

유한요소법을 이용한 과도 선형 동탄성 해석 Transient Linear Elastodynamic Analysis by the Finite Element Method

황은하*, 오근**
Eun-Ha Hwang*, Guen Oh**

<Abstract>

A new finite element equation is derived by applying quadratic and cubic time integration scheme to the variational formulation in time-integral for the analysis of the transient elastodynamic problems to increase the numerical accuracy and stability. Emphasis is focused on methodology for cubic time integration scheme procedure which are never presented before. In this semidiscrete approximations of the field variables, the time axis is divided equally and quadratic and cubic time variation is assumed in those intervals, and space is approximated by the usual finite element discretization technique. It is found that unconditionally stable numerical results are obtained in case of the cubic time variation. Some numerical examples are given to show the versatility of the presented formulation.

Keywords : Transient Elastodynamics, FEM, Cubic Time Integration, Convolution

1. 서 론

산업체 전반에 걸쳐 갑작스러운 충격하중을 받는 문제에 대한 연구는 많은 연구자들에 의해 진행되어 왔고, 현재도 보다 좋은 결과를 얻기 위한 새로운 해법에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있다. 과도 선형 동탄성 문제를 해결하기 위한 방법으로써 직접 실험을 하거나, 또는 해석적인 방법을 통해 문제의 해법을 찾기도 한다. 최근에 들어 컴퓨터의 성능이 향상되고 컴퓨터를 이용한 문제해결이 경제적, 인적, 물리적인 장점이 부각되면서 많은 산업체에서 컴퓨터를 활용한 문제해결을 선호하고 있다. 컴퓨터를 이용하여 과도 선형 동탄성 문제를 풀기 위한 수치 해법으로는 유한차분법⁽¹⁾, 유한요소법

⁽²⁾, 그리고 경계요소법⁽³⁾ 등이 사용되고 있다. 동탄성 문제를 유한요소법으로 해석하기 위한 과정으로 운동방정식을 등가인 변분식으로 바꾸어 푸는데 이를 변분법⁽⁴⁾이라고 한다. 그리고 변분식은 수치해법에 따라 시간영역, 라플라스 영역 그리고 푸리에영역에서 해석한다. 본 논문에서는 시간영역에 국한한다. 일반적으로 시간영역에서의 유한요소법에 의한 기존의 수치해석은 주어진 지배방정식에 가중함수를 가하고 부분적분을 한 후에 시간함수와 공간함수의 곱의 함수로 가정한다. 이를 위해서 시간 축을 등 구간으로 나누고 각 시간 구간에서 시간절점의 속도와 가속도를 Newmark Method⁽²⁾와 같은 직접시간적분을 이용하여 구한다.

본 논문에서는 Gurtine의 범함수⁽⁵⁾로부터 유

* 교신저자, 정회원, 금오공과대학교 기계공학부, 교수, 工博* Corresponding Author, Professor, School of Mechanical Engineering, K.I.T, Ph. D.
Email : ehhwang@kumoh.ac.kr

** 정회원, 금오공과대학교 대학원 기계설계공학과

** Graduate School of K.I.T.

도된 적분형 운동방정식에 Galerkin 방법을 적용하여 변분식을 구하는 단순화된 정식화 과정을 통해 시간함수와 공간함수로 분리되어 적분한다. 이러한 적분형 운동방정식은 가속도항이 포함되어 있지 않으므로 수치해석시 가속도와 속도를 위한 시간적분법이 필요가 없으므로 해석절차가 단순해진다.

