버의 서비스 시간은 이와 밀접한 관계를 가진다. 또한 기계 수리 시스템에서 가동 중인 기계가 고장이 난 후 수리가 완료되어 가동할 수 있는 상태로 될 때까지의 시스템 반응시간을 시뮬레이션을 통하여 구하는 문제에서 기계의 수리 시간은 좋은 통제변수가 될 수 있다. 이와 같은 시뮬레이션 모형에서 서버의 서비스 수준은 입력 파라미터 θ을 평균으로 하는 서비스 시간 c 의 확률 분포 $f(\theta)$로부터 재현된다. 따라서 주어진 입력 파라미터 θ에서의 시뮬레이션을 통하여 성과함수의 추정치 $\hat{g}(\theta)$와 함께 서비스 시간의 확률적 실현치를 얻을 수 있다.

n회의 독립적인 시뮬레이션 런에서 i번째 런으로부터 얻은 기대 성과함수 $E[g(\theta)]$의 추정치와 서비스 시간의 평균 실현치를 각각 $\hat{g}(\theta)_i$, $\hat{c}_i$라 하자 $(i=1, 2, \cdots, n)$. 만일 독립적인 시뮬레이션 런 시간이 충분히 크다면 $\hat{g}(\theta)_i$와, $\hat{c}_i$는 다음과 같은 이변량 정규분포(bivariates normal distribution)를 따르는 확률 표본으로 생각할 수 있다[1].

$$\begin{pmatrix} g(\theta) \\ c \end{pmatrix} \sim N_2\left[\begin{pmatrix} \mu_g \\ \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_g^2 & \sigma_{gc} \\ \sigma_{gc} & \sigma_c^2 \end{pmatrix}\right] \quad (2)$$

여기서 $\mu_g = E(g(\theta))$, $\theta = E(c)$, $\sigma_{gc} = Cov(g(\theta), c)$이며 $\sigma_c^2 = Var(c)$이다. 위의 가정이 성립하는 경우, c가 주어졌을 때 $g(\theta)$와 c사이의 선형관계는 다음과 같다[5,6].

$$E[g(\theta)|c] = \alpha_0 + \alpha_1 c \tag{3}$$

$\theta = E(c)$이므로 c에 대한 성과함수의 비 조건부 기대치(unconditional expectation)는 다음과 같다.

$$E[E(g(\theta)|c)] = \alpha_0 + \alpha_1 \theta \tag{4}$$

위 식을 θ에 대해 미분하면 α_1이 된다. 따라서 파라미터 θ에 대한 기대 성과함수의 gradient 추정량은 선형모형에서 계수 α_1의 최소자승 추정량과 같으며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\hat{E}[g(\theta)]' &= \widehat{Cov}(g(\theta), c) / \widehat{Var}(c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\hat{g}(\theta)_i - \bar{g}(\theta))(\hat{c}_i - \bar{c}) / \sum_{i=1}^{n} (\hat{c}_i - \bar{c})^2\end{aligned} \tag{5}$$

여기서 $\bar{g}(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \hat{g}(\theta)_i / n$이며 $\bar{c} = \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i / n$이다. 식 (3)에서 기대 성과함수 $E[g(\theta)]$와 확률변수 c 사이의 선형관계식은 통제변수 기법에서의 가정과 동일하며 통제변수 c와 기대 성과함수 $E[g(\theta)]$ 사이에는 선형관계가 있는 것으로 가정하고 있다. 식 (5)의 gradient 추정량 $\hat{E}[g(\theta)]'$은 실제로 통제성과치(controlled performance estimator)에서 통제변수의 계수 추정량과 일치한다. 다만 통제변수기법은 시스템 성과치의 변이성(variation)을 감소시키려는 목적으로 사용되며 여기에서는 통제변수가 입력 파라미터에 대한 성과치의 변화량을 추정하는데 사용된다.

입력 파라미터 공간이 1 차원일 때 gradient 추정 방법은 $p-$차원 파라미터 공간에서도 쉽게 확장하여 적용될 수 있다. i번째 독립적인 시뮬레이션 런의 표본점이 $p-$차원의 입력 파라미터 벡터 $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)$로 주어졌을 때 θ_k에 따라 재현되는 확률변수(또는 통제변수)의 평균 실현치를 $\hat{c}_{ik}$라 하고 관심 성과함수 추정치를 $\hat{g}(\theta)_i$라 하자($i = 1, 2, \cdots, n,\ k = 1, 2, \cdots, p$). 식 (2)의 가정과 같이 i번째 독립적인 시뮬레이션 런 시간이 충분히 크다면 성과함수 $g(\theta)$와 통제변수 $\vec{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_p)$는 $(p+1)$변량 정규분포를 따른다[1].

$$\begin{pmatrix} g(\theta) \\ \vec{c} \end{pmatrix} \sim N_{p+1}\left[\begin{pmatrix} \mu_g \\ \vec{\theta} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_g^2 & \Sigma_{gc} \\ \Sigma_{gc} & \Sigma_c \end{pmatrix}\right] \tag{6}$$

여기서 $\mu_g = E(g(\theta))$, $\vec{\theta} = E(\vec{c})$, $\Sigma_c = Cov(\vec{c})$이며 $\Sigma_{gc} = Cov(g(\theta), \vec{c})$이다. 위의 가정이 성립하는 경우, $\vec{c}$가 주어졌을 때 $g(\theta)$와 $\vec{c}$ 사이의 선형관계는 다음과 같이 주어진다[5,6].

$$E(g(\theta)|\vec{c}) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{p} \alpha_k c_k \tag{7}$$

식 (6)으로부터 $\vec{\theta} = E(\vec{c})$ 이므로

$$E[E(g|\vec{c})] = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \theta_i \tag{8}$$

위 식을 θ_i에 대해 미분하면 α_i가 되므로 파라미터 θ_i에 대한 기대 성과함수의 gradient 추정량 $\hat{E}[g(\theta_i)]'$은 선형모형에서 계수 α_k의 최소자승 추정량과 같다.

$$\hat{\alpha} = \widehat{Cov}(g(\theta), \vec{c})[\widehat{Cov}(\vec{c})]^{-1} \tag{9}$$

따라서 p-차원 gradient 추정치 $\hat{E}[g(\theta_i)]'$는 다음과 같으며

$$\hat{E}[g(\theta_i)]' = \hat{\alpha}_i \tag{10}$$

여기서 $\hat{\alpha} = (\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, ..., \hat{\alpha}_i, ..., \hat{\alpha}_p)^t$ 이며 $\hat{\alpha}_i$는 $\hat{\alpha}$의 i번째 원소이다.

3. 확률 최적화 기법

확률근사알고리즘(stochastic approximation method)은 Robbins와 Monro에 의해 확률적으로 관찰 가능한 함수 $Y(x)$의 기대치 $M(x) = p$가 되는 x를 발견하는 기법으로 처음으로 소개되었다[8]. 이들의 연구 결과를 바탕으로 시뮬레이션 모형에서 입력 파라미터에 대한 성과함수의 기대치를 최적화하는 기법이 제안되었다[2,3]. 이 기법은 입력 파라미터 θ에서 확률적으로 관찰되는 성과함수 $g(\theta)$의 θ에 대한 gradient를 구하고 이를 이용하여 미지의 성과 함수 $g(\theta)$를 개선하는 방향으로 입력 파라미터 θ의 이동을 반복하여 근사적으로 최적 성과 함수의 값을 추정한다.