시간영역에 따른 적분과정에 있어서 종속함수의 근사방법에 따라 해의 정밀도와 안정성에 큰 영향을 준다. 종속함수가 각 시간구간에서 상수함수로 근사화한 해법은 시간 증분의 크기에 민감하지는 않았으나 매우 큰 오차가 발생하여 신뢰할 수 없는 해의 분포를 보였고, 종속함수를 1차함수로 근사화한 해법은 제한된 시간증분에 대하여 수치결과는 수렴하였으나 수치결과의 심한 떨림 현상을 보였다.⁽⁶⁾ 본 논문에서는 이전 해법들의 연장으로서 시간 축에 대하여 2차함수와 3차함수로 가정된 내삽함수를 이용한 유한요소방정식을 제시하였다. 전자의 경우에는 시간증분의 크기에 따라 수치결과가 수렴하거나 발산하는 경향을 보였으나 임의의 시간증분에 대해서는 정밀도가 가장 높은 수치결과를 보였다. 후자의 경우에는 시간증분의 크기에 민감하게 반응하지 않았으며 수치결과의 분포에 있어서도 실제해로 수렴하는 신뢰할 수 있는 수치결과를 보였다.

제시된 유한요소정식화의 타당성과 계산된 수치결과의 안정성과 정확성을 검증하기 위하여 1차원 막대를 선택하였으며, 해석을 통해 얻어진 수치결과를 이론 해와 다른 해법에 의한 수치결과와 비교 검증하였다.

2. 적분형 변분식

등방성 문제를 해석하기 위한 과도 선형 동탄성 문제의 지배 방정식은 다음처럼 텐서로써 표기된다.⁽⁷⁾

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x},t) + \rho f_i(\mathbf{x},t) = \rho \ddot{u}_i(\mathbf{x},t) \quad (1)$$

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2} \{u_{i,j}(\mathbf{x},t) + u_{j,i}(\mathbf{x},t)\} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x},t) = D_{ijkl} \epsilon_{kl}(\mathbf{x},t) \quad (3)$$

여기서, σ_{ij} 는 응력, ρ 는 밀도, f_i 는 체적력, u_i 는

변위, \mathbf{x} 는 위치 벡터, t 는 시간, $\sigma_{ij,j} \equiv \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$ 는 공간 변수에 관한 편미분, $\ddot{u}_i \equiv \partial^2 u / \partial t^2$ 는 가속도, ϵ_{ij} 는 변형률, D_{ijkl} 은 탄성행렬이다. 그리고 위와 같은 지배방정식들을 풀기 위한 경계조건 및 초기조건은 다음과 같다:

$$u_i(\mathbf{x},t) = \hat{u}_i(\mathbf{x},t) \text{ on } \Gamma_u \quad (4a)$$

$$t_i(\mathbf{x},t) = \hat{t}_i(\mathbf{x},t) \text{ on } \Gamma_t \quad (4b)$$

$$u_i(\mathbf{x},t) = u_{0i}(\mathbf{x}) \text{ at } t=0 \quad (4c)$$

$$\dot{u}_i(\mathbf{x},t) = v_{0i}(\mathbf{x}) \text{ at } t=0 \quad (4d)$$

여기서, t_i 는 표면력으로서 물체 표면에서 $t_i \equiv \sigma_{ij} n_j$ 의 관계를 가지며, \hat{u}_i 와 \hat{t}_i 는 물체표면($\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_t$)의 Γ_u 와 Γ_t 에서 변위와 표면력에 관한 경계값이다. 그리고 u_{0i} 와 v_{0i} 는 변위와 속도에 관한 초기값이다. $t < 0$ 이하에서는 물체의 거동이 없다고 가정한다.

본 논문에서는 가속도를 포함하는 시간미분형 동점탄성 운동방정식(1)에 라플라스 변환을 적용하고 간단한 수학적 연산과 역변환을 취하면 다음과 같은 가속도 항이 제거된 시간적분형 동탄성 운동방정식으로 표현된다.

$$g^* \sigma_{ij,j} + g^* \rho f_i - \rho \{-t v_{0i} - d_{0i} + u_i\} = 0 \quad (5)$$

여기서, $g = g(t) = t$ 이며, *는 합성적분(convolution integral) 기호로써 다음과 같이 정의된다.

$$u^* v = \int_0^t u(\mathbf{x},t-\tau) v(\mathbf{x},\tau) d\tau \quad (6)$$

여기서, \mathbf{x} 는 위치벡터이며 t 는 시간변수이다. 본 논문에서 사용하는 유한요소방정식은 식(5)에 변분증분을 곱하고 영역적분한 후 부분적분을 하면 변분식이 표현되어진다. 본 논문에서는 안정적인 수치결과를 얻기 위해서 시간 축을 등간격으로 나누고, 정의된 각 시간구간에서 종속함수를 2차 곡선함수와 3차 곡선함수로 정의하고, 하중조건은 초기 힘이 일정하게 유지되는 것으로 가정하였다. 변분식을 행렬식으로 표현하면 동탄성 문제를 해석하기 위한 유한요소방정식이 다음처럼 유도된다.

$$\int_{\Omega} [g^* \sigma_{ij,j} + \rho \{g^* f_i + (tv_{0i} + u_{0i})\} - \rho u_i] \delta u_i d\Omega = 0 \quad (7)$$

체적력을 무시하고, 초기변위(u_{0i})와 초기속도(v_{0i})가 영이라고 가정한다. 이를 전개하면 다음과 같은 변분식을 얻을 수가 있다.

$$\int_{\Omega} g^* \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \rho u_i \delta u_i d\Omega = \int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma \quad (8)$$

식(8)에서 등식 우측의 외력항은 초기에 힘이 가해지고 그 후에 일정하게 유지되는 것으로 가정했을 때, 다음처럼 된다.

$$\int_{\Gamma} g^* t_i \delta u_i d\Gamma = \frac{t^2}{2} \int_{\Gamma} \hat{t}_i(\mathbf{x}) \delta u_i d\Gamma \quad (9)$$

여기서, $t_i(\mathbf{x}, t) = \hat{t}_i(\mathbf{x}) H(t)$ 이며, $H(t)$ 는 단위계단함수이다.

3. 동탄성 유한요소방정식

3.1 시간구간을 2차 곡선함수로 근사

식(8)의 합성적분(convolution) 항은 시간 축을 등간격으로 분할하고 시간의 함수인 응력에 대해 2차곡선(quadratic)으로 가정한다. 변위와 변형률에 대해서도 동일한 가정이 성립한다. 그러나 이러한 가정은 미분형 방정식을 기본으로 한 변분식에는 적용할 수가 없다. 응력에 대한 근사적인 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &\approx \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{n=2}^N \{ \phi_{n-2}(t) \sigma_{ij}^{n-2}(\mathbf{x}) + \phi_{n-1}(t) \sigma_{ij}^{n-1}(\mathbf{x}) \\ &\quad + \phi_n(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \} \end{aligned} \quad (10)$$

여기서 ϕ_t 는 Fig. 1에서와 같이 시간축상에서 정의된 지역시간 내삽함수이며, τ 는 임의의 시간이다. $\sigma_{ij}^n(\mathbf{x})$ 는 임의의 시간절점(t_n)에서 일정한 값을 가지는 공간에 관한 응력함수이다.

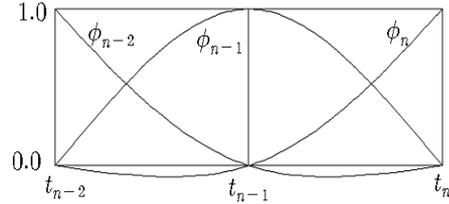


Fig. 1. Quadratic time interpolation function.

다음과 같이 정의한다.

$$\phi_{n-2}(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right) + 1 \quad (11a)$$

$$\phi_{n-1}(t) = - \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right)^2 + 2 \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right) \quad (11b)$$

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-2}}{\Delta t} \right) \\ &\quad \text{for } t_{n-2} \leq \tau \leq t_n \end{aligned} \quad (11c)$$

식(8)의 좌변의 첫 번째 항에 가정된 응력함수식(10)을 대입하고, 외력으로 단위계단함수가 작용한다면 식(8)은 다음과 같은 행렬식으로 표현된다.⁽⁸⁾

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta t^2}{3} \sum_{n=2}^N \left[\left\{ (N-n+2) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^{n-2} \right\} \right. \\ &\quad + \left\{ 4(N-n+1) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^{n-1} \right\} \\ &\quad + \left\{ (N-n) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^n \right\} \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} \rho [M]^T [N] d\Omega \{u_i\}^N = \frac{t^2}{2} \int_{\Gamma} [N]^T \hat{t}_i(\mathbf{x}) d\Gamma \right] \quad (12) \end{aligned}$$

여기서, $[B]$ 는 변형률-변위행렬, $[D]$ 는 탄성계수행렬이고, $[N]$ 는 형상함수 행렬이다.