확률 최적화 기법은 제한적인 자원을 배분하여 최적 성과를 달성하는 시뮬레이션 모형에 적용될 수 있는데 본 연구에서는 통제변수에 의한 성과함수의 gradient를 기반으로 하는 확률 최적화 알고리즘을 식 (1)의 최적화 문제에 적용하고자 한다. 식 (1)에서 성과함수 $g(\theta)$는 수리설비의 성능 $\vec{\theta}=(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_p)$의 함수로 기계 수리 시스템의 반응시간이다. 반응시간을 추정하기 위해서 L 대의 기계가 수리를 완료하고 가동 상태에 도달할 때 까지 시뮬레이션 런을 수행하는 과정을 편의상 단계 k에서의 시뮬레이션이라고 하자. 단계 k의 입력 파라미터의 표본점 $\vec{\theta}^{(k)}=(\theta_1^{(k)}, \theta_2^{(k)}, \cdots, \theta_p^{(k)})$에서 시뮬레이션을 수행하면 $\theta_i^{(k)}$에 따라 재현되는 통제변수의 실현치와 함께 성과함수의 추정치를 얻을 수 있다. 단계 k에서 이러한 독립적인 런을 n회 수행한 결과 얻은 n개의 성과함수의 추정치 $\hat{g}(\theta)_k$와 $\theta_i^{(k)}$에 따른 통제변수 실현치 $\widehat{c_{ik}}$을 이용하여 식 (9)의 $Cov(g(\theta), \vec{c})$와 $Cov(\vec{c})$을 각각 추정하고 이를 식 (10)에 대입하여 파라미터 θ_i에 대한 기대 성과함수의 gradient 추정량 $\hat{E}[g(\theta_i)]'$을 구한다. 단계 k에서의 성과함수 $g(\theta)$의 gradient 추정량은 단계 $(k+1)$에서 새로운 입력 파라미터 $\vec{\theta}^{(k+1)}=(\theta_1^{(k+1)}, \theta_2^{(k+1)}, \cdots, \theta_p^{(k+1)})$으로 이동하는 방향을 결정하게 된다.

입력 파라미터의 새로운 표본점으로 이동하는 거리는 파라미터에 대한 제약 조건을 만족하도록 실행 가능성을 유지하여야 하고 또한 알고리즘의 수렴 조건[8]을 만족하여야 한다. 만일 이동 과정에서 $\theta_i^{(k)}$와 $\theta_i^{(k+1)}$ $(i=1,2,...,p)$의 거리가 미리 정한 특정한 값 ϵ 이하이면 알고리즘을 종료하게 된다. $\vec{\theta}^{(k)}$에서 추정된 gradient를 바탕으로 수리 설비의 서비스 시간을 수정하여 $\vec{\theta}^{(k+1)}$을 구하고 다시 L 대의 기계가 수리를 완료할 때까지 시뮬레이션을 반복적으로 수행하는 확률 최적화기법의 탐색 과정은 비선형 최적화 기법의 탐색 기법과 매우 유사하며 다음과 같은 단계를 거쳐 최적해를 구한다[3,9,11].

<u>확률 최적화 기법</u>

(1) 초기화 단계: $k=1$. 초기 입력 파라미터 $\theta_i^{(k)}(i=1,2,...,p)$의 선택.
(2) gradient 추정 단계: $\theta_i^{(k)}(i=1,2,...,p)$에서 L 대의 기계가 수리를 완료할 때까지 시뮬레이션을 수행하고 식 (10)을 이용하여 파라미터 θ_i에 대한 기대 성과함수의 gradient 추정량 $\hat{E}[g(\theta_i^{(k)})]'(i=1,2,...,p)$을 추정한다.
(3) 입력 파라미터 $\theta_i(i=1,2,...,p)$의 수정 단계:
$$\theta_i^{(k+1)}=\theta_i^{(k)}-a_k(\hat{E}(\theta_i^{(k)})'-1/p\sum_{j=1}^{p}\hat{E}(\theta_i^{(k)})')$$
(단 $a_k=A/k$이며 A는 양의 실수이다)
(4) $\theta_i^{(k)}(i=1,2,...,p)$의 실행가능성 검사단계: 만일 $\theta_i^{(k+1)}>0\,(i=1,2,...,p)$이면 단계 5로 이동. 아니면 $a_k=A/2k$이고 단계 (3)로 이동.
(5) 종료 조건의 검사 단계:
$a_k[\hat{E}(\theta_i^{(k)})'-1/p\sum_{j=1}^{p}\hat{E}(\theta_i^{(k)})']<\epsilon$ 이면 알고리즘을 종료. 아니면 $k=k+1$ 단계 (2)로 이동.