식(12)를 현재 시간 $t = t_N$ 에서의 유한요소방정식은 다음과 같다.

$$[\hat{K}] \{u_i\}^N = \{\hat{F}\} - \{\hat{R}\} \quad (13)$$

여기서,

$$[\hat{K}] = [M]$$

$$\{\hat{F}\} = \frac{t^2}{2} \{F\} \quad (14)$$

$$\{\hat{R}\} = \frac{\Delta t^2}{6} [K] \left[5 \{u_i\}^{N-1} + 6 \sum_{n=2}^{N-2} (N-n) \{u_i\}^n + 5(N-1) \{u_i\}^1 \right]$$

3.2 시간구간을 3차 곡선함수로 근사

식(8)의 첫항을 계산하기 위해서, 시간축을 등간격으로 나누고, 응력분포가 정의된 각각의 시간구간에서 3차 다항식으로 가정한다.

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) &\approx \bar{\sigma}_{ij}(\mathbf{x}, t) \\ &= \sum_{n=3}^N \left\{ \phi_{n-3}(t) \sigma_{ij}^{n-3}(\mathbf{x}) + \phi_{n-2}(t) \sigma_{ij}^{n-2}(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. + \phi_{n-1}(t) \sigma_{ij}^{n-1}(\mathbf{x}) + \phi_n(t) \sigma_{ij}^n(\mathbf{x}) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

여기서, ϕ_n 는 Fig. 2에서와 같이 시간축 상의 시간절점에 관한 지역시간 내삽함수(local time interpolation functions)이며, τ 는 임의의 시간으로써 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \phi_{n-3}(t) &= -\frac{1}{6} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^3 + \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^2 \\ &\quad - \frac{11}{6} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right) + 1 \quad (16a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{n-2}(t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^3 - \frac{5}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^2 \\ &\quad + 3 \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right) \quad (16b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{n-1}(t) &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^3 + 2 \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right) \quad (16c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_n(t) &= \frac{1}{6} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau - t_{n-3}}{\Delta t} \right) \quad (16d) \end{aligned}$$

$$\text{for } t_{n-3} \leq \tau \leq t_n$$

마찬가지로, 외력으로써 단위계단함수가 작용하는 경우에 대하여 식(15)를 식(8)에 대입하고

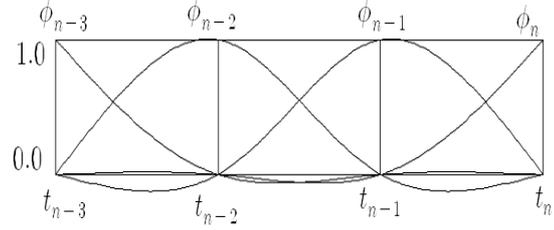


Fig. 2. Cubic time interpolation function.

행렬식으로 표현하면, 시간구간에서 3차함수로 근사화된 유한요소방정식은 다음처럼 유도된다.

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \Delta t^2 \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^N \\ &+ \int_{\Omega} \rho [N]^T [N] d\Omega \{u_i\}^N = \frac{t^2}{2} \int_{\Gamma} [N]^T \hat{t}_i(\mathbf{x}) d\Gamma \\ &- \Delta t^2 \left(\frac{10}{9} N - \frac{43}{45} \right) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^1 \\ &- \Delta t^2 \left(\frac{71}{72} N - \frac{91}{45} \right) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^2 \\ &- \Delta t^2 \sum_{n=3}^{N-2} (N-n) \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^n \\ &- \Delta t^2 \frac{57}{80} N \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \{u_i\}^{n-1} \quad (17) \end{aligned}$$

여기서, $[N]$ 은 형상함수 행렬, $[B]$ 는 변형률-변위 행렬, $[D]$ 는 탄성계수 행렬이다.

식(17)을 더 간단히 표현하면,

$$[\hat{K}] \{u_i\}^N = \{\hat{F}\} - \{\hat{R}\} \quad (18)$$

여기서,

$$[\hat{K}] = \frac{2}{3} \Delta t^2 [K] + [M] = \text{일정},$$

$$\{\hat{F}(t)\} = \frac{t^2}{2} \{F\}, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \{\hat{R}\} &= \Delta t^2 [K] \left[\frac{57}{80} \{u_i\}^{N-1} + \sum_{n=3}^{N-2} (N-n) \{u_i\}^n \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{71}{72} N - \frac{91}{45} \right) \{u_i\}^2 + \left(\frac{10}{9} N - \frac{43}{45} \right) \{u_i\}^1 \right] \end{aligned}$$

식(18)에서 $[\hat{K} + M]$ 행렬은 일정하므로, 매시간의 계산 작업은 $t = N\Delta t$ 로 하여, $\{\hat{F}(t)\}$ 계산과 과거의 동적변위결과들 $\{\hat{R}(t)\}$ 을 보상해 주면 된다. 여기서, 첫 번째 시간절점에서 변위값은 linear time variation에 의한 유한요소방정

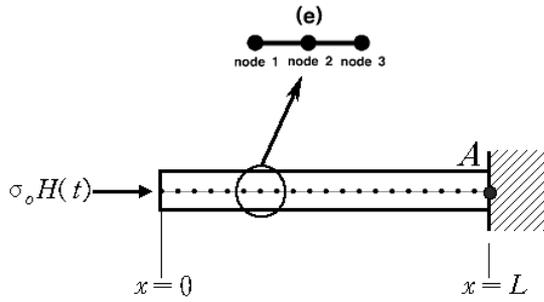


Fig. 3. Finite element model of 1D bar.

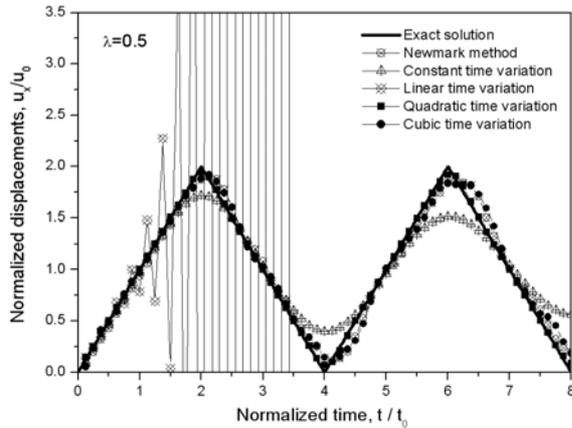


Fig. 4. Axial displacements at the free end ($x=0$, $\lambda=0.5$).

식으로부터, 두 번째 시간절점에서의 변위값은 quadratic time variation에 의한 유한요소방정식을 이용한다. 각 절점에서의 응력 계산은 탄성의 경우와 동일하다.

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\} = [D][B] \{u\} \quad (20)$$

여기서, $\{u\}$ 는 절점변위이다.

4. 수치해석 예

Fig. 3에서와 같이 한쪽 끝단($x=L$)이 고정되어 있고 다른쪽 끝단이 자유단($x=0$)인 막대가 갑작스러운 충격하중($\sigma_0 H(t)$)이 작용할 때, 1차원 막대 속에 작용하는 변위와 응력을 계산하였다. 이때 사용된 변수는 막대의 탄성계수 E , 밀도 ρ , 그리고 자유단에서 가해진 일정 압축하중은 σ_0 이다. 자유단에 가해진 충격하중에 의해

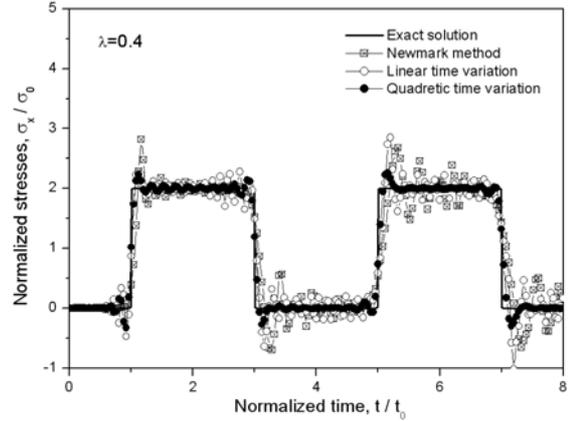


Fig. 5. Axial stresses at the fixed end ($x=L$, $\lambda=0.4$).