단계 (2)에서 추정된 gradient는 확률적이며 이 값은 시뮬레이션 시간에 종속적으로 오차(noise)를 포함하고 있다. 단계 (3)에서 알고리즘의 수렴하려면 입력 파라미터의 새로운 표본점으로 이동하는 거리를 조절하는 계수 a_k는 다음 조건을 만족해야 한다[8,9,11].

$$\lim_{k\to\infty}a_k=0,\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k=\infty,\ \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2<\infty \tag{11}$$

이동 거리를 조절하는 계수는 여러 형태가 가능하지만 본 연구에서는 Robins와 Monro[8]가 제안한 계수 $a_k=1/k$을 수정하여 $a_k=A/k$로 지정하였다. 이 계수도 식 (11)의 수렴조건을 충족한다. 그리고 단계 (3)에서 $\theta_i^{(k+1)}$을 구하는 둘째 항은 새로운 입력 파라미터의 조합을 구할 때 실행가능성을 유지도록 $\theta_i^{(k)}$에서 얻은 gradient를 초평면(hyper-plane) $\sum_{i=1}^{p}\theta_i=F$에 투영(projection)하기 위한 것이다[11]. 단계 (4)는 입력 파라미터가 음수가 되는 것을 방지하기 위한 것으로 gradient 추정치에 오차가 크고 이동 거리가 클 경우 파라미터의 값이 음수가 될 수 있다. 이러한 경우 이동 거리를 반으로 줄여 파라미터의 값을 양수로 유지하기 위한 것이다. 마지막으로 단계 (5)에서 알고리즘의 종료 조건은 $\theta_i^{(k)}$에서 $\theta_i^{(k+1)}$으로의 이동거리가 지정된 값 $\epsilon(>0)$보다 적으면 종료하는 것으로 하였다. ϵ 값의 선택은 최적 성과의 정확성(또는 시뮬레이션 런 길이)과 절충 관계를 가진다고 볼 수 있다.

4. 시뮬레이션 실험 및 결과분석

본 연구는 입력 파라미터의 성과함수에 대한 gradient

추정치를 구하는 새로운 방법을 제안하고 이를 확률적 모형의 최적화 기법에 적용하고자 한다. 이러한 접근 방법의 타당성에 대해서는 많은 연구가 필요하지만 본 연구는 통제변수를 활용하여 파라미터의 성과함수에 대한 gradient 추정하는 연구의 출발점으로써 M/M/1 대기 행렬 모형과 기계 수리 모형의 시뮬레이션을 통하여 이러한 접근방법의 가능성을 검토하고자 한다.

4.1 M/M/1 대기행렬모형의 시뮬레이션

M/M/1 대기행렬 모형에서 서비스 설비 투자와 서비스 수준 개선 문제는 서로 절충관계에 있다고 볼 수 있다. 설비 투자 증가는 시스템 체재시간 단축이라는 효과를 유도하며 이에 따라 서비스 수준이 개선된다. 만일 설비 투자 비용이 시스템의 평균 서비스율(μ)에 비례하여 발생하고 또한 시스템 체재시간 비용이 체재시간에 비례하여 발생한다고 가정하면 총 비용은 다음과 같은 비용모형 $Cost(\mu)$로 나타낼 수 있다.

$$Cost(\mu) = a\mu + bW_s \qquad (12)$$

단 여기서 W_s는 개체의 시스템 평균 체재시간이고 a와 b는 양의 값을 가지는 상수이다.