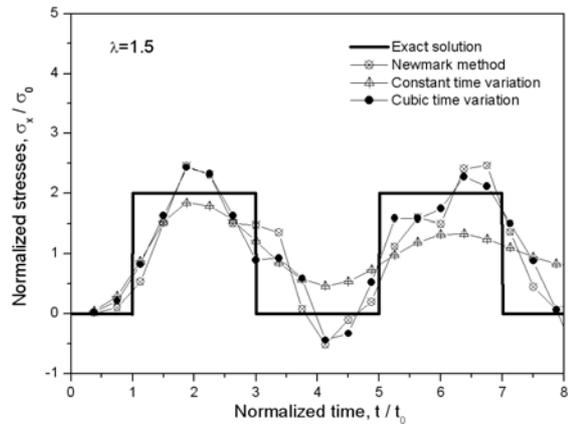


Fig. 6. Axial stresses at the fixed end ($x=L$, $\lambda=1.5$).

막대 내부에서 발생한 진동현이 진행되는 전면의 속도는 $c = \sqrt{E/\rho}$ 이다. 그리고 막대의 자유단에서 가해진 충격하중이 막대의 고정단에 도달하는 시간을 기준시간($t_0 = L/c$)으로 정의한다. 균일하게 분할된 대표 유한요소의 크기 ΔL 과 시간간격 Δt 동안 진동현의 전면이 진행한 거리 $c\Delta t$ 에 대한 상대적인 관계를 가지는 패러미터 λ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\lambda = \frac{c \Delta t}{\Delta L} \quad (21)$$

유한요소해석에 사용된 유한요소는 3절점 선요소를 사용하였으며, 요소의 형상에 따른 상대적인 오차(즉, 공간영역에서의 영역적분에 따른 수치적인 오차)를 배재하기 위해서 모든 유한요소 모델을 균등하게 분할하였다.

Fig. 4는 패러미터 $\lambda = 0.5$ 인 경우에 대하여

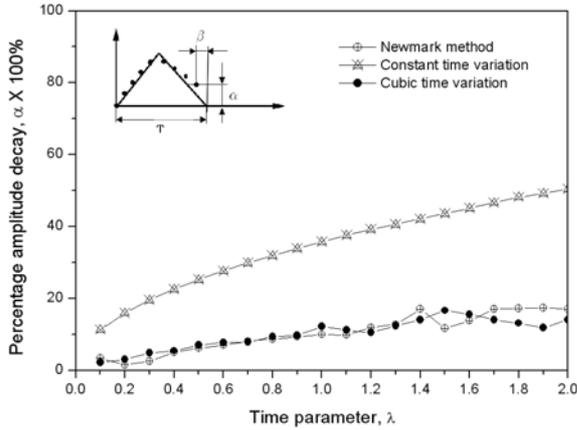


Fig. 7. Percentage amplitude decay at the free end for the time parameter.

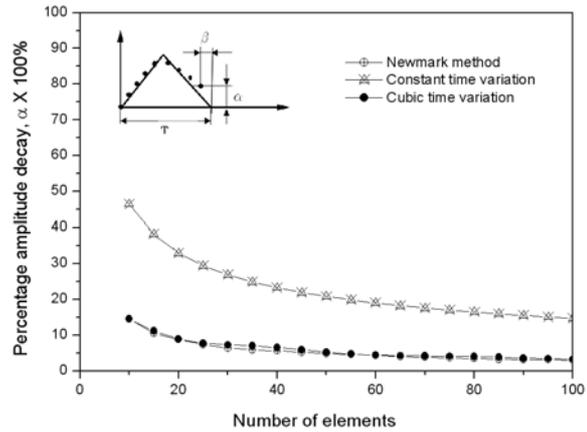


Fig. 8. Percentage amplitude decay at the free end for the number of elements.