위의 비용함수는 시스템 서비스율(또는 평균 서비스 시간)의 함수로 표현되며 최적 서비스율을 결정하는 문제는 비용 최적화 측면에서 의미가 있다. 개체의 시스템 도착간격이 평균 $1/\lambda$인 지수분포를 따르고 서비스 시간도 평균이 $1/\mu$ (단 $(\mu > \lambda)$)인 지수분포를 따르는 것으로 가정하면 $W_s = 1/(\mu - \lambda)$이다. 이 비용함수는 평균 서비스율 μ의 closed-form 형태로 표현될 수 있으므로 $a = 4,\ b = 1$이고 $1/\lambda = 0.5$인 경우, $Cost(\mu)$을 최소화하는 서버의 최적 평균 서비스 시간은 $1/\mu = 0.4$이다.

잘 알려진 M/M/1 대기행렬 모형을 대상으로 시뮬레이션을 통하여 통제변수를 활용하는 gradient 추정에 의한 확률 최적화 기법의 타당성을 검토하고자 한다. 시뮬레이션 언어 AweSim[7]을 이용하여 Entity 1,000개가 서비스를 받을 때까지 시뮬레이션을 독립적으로 50회 수행한 결과로부터 서버의 최적 서비스 시간을 탐색하는 과정은 표 1과 같다.

위의 결과는 가장 간단한 대기행렬 모형에서 얻은 것이지만 시뮬레이션 결과는 이론적인 값과 거의 일치하고 있어 통제변수를 이용하여 파라미터의 성과함수에 대한 gradient 추정법의 응용 가능성을 시사하고 있다.

표 1. 최적 서비스 시간의 탐색 과정

단 계	$1/\mu$	$Cost(\mu)'$	$Cost(\mu)$
1	0.200	-97.143	16.500
2	0.310	-33.709	13.725
3	0.344	-23.466	12.743
4	0.366	-14.203	12.313
5	0.380	-8.478	12.135
6	0.388	-4.671	12.071
7	0.393	-1.758	12.048
8	0.395	-0.540	12.042
9	0.396	0.086	12.039

4.2 기계 수리 모형의 시뮬레이션

그림 1은 Wilson과 Pritsker[10]가 통제변수의 효율성을 평가하기 위해 제시한 기계 수리 모형이다. 본 연구에서는 보다 일반적인 예제를 통하여 제안된 확률 최적화 기법을 평가하기 위해 그림 1에서 수리 설비의 수리 시간 분포와 작업장에서 가동 중인 기계의 수를 증가시켰다. 작업장 1에는 10대의 기계가 가동 중이며 2대의 기계는 가동 중인 기계가 고장이 날 경우에 운용을 위한 spare 기계이다. 작업장 1에서 기계의 가동시간은 평균이 10인 지수분포를 따르며 고장이 나면 평균적으로 25%는 수리설비 2로 75%는 수리설비 3로 이동하여 수리를 받는다. 수리설비 2 또는 3의 수리를 받은 후 수리설비 4로 이동하여 또 다른 수리를 받는데 4의 수리 후 10% 정도는 다시 수리설비 3으로 이동하여 추가 수리를 받고 나머지 90%는 작업장 1로 이동하여 가동 가능 상태로 대기한다. 수리설비 2, 3, 4의 수리시간은 평균이 각각 θ_1, θ_2, θ_3이며 분산이 각각 0.5, 0.4, 01인 정규분포를 따르는 것으로 가

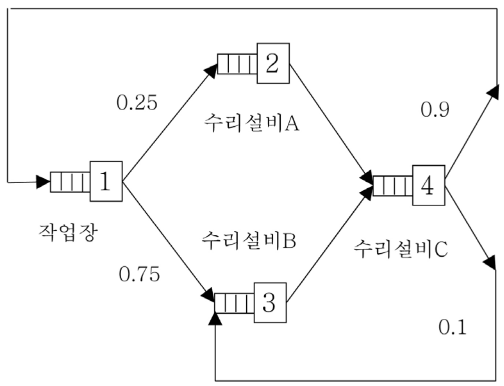

그림 1. 기계 수리 시스템

표 2. 수리 설비 서비스 시간의 최적 배분

단계	θ_1 $(\hat{E}[g(\theta_1)]')$	θ_2 $(\hat{E}[g(\theta_2)]')$	θ_3 $(\hat{E}[g(\theta_3)]')$	반응시간
1	2.000 (0.367)	0.600 (3.433)	0.400 (3.878)	2.281
2	2.055 (0.908)	0.578 (3.344)	0.367 (3.428)	2.199
3	2.083 (0.865)	0.565 (2.489)	0.353 (2.362)	2.157
4	2.096 (0.084)	0.558 (3.221)	0.346 (-0.796)	2.141
5	2.104 (-0.032)	0.543 (2.281)	0.362 (1.612)	2.134
6	2.115 (0.045)	0.526 (2.417)	0.359 (6.238)	2.116
7	2.135 (0.740)	0.529 (2.568)	0.335 (1.956)	2.095
8	2.141 (0.839)	0.524 (1.990)	0.335 (2.624)	2.088
9	2.146 (0.925)	0.523 (1.951)	0.331 (1.170)	2.078
10	2.148 (0.476)	0.520 (1.597)	0.332 (2.008)	2.079
11	2.152 (0.207)	0.519 (2.555)	0.329 (-0.834)	2.081
12	2.154 (1.095)	0.511 (2.600)	0.335 (1.916)	2.067
13	2.157 (-0.001)	0.508 (2.382)	0.335 (1.373)	2.073
14	2.161 (0.016)	0.504 (3.039)	0.335 (3.040)	2.068
15	2.168 (0.113)	0.501 (2.313)	0.332 (1.774)	2.059
16	2.172 (0.612)	0.498 (1.705)	0.330 (3.323)	2.057
17	2.176 (0.509)	0.499 (1.398)	0.326 (0.071)	2.051
18	2.176 (0.425)	0.497 (0.618)	0.327 (0.819)	2.047

정하였다.

기계 수리 시스템에서 수리 설비의 2, 3 ,4의 평균 수리시간의 합이 3으로 일정하다는 가정 하에서 수리설비 2, 3, 4에 평균 수리 시간을 어떻게 할당하는 것이 수리 완료 후 작업장 1로 돌아가는 시스템 반응시간을 최소로 하는가를 알아보고자 한다.

시뮬레이션 언어 AweSim을 이용하여 고장이 난 기계 1,000대가 수리 서비스를 받고 작업장 1로 이동할 때까지 시뮬레이션을 수행하여 시스템 반응시간에 대한 각 수리설비의 기계 수리시간의 gradient를 구하고 최적화 알고리즘의 단계 (3)로부터 수리설비 시스템의 평균 수리시간을 새로이 할당하였다. 표 2는 수리설비의 초기 평균 수리시간에서 최적 수리시간을 찾아가는 과정을 나타낸다.

최적화 알고리즘의 단계 (3)에서 수리 설비시간의 임의의 표본점으로부터 다음 표본점으로의 이동 거리를 결정하는 계수를 $a_k = 0.05/k$로 지정하였는데 시뮬레이션 결과 초기 값의 할당과 계수 a_k의 값은 알고리즘의 종료 단계까지 반복과정 횟수에 큰 영향을 미치는 것으로 나타났다. 이는 Robbins와 Monro의 연구에서 언급된 바와 같이 반응성과치의 변화에 따라 이동 거리를 조정하는 연구가 필요한 부분으로 사료된다[3,8,11]. 기계 수리 모형의 시뮬레이션을 통하여 얻은 결과도 통제변수를 이용하여 파라미터의 성과함수에 대한 gradient 추정법의 가능성을 시사하고 있는 것으로 판단된다.