1차원 막대의 자유단에서 변위해를 구해서 정적인 해($u_0 = FL/AE$)로 무차원화하여 이론해와 기존의 수치방법들을 비교해서 도시한 것이다. Quadratic time variation에 의한 변위해는 이론해와 거의 일치하는 가장 높은 정확도를 보이고 있으며, Newmark method에 의한 변위해와 Cubic time variation에 의한 변위해와 거의 유사한 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 반면에 Constant time variation에 의한 변위해는 유한요소의 개수가 많을수록, 시간간격이 세밀하게 분할할수록 정확도가 상승하였으나, 동일 조건에서의 다른 해법들과의 비교를 통해 알 수 있듯이 정확도가 매우 낮으며, 수치결과는 시간증분에 관계없이 급속하게 정적인 값에 수렴하였다. Linear time variation에 의한 변위해는 시간증분에 매우 민감한 결과를 보였다. 작은 시간증분에 대해서는 이론해의 경향을 따르고 있으나, 동일 조건의 다른 해법과 비교에서 알 수 있듯이 $\lambda = 0.5$ 에서 발산하는 불안정한 경향을 보이고 있다.

Fig. 5는 패러미터 $\lambda = 0.4$ 인 경우에 대하여 1차원 막대의 고정단에서 응력해를 구해서 압축하중(σ_0)으로 무차원화하여 이론해와 기존의 수치 방법들과 비교해서 도시한 것이다. Newmark method에 의한 방법과 Linear time variation에 의한 응력해는 이론해와 비교에서 시간이 경과할 수 록 응력해의 분포가 심하게 떨리는 현상을 보였다. 이에 반해 Quadratic time variation에 의한 응력해는 거의 이론해에 일치하는 우수한 수치결과를 보여주고 있다. 무차원 시간 $t/t_0 = 1$ 근처에서 수치해의 떨림이

발생하고 있으나 안정적으로 수렴하려는 경향을 보이고 있다. 이는 갑작스러운 하중이 작용함에 따라 발생하는 수치적인 오차의 누적에 따른 현상으로 고려되어진다.

Fig. 6은 패러미터 $\lambda = 1.5$ 인 경우에 대한 1차원 막대의 고정단에서의 응력해를 구해서 압축하중(σ_0)으로 무차원화하여 이론해와 기존의 해법들과 비교해서 도시한 것으로 큰 시간증분에 대하여 Cubic time variation에 의한 응력해는 매우 안정적인 수치해의 분포를 보여주고 있으며, Newmark method에 의한 응력해와 비교에서도 거의 유사한 거동을 보이고 있다. 극값 부근에서는 Newmark method에 의한 응력해 보다 좋은 수치해의 결과 분포를 보여주고 있다. 반면에 Constant time variation에 의한 응력해는 급속히 정적해로 수렴하고 있음을 알 수 있다. Fig. 7은 막대의 자유단에서 파라미터의 변화에 따른 변위해를 상대적인 오차의 비율로 비교 도시한 것이다.

각각의 동적 유한요소방정식들의 시간증분의 크기변화에 따른 수치해의 정확도를 확인하기 위하여 막대를 10개의 유한요소로 균일하게 등분하였으며, 패러미터(λ)를 0.1~2.0까지 변화시켜 가면서 변위해의 주기(T)에 따른 오차를 비교 분석하였다. Constant time variation에 의한 변위해는 패러미터의 변화에 대해 수치결과와 정밀도에서는 큰 오차를 보였다. Cubic time variation과 Newmark method에 의한 변위해는 비슷한 결과를 보이고 있으며, 시간 증분 크기에 제약이 없었으며, 해의 정확도에 있어서도 신뢰할 수 있는 결과를 보여 주고 있다. 이들 수치

결과에서 약간의 지그재그형 결과를 보이는 것은 유한요소의 개수의 제한에 의한 영역 적분에서 발생하는 오차의 영향으로 고려되어진다.