5. 결 론

본 연구는 확률적으로 관찰되는 성과함수의 기대치를 최적화하기 위해 통제변수를 이용하여 입력 파라미터의 gradient를 구하고 이를 최적화 알고리즘의 탐색 방향을 제시하는데 활용하였다. 통제변수 기법을 이용하여 gradient를 추정하는 방법의 가장 큰 장점은 직접적인 방법으로 gradient를 구하는 경우에서와 같이 단지 시뮬레이션 반응 결과만을 활용함으로써 구조가 복잡한 시뮬레이션 모형에도 적용하기가 편리한 점이라고 볼 수 있다. 아울러 직접적인 방법에 비해 파라미터의 차원이 증가하더라도 추가로 표본점(design point)의 수를 증가시킬 필요가 없는 이점이 있다. 간접적인 방법으로 gradient를 추정하는 기법에서는 입력 파라미터의 변화가 성과함수에 미치는 영향을 시스템 발전과정에 따라 논리적으로 기술해야 하는데 모형이 복잡할 경우 논리적인 기술 과정에 많은 노력이 요구된다. 추정된 확률적 gradient의 정확도는 직접적인 방법보다 다소 떨어질 수 있지만 적용성에서는 본 연구에서 제안한 기법의 우수하다고 판단된다.

M/M/1 대기 행렬 모형과 기계 수리모형을 대상으로 한 시뮬레이션 결과에서 통제변수가 gradient 추정에 효과적으로 활용될 수 있는 가능성을 제시하고 있지만 파라

미터 공간이 다차원인 경우와 복잡한 형태의 시뮬레이션 모형에의 적용, gradient의 정확성 문제는 향후 연구해야 할 과제로 생각된다.

참 고 문 헌

1. Anderson T.W. (1984), An Introduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley & Sons, New York.
2. Andradottir, S. (1990), "A New Algorithm for Stochastic Optimization", Proceedings of the 1990 WSC, 364-366.
3. Andradottir, S. (1998), "Simulation Optimization", Handbook of Simulation, Principle, Methodology, and Practices, John Wiley & Sons, New York. 308-333.
4. Ho, Y. C. and Cao, X. R. (1991), Perturbation Analysis of Discrete Event Dynamic Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston.
5. Kwon, C. and Tew, J. D. (1994). "Combined Correlation Methods for Meta-model Estimation in Multi-population Simulation Experiments". J. Statistical Computation and Simulation, Vol. 49. 49-75.
6. Nozari, A. Arnold, S. F. and Pegden, C. D. (1984), "Control Variates for Multi-population Simulation Experiments", IIE Trans. 16, 159-169.
7. Pritsker, A. A. B. and O'Reilly, J, (1999). Simulation with Visual SLAM and AWeSim. John Wiley & Sons, New York.
8. Robins, H and Monro, S. (1951), "A Stochastic Approximation Method", Annals of Mathematical Statistics, 32, 400-407.
9. Wieland J. R, and Schmeiser. B. W. (2006), "Stochastic gradient Estimation Using a Single Design Point", Proceeding of the 2006 Winter Simulation Conference, 390 -397.
10. Wilson, J. R. and Pritsker, A. A. B. (1984), "Variance Reduction in Queueing Simulation Using Generalized Concomitant Variables", J. Statistical Computation and Simulation, 19. 129-153.
11. 권치명 (2000), "퍼터베이션 분석을 이용한 대기행렬 네트워크의 최적화", 한국시뮬레이션학회 논문지, 제9권, 제2호, 89-102.

권 치 명 (cmkwon@dau.ac.kr)

1978 서울대학교 산업공학과 졸업
1983 서울대학교 대학원 산업공학과 졸업
1991 VPI & SU 산업공학과 박사
현재 동아대학교 경영정보과학부 교수

관심분야 : Simulation Modeling & Output Analysis, Simulation Optimization, FMS

김 성 연 (sykim1@dau.ac.kr)

1981 서울대학교 계산통계학과 학사
1983 서울대학교 대학원 통계학 전공(석사)
1997 North Carolina State University(통계학 박사)
현재 동아대학교 경영정보과학부 교수

관심분야 : 선형모형, 비선형모형