Fig. 8은 패러미터 $\lambda = 1.7$ 인 경우에 대하여 막대의 자유단에서 유한요소의 개수에 따른 변위해를 상대적인 오차의 비율을 비교 도시한 것이다.

일정한 길이(L)를 갖는 1차원 막대에서 유한요소의 개수에 따른 수치해의 정확도를 확인하기 위해 요소를 10개에서 100까지 균일하게 등분하여 해석을 수행하였다.

유한요소의 개수가 많을수록 수치해는 높은 정밀도를 보이고 있으며, 요소의 개수에 따른 수치적인 오차는 크게 발생하지 않는 안정적인 값에 수렴하고 있음을 알 수 있다. 본 논문에서 제시된 Cubic time variation에 의한 변위해는 Newmark method에 의한 변위해의 분포와 거의 일치하는 결과를 보이고 있으며, 유한요소의 개수가 약 40개 이상의 유한요소 모델에 대해서는 거의 비슷한 변위분포를 보였다. Constant time variation에 의한 방법은 요소수가 100개 이상에서는 약 14.7의 오차의 크기로 수렴하는 결과를 보이는데 이것은 요소의 개수를 아무리 많이 하여도 응력이 급격하게 변하는 정점에서 변위를 묘사할 수 없음을 보여주고 있다.

4. 결 론

등방성 선형 탄성 재료의 과도적인 동적 변형을 엄밀하고 정밀하게 해석하기 위하여 시간 구간에서의 종속함수가 2차곡선과 3차곡선으로 가정된 동탄성 유한요소방정식을 유도하였다. 수치결과의 정확성과 안정성을 확인하기 위하여 상대적인 시간증분의 크기와 유한요소의 개수를 변화시켜 가면서 얻어진 수치결과들을 분석하였다. 그리하여 본 논문의 해법 특성에 대한 다음과 같은 결론을 얻었다.

Quadratic time variation에 의한 유한요소방정식은 패러미터 $\lambda = 0.6$ 이하에서 수치결과의 정점 즉, 충격하중에 의해 발생한 진동현의 전면이 도달하는 곳에서는 기발표된 수치해법 보다 정밀한 수치결과를 보였다.

Cubic time variation에 의한 유한요소방정식의 수치결과는 전반적으로 시간증분의 크기에 민감하게 반응하지 않는 안정적인 수치결과들을 보여주고 있다. 장시간 경과하면 약간의 굴곡현상을 보이기는 하나, 수치결과의 전반적인 해의 분포는 이론해의 경향과 유사한 결과를 보이고 있다.

후 기

본 연구는 금오공과대학교 학술연구비에 의하여 연구된 논문임.

참 고 문 헌

- 1) Chen, Y.M. and Wilkins, M.L. : Numerical Analysis of Dynamic Crack Problems, Mechanics of Fracture 4, Elastodynamic Crack Problems, Sih, G.C. Noordhoff Int. Publishing, Leyden, (1977)
- 2) Bathe, K.J. : Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1996)
- 3) Beskos. D.E., *Part II, Trans ASMF, Appl. Mech. Rev.*, **50**, **3**, 149, (1986-1996)
- 4) Washizu. K., Variational Methods in Elasticity and Plasticity 2nd ed, Pergamon Press. Oxford. (1975)
- 5) Gurtin, M.E., *Archive for Rational Mechanisc and Analysis*, **16**, **1**, 34, (1964)
- 6) 심우진, 이성희, *대한기계학회 논문집*, **25**, **4**, 574, (2001)
- 7) Achenbach, J.D. : Wave Propagation in Elastic Solids, North-Hollanddam, (1975)
- 8) 오근, 황은하 *한국산업응용학회 춘계학술대회 논문집*, pp. 17-20, (2008)
- 9) Wang C.C., Wang H.C., Liou G.S., *J. Solids Structures*, **34**, **1**, 129, (1997)

(2009년 4월 27일 접수, 2009년 8월 21일 채택